応用解析２　期末テスト（２００７年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．(裏面にも問題があるので注意せよ．)

問題 I. [合計 50 点]

次の設問に従って，平面上の周囲の長さが一定である図形で，面積が最大となるのは円であることを証明せよ．

(1)　平面上の極座標 (r,θ) を用いることにする；$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$. $(dx)^2+(dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$ であることを示し，周囲の長さは $\oint\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$ で与えられることを導け．ここで $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$ であり，積分は図形の周にそって一周するものとする．

(2)　面積は $\dfrac{1}{2}\oint r^2\,d\theta$ で与えられるので，この問題は，ラグランジュの未定乗数を λ とすると

$$I = \oint\left\{\frac{1}{2}r^2+\lambda\sqrt{r^2+(r')^2}\right\}d\theta = \oint f(r,r')d\theta$$

に対する変分問題であることが分かる．被積分関数 $f(r,r')$ が θ をあらわには含まないことから，オイラー・ラグランジュの方程式の第 2 形式から

$$f - r'\frac{\partial f}{\partial r'} = c$$

という方程式が得られる．ここで c は定数である．この式を具体的に書き下しなさい．

(3)　上の式を変形すると

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r}{r^2/2-c}\sqrt{-c^2+(\lambda^2+c)r^2-r^4/4}$$

という微分方程式が得られる．$c = -(\lambda^2-\mu^2)/2$ とおくと，この式は

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2\mu r^2}{\lambda^2-\mu^2+r^2}\sqrt{1-(-\lambda^2+\mu^2+r^2)^2/4\mu^2r^2} \tag{1}$$

となる．ここで，α を定数として

$$\lambda^2 = \mu^2+r^2-2\mu r\cos(\theta-\alpha) \tag{2}$$

とすると，式 (1) は

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\mu r\sin(\theta-\alpha)}{r-\mu\cos(\theta-\alpha)} \tag{3}$$

となることを示せ．

(4)　式 (2) で $r = r(\theta)$ として (λ,μ は定数)，両辺を θ で微分して整理すると式 (3) が得られることを示せ．このことより，式 (2) は式 (1) の解になっていることが分かる．

(5)　ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ が定ベクトルであり，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\lambda}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{\mu}$ のなす角を $\theta-\alpha$ として．$|\boldsymbol{r}| = r, |\boldsymbol{\mu}| = \mu, |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda$ とすると，式 (2) が成り立つことを示せ．このことより，式 (2) は，位置ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の固定点からの距離 $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\mu}|$ が一定の点が描く図形を表していることが分かる．つまり，この変分問題の答えは円ということになる．

問題 II. [合計 50 点]

1 の目から 6 の目が，どれも等しく 1/6 の確率で出るサイコロを 6000 回投げる.「1 の目が出る回数 m」に関して，以下の設問にそれぞれ有効数字 3 桁で答えよ．必要があれば，次の値を用いよ．$\sqrt{5000} \fallingdotseq 70.7$,　$\sqrt{1000} \fallingdotseq 31.6$,　$\sqrt{833} \fallingdotseq 28.9$

(1)　平均値 $\overline{m}$ を求めよ.

(2)　標準偏差 σ を求めよ.

(3)　確率変数 z を $z = \dfrac{m - \overline{m}}{\sigma}$ で定義する．$z \fallingdotseq -2$ となる回数 m_1 を求めよ.

(4)　同様に $z \fallingdotseq 2$ となる回数 m_2 を求めよ.

(5)　1 の目が出る回数が m_1 回以上 m_2 回以下である確率は約何パーセントか.

問題 III. [合計 50 点]

$h > 0$ とする．区間 $[0, h]$ 内で 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t \geq 0, \quad -h \leq x \leq h$$

を

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,h) = 0, \quad t \geq 0$$

という境界条件の下で考える．以下の設問に従って解を求めよ.

(1)　変数分離法に従って，$u(t,x) = T(t)X(x)$ とおくと，

$$\frac{dT(t)}{dt} = -kT(t), \qquad \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -2kX(x)$$

という 2 つの常微分方程式に分けられることを示せ．k は未定定数である.

(2)　$x = 0$ での境界条件 $u(t,0) = 0, t \geq 0$ を課すと，$X(x)$ は

$$X(x) = c\sin(\sqrt{2k}x)$$

の形に定まることを示せ．c は定数である.

(3)　$x = h$ での境界条件 $u(t,h) = 0, t \geq 0$ を課すと, k の値は

$$k = \frac{n^2\pi^2}{2h^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

でなければならないことになる．このことを導きなさい.

(4)　一般解は, $c_1, c_2, c_3, \cdots$ を未定定数として

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2h^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}x\right), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq h$$

となることを示せ．未定定数 $\{c_n\}$ は，どのような条件から決められるか.

問題 IV. [合計 50 点]　4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{E, A, B, C\}$ に関して，以下の設問に答えなさい．

(1)　行列のかけ算に関して，G は群の 4 つの公理を満たすことを示しなさい．

(2)　この集合 G は，位数 4 の巡回群と同型であることを説明しなさい．