応用解析２　期末テスト（２０１１年度）

裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

下の 3 問すべてに解答しなさい．(裏にも問題文があります．)

問題 I. $x = x(t)$ を時間 t の関数として，その微分を $\dot{x}$ と記すことにする．(つまり $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.）m と k を定数とする．x と $\dot{x}$ の汎関数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$ として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{1}$$

を考える．以下の問に答えなさい．

(1)　この $\mathcal{L}$ に対して，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

を書き下しなさい．得られた式は，1 次元調和振動子に対するニュートンの運動方程式に等しいことを説明しなさい．

(2)　(2) 式から，オイラー・ラグランジュ方程式の第 2 形式

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

を導きなさい．

(3)　(1) 式で与えられた $\mathcal{L}$ は t を陽に含まないので，$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ である．よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{L} - \dot{x}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ は時間に依らず一定の値をとることになる．この量は何か説明しなさい．

問題 II. $u = u(x,t)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) まず，t は定数と思って, u を x についての方程式

$$\frac{d}{dx}u = -\frac{x}{t}u$$

の解とする．すると $C(t)$ を t のみの関数として

$$u = C(t)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \tag{5}$$

と求められることを示しなさい.

(2) 次に，(5) 式を拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

に代入してみる．このとき拡散方程式が成り立つためには，$C(t)$ はどのような微分方程式を満たさなければならないか答えなさい.

(3) 上で導いた方程式を解いて $C(t)$ を定めなさい．ただし積分定数は, $t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = 1$$

を満たすように決めなさい.

問題 III. ポアソン分布

$$f(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda > 0$$

の分散 $\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty}(m - \overline{m})^2 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)