応用解析２ 期末テスト（２００８年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること．

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．

問題 I.　1 m あたりの重さが ρ[kg/m] の糸が 2 点 (x_0, y_0) と (x_1, y_1) で支えられている．ただし，水平方向に x 軸をとり，鉛直上向きを y 軸の正の向きとする．したがって，重力は y 軸の負の向きに働く．糸の長さは ℓ[m] とする．以下の設問に答えよ．

(1)　糸に沿っての線積分を $\int_{x_0}^{x_1} ds$ で表すことにする．糸に働く重力ポテンシャルは, 重力加速度を g[m/s^2] とすると $I_1 = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y ds$ となる．また，糸の長さは一定であり $I_2 = \int_{x_0}^{x_1} ds = \ell$ である．λ を未定乗数としてラグランジュの未定乗数法を用いることにすると，糸の平衡位置 $y = y(x)$ は

$$I = I_1 + \lambda I_2 = \int_{x_0}^{x_1} (\rho g y + \lambda) ds$$

の値を極小にするという変分原理から定まるはずである．ds を dx と $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$ を用いて表すことにより，上の I は $I = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx$ と表すことができることを，具体的に $f(y, y')$ を与えることによって示しなさい．

(2)　上で求めた $f(y, y')$ は x を陽には含まないので，この変分問題を解くには オイラー・ラグランジュの方程式の第 2 形式が便利である．このことより，次の微分方程式を導きなさい．ただし，C_1 は積分定数（未定定数）である．

$$\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1 \tag{1}$$

(3)　上の方程式 (1) は $\rho g y + \lambda = C_1 \cosh\Big(ax + C_2\Big)$ とおくことによって解くことができる．ただし，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ であり，C_1 は (3) の右辺の定数，また C_2 はこれとは別の未定定数である．a を定めよ．

(4)　C_1, C_2 とラグランジュの未定乗数 λ という 3 つの未定定数を定めるには, 3 つの条件式が必要である．この 3 つの条件式を書き下しなさい．($C_1 = \cdots, C_2 = \cdots, \lambda = \cdots$ という形に解く必要はない．C_1, C_2, λ を含む独立な 3 つの式を与えればよい．)

問題 II. ポアソン分布 $f(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda > 0$ を考える．

(1)　平均値 $\overline{m} = \sum_{m=0}^{\infty} m f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(2)　分散 $\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m - \overline{m})^2 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(3)　3 次のモーメント $\sum_{m=0}^{\infty} (m - \overline{m})^3 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

問題 III. 3 次元球座標系でのラプラス方程式

$$\Delta\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{2}$$

に関して，以下の設問に答えなさい．

(1)　$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ とおいて変数分離すると，(2) 式は次の 3 つの常微分方程式に分離されることを示しなさい．ただし，m と β は未定定数である．

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \beta R = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\beta - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0. \tag{5}$$

(2)　(3) 式の一般解を求めなさい．(ヒント：$R = r^k$ とおいてみて，これが解になるように指数 k を定めてみよ．)

(3)　$x = \cos\theta$ として，$\Theta(\theta) = P(x)$ とする．(4) 式から $P(x)$ に対する微分方程式を導きなさい．

(4)　(5) 式の一般解を求めなさい．

問題 IV. 平面上の回転を表す 2×2 の直交行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

について，次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ として

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

とする．2×2 の単位行列を I_2 と書くと

$$R(\theta) = I_2 \cos\theta + \mathrm{i}\sigma \sin\theta$$

と表せることを示せ．

(2) $k = 0, 1, 2, \ldots$ としたとき，

$$\sigma^{2k} = I_2, \quad \sigma^{2k+1} = \sigma$$

であることを証明しなさい．

(3) 以上より，次の等式を導きなさい：

$$R(\theta) = \exp\Big(\mathrm{i}\theta\sigma\Big).$$

ただし，一般に 2×2 の行列 M に対して，その指数関数は $\exp\Big(M\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義されるものとする．