応用解析２ 期末テスト（２００９年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること．

下の５問の中から，３問を選択して解答用紙に答えよ．(裏面にも問題があるので注意せよ．)

問題 I.

$x = x(t)$ を時間 t の関数として，その微分を $\dot{x}(t)$ と記すことにする．(つまり $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.) m と k を定数とする．$x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の汎関数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$ として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

と定義する．以下の問に答えなさい．

(1) この $\mathcal{L}$ に対して，オイラー・ラグランジュ方程式を書き下しなさい．

(2) 上の結果から，ニュートン方程式を変分法の立場から論じてみなさい．

問題 II.

$h > 0$ とする．区間 $[0, h]$ 内で 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t \geq 0, \quad -h \leq x \leq h$$

を

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,h) = 0, \quad t \geq 0$$

という境界条件の下で考える．以下の設問に従って解を求めよ．

(1) 変数分離法に従って，$u(t,x) = T(t)X(x)$ とおくと，

$$\frac{dT(t)}{dt} = -kT(t), \qquad \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -2kX(x)$$

という 2 つの常微分方程式に分けられることを示せ．k は未定定数である．

(2) $x = 0$ での境界条件 $u(t,0) = 0, t \geq 0$ を課すと，$X(x)$ は

$$X(x) = c\sin(\sqrt{2k}x)$$

の形に定まることを示せ．c は定数である．

(3) $x = h$ での境界条件 $u(t,h) = 0, t \geq 0$ を課すと, k の値は

$$k = \frac{n^2\pi^2}{2h^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

でなければならないことになる．このことを導きなさい．

(4) 一般解は, $c_1, c_2, c_3, \cdots$ を未定定数として

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2h^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}x\right), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq h$$

となる．未定定数 $\{c_n\}$ は，どのような条件から決められるか．

問題 III. ポアソン分布 $f(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda > 0$ を考える．

(1) 平均値 $\overline{m} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(2) 分散 $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} (m - \overline{m})^2 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(3) 3 次のモーメント $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} (m - \overline{m})^3 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

問題 IV. 4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{E, A, B, C\}$ に関して，以下の設問に答えなさい．

(1) 行列のかけ算に関して，G は群の 4 つの公理を満たすことを示しなさい．

(2) この集合 G は，位数 4 の巡回群と同型であることを説明しなさい．

問題 V. 平面上の回転を表す 2×2 の直交行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

について，次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ として

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

とする．2×2 の単位行列を I_2 と書くと

$$R(\theta) = I_2 \cos\theta + \mathrm{i}\sigma \sin\theta$$

と表せることを示せ．

(2) $k = 0, 1, 2, \ldots$ としたとき，

$$\sigma^{2k} = I_2, \quad \sigma^{2k+1} = \sigma$$

であることを証明しなさい．

(3) 以上より，次の等式を導きなさい：

$$R(\theta) = \exp\left(\mathrm{i}\theta\sigma\right).$$

ただし，一般に 2×2 の行列 M に対して，その指数関数は $\exp\left(M\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義されるものとする．