応用解析２ 期末テスト（２０１０年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること．

下の５問の中から，３問を選択して解答用紙に答えよ．(裏面にも問題があるので注意せよ．)

問題 I.

鉛直方向を向いた放物線の形をした針金に沿って自由に動く質量 M のビーズを考える．水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると，針金の形状は $y = ax^2$ と書ける (a は正の定数)．運動エネルギーからポテンシャル・エネルギーを引いた量をラグランジアン $\mathcal{L}$ という．今の場合，

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(ax^2) = 2ax\dot{x}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - Mgy \\ &= \frac{1}{2}M(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 - Mgax^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

と表せる．ここで g は重力加速度 (定数) である．

(1) $\omega > 0$ として，変位 x の近似解として

$$x = A \sin \omega t$$

を仮定することにする．これを (1) 式に代入して積分

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \mathcal{L}\, dt$$

を計算しなさい．ただし，必要があれば次の公式を用いよ．

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

(2) 係数 A についての極値条件

$$\frac{dI}{dA} = 0$$

を満たすように，ω を a と A の関数として定めなさい．

問題 II.

$u = u(x, t)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) まず，t は定数と思って, u を x についての方程式

$$\frac{d}{dx}u = -\frac{x}{t}u$$

の解とする．すると $C(t)$ を t のみの関数として

$$u = C(t) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \qquad (2)$$

と求められることを示しなさい．

(2)　次に，(2) 式を拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

に代入してみる．このとき拡散方程式が成り立つためには，$C(t)$ はどのような微分方程式を満たさなければならないか答えなさい．

(3)　上で導いた方程式を解いて $C(t)$ を定めなさい．ただし積分定数は, $t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = 1$$

を満たすように決めなさい．

問題 III.

x の連続関数 $\rho(x)$ が与えられているものとする．ε を定数として，$0 \leq x \leq 1$ の関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \rho(x')G(x';x)dx'$$

とする．ここで $G(x';x)$ は

$$G(x';x) = \begin{cases} -(1-x)x', & x' \leq x \text{ のとき} \\ -(1-x')x & x' > x \text{ のとき} \end{cases}$$

である．

(1)　$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ であることを示しなさい．

(2)　$\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ を計算しなさい．

(3)　$\dfrac{d^2}{dx^2}\phi(x)$ を計算しなさい．

問題 IV.

ポアソン分布 $f(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda > 0$ を考える．

(1)　平均値 $\overline{m} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} mf(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(2)　分散 $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(m-\overline{m})^2 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(3)　3 次のモーメント $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(m-\overline{m})^3 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

問題 V.

4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{E, A, B, C\}$ に関して，以下の設問に答えなさい．

(1)　行列のかけ算に関して，G は群の 4 つの公理を満たすことを示しなさい．

(2)　この集合 G は，位数 4 の巡回群と同型であることを説明しなさい．