

# 環境・生命科学概論 (part 1/2)

かとり まこと  
香取 眞理

物理学科 1号館5F1538

研究分野      統計物理学  
                  数理物理学  
                  確率論  
                  数理生物学  
                  経済物理学

§ 森林生態系とイジング模型

§ 自己組織化臨界現象と砂山崩しのモデル

§ 伝染病伝播とパーコレーション問題

# 森林生態系とイジング模型

Neotropical forest

in Barro Colorado Island, Panama

50 ヘクタール (500 m × 1000 m) の熱帯季節林

Data: S.P. Hubbell and R. B. Foster, 1986 年発表

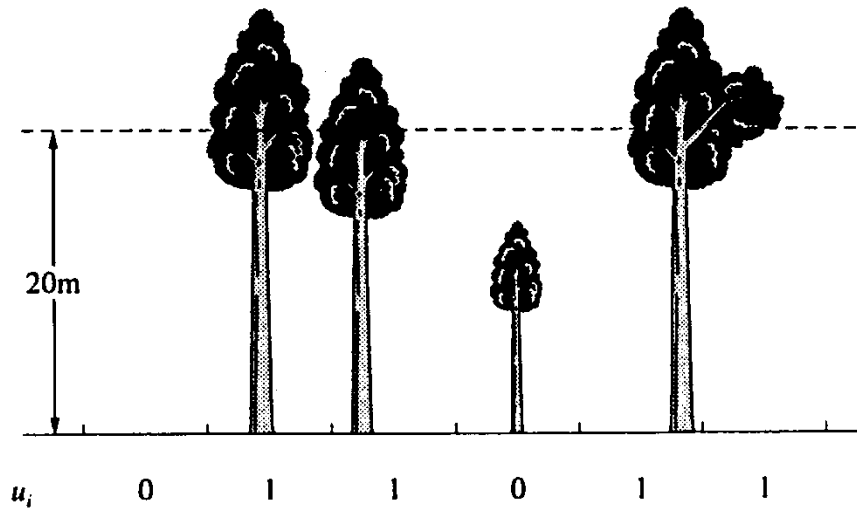


図2・13 林冠サイトと林冠ギャップサイト

小調査区 (5 m × 5 m) に分割

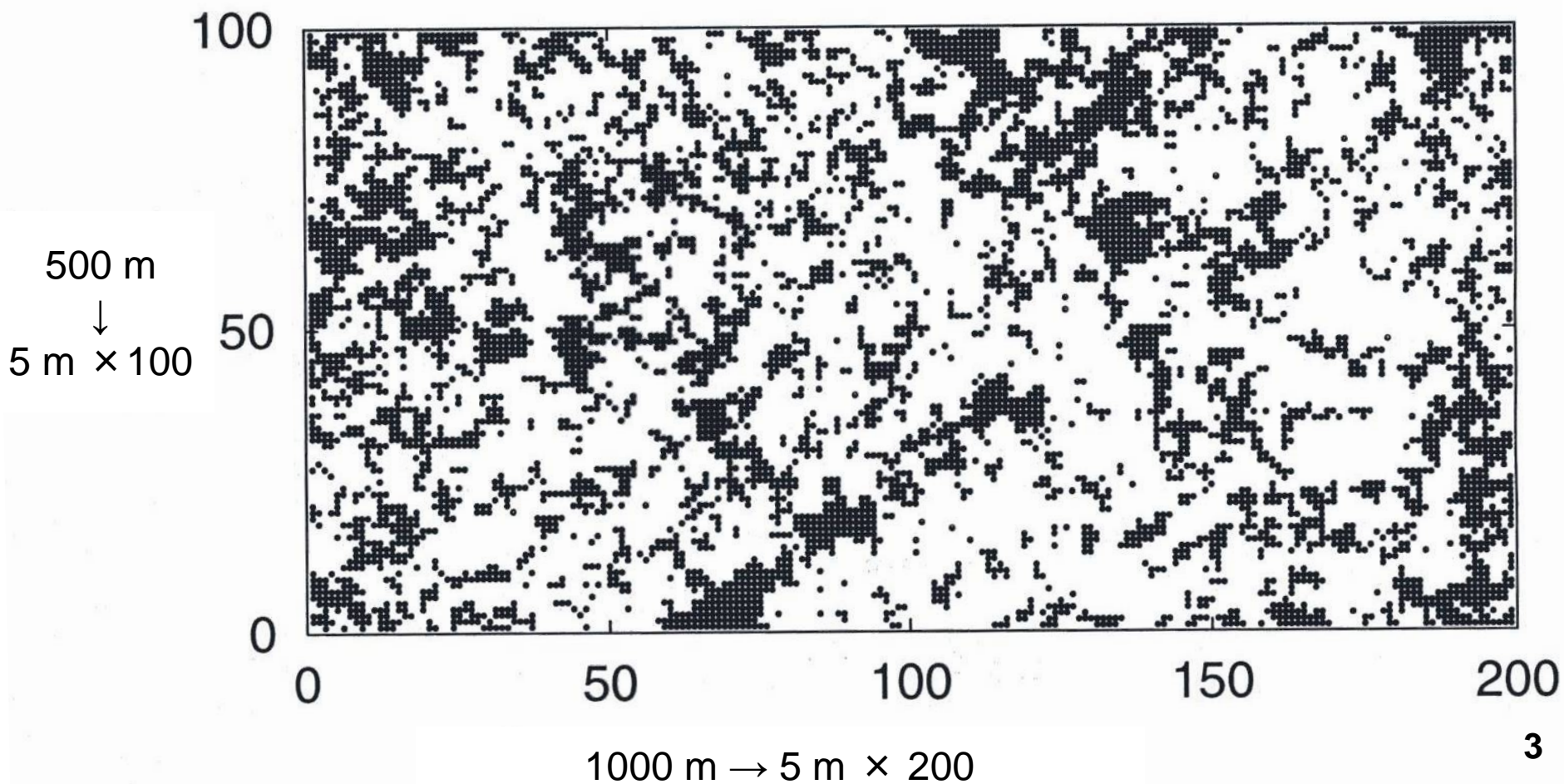
Canopy-gap (林冠ギャップ) サイト = 最高樹高 < 20 m の小調査区のこと<sup>2</sup>

# 1983年 調査結果

黒 林冠ギャップサイト 樹高 < 20 m

白 林冠サイト 樹高 > 20 m

調査区 200 × 100 サイト



## 小川森林保護区(日本)

555 m × 455 m  
小調査区 5 m × 5 m

航空写真からデータ化

5年毎に調査

1976年

1981年

1986年

1991年

田中氏、中静氏  
京都大学、森林総研

林冠ギャップサイト  
= 最高樹高 < 15 m

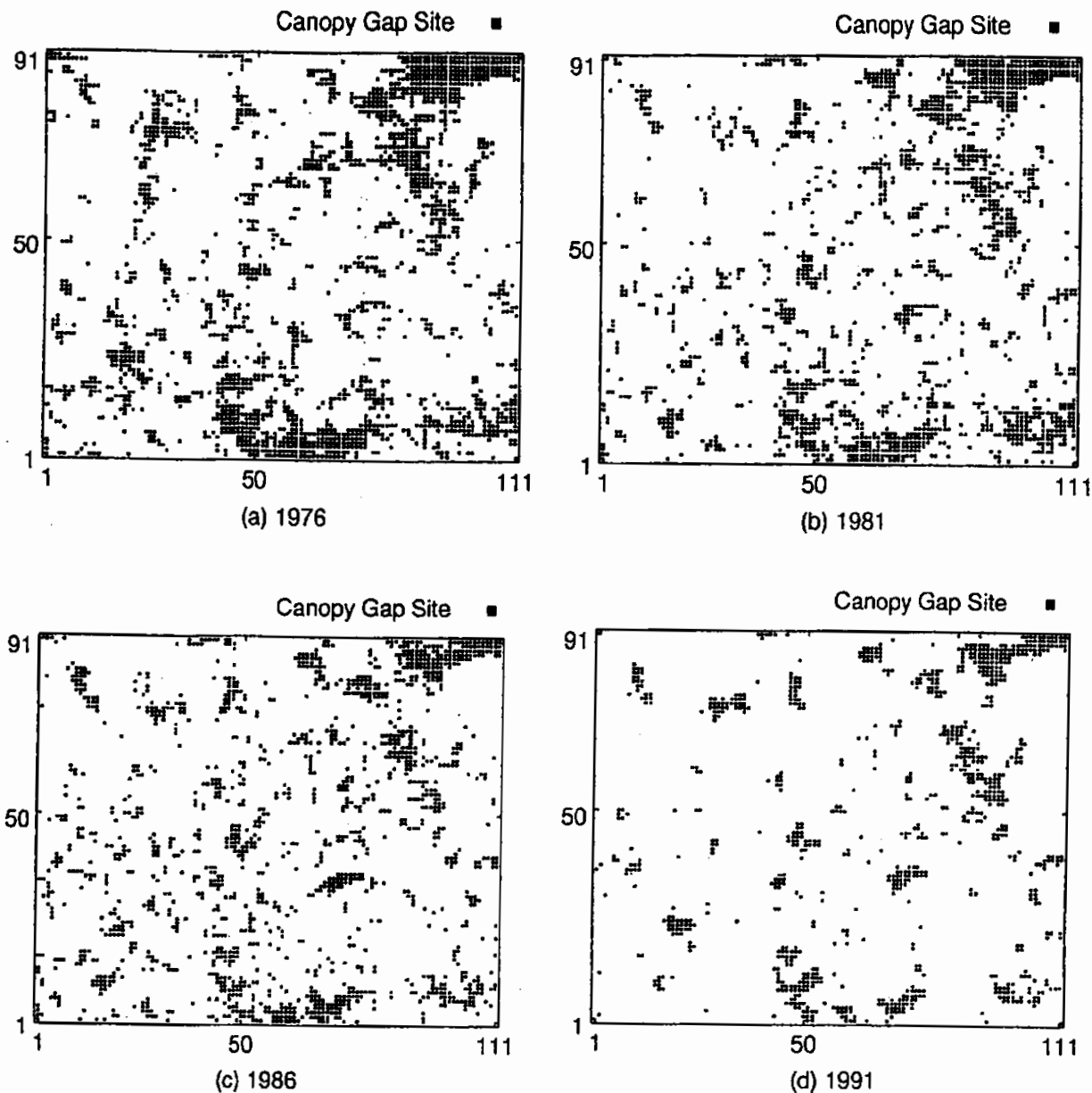
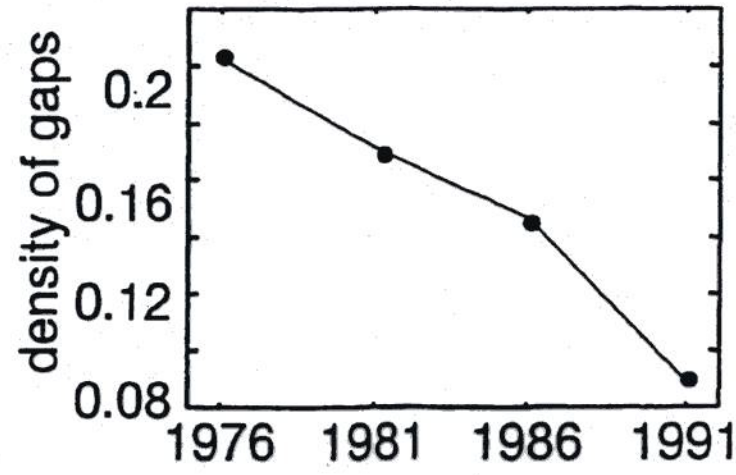
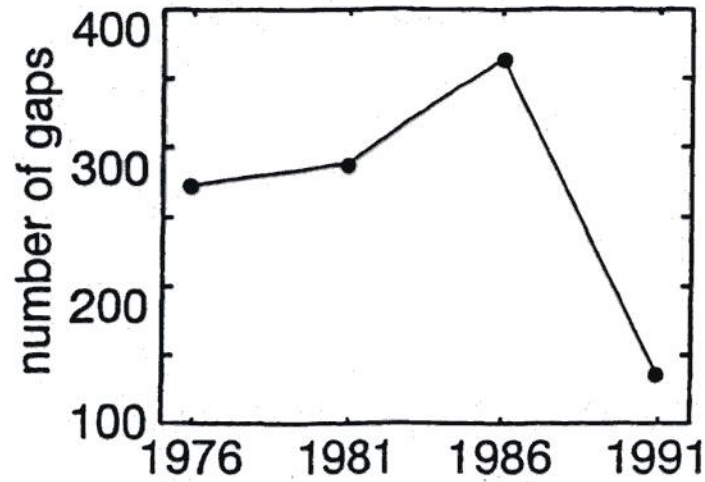


Fig. 3. 555×455 m digitized maps of the deciduous forest on Ogawa Forest Reserve (OFR), Japan, in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991.<sup>1)</sup> Gap sites, 5×5 m subplots in which there is no canopy higher than 15 m, are plotted by black dots.



(a)



(b)

Fig. 5. The time dependence of (a) a density of gaps  $\rho_0$  and (b) a total number of gaps  $n_0$  of OFR.



# Barro Colorado Island (1983)

1999)

Analysis of Structures of Forests by Ising-Gibbs States

2555

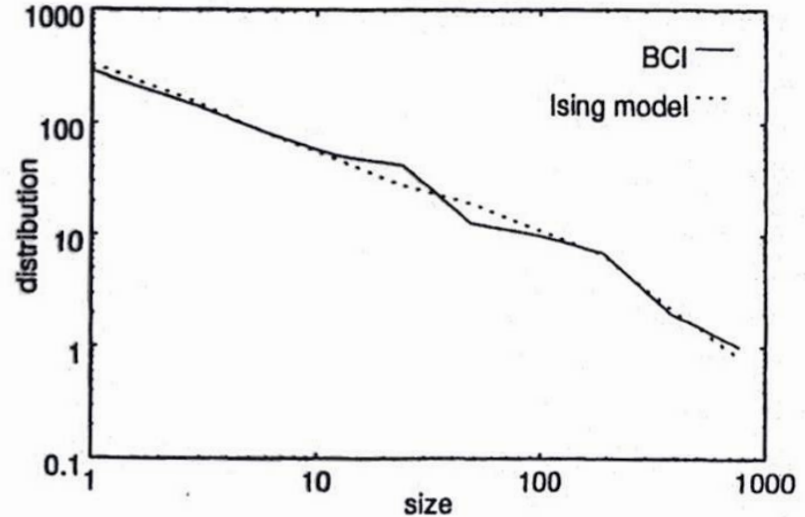
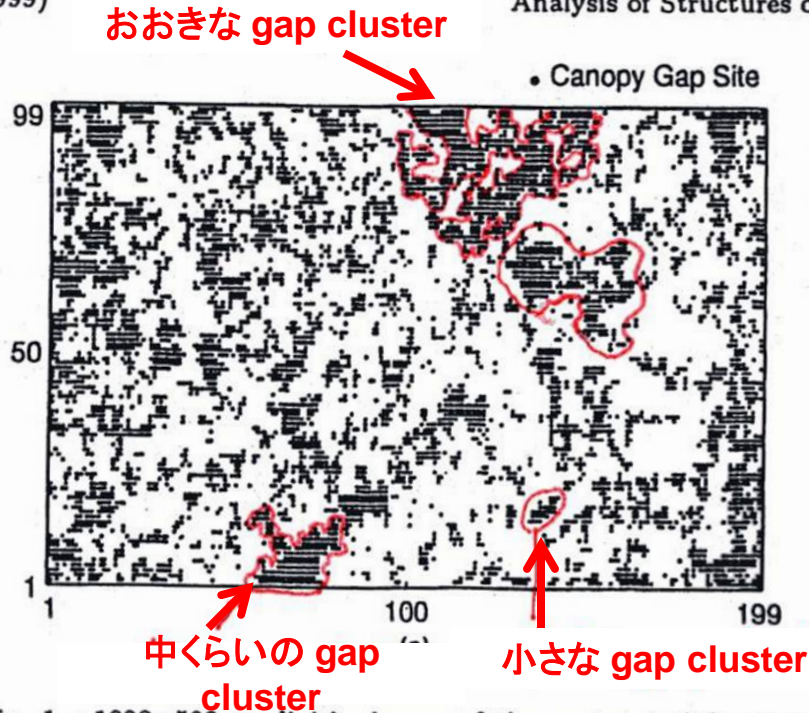


Fig. 2. Log-log plot of the gap-size distribution for BCI and the cluster-size distribution of down spins in the Ising-Gibbs state with  $K = 0.37$  and  $h = 0.016$ .<sup>11)</sup> The size of the gap cluster (down-spin cluster) is determined with Neumann neighborhood. For the Ising-Gibbs state, we performed the Monte Carlo simulations on a  $700 \times 700$  square lattice with the periodic boundary condition and averaged over 10 data, each of which is obtained after discarding 1500 Monte Carlo steps. Clusters contained in a  $199 \times 99$  region on the lattice are counted and the points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

Fig. 1.  $1000 \times 500$  m digitized map of the neotropical forest in Barro Colorado Island, Panama, in 1983.<sup>2,4)</sup> Gap sites,  $5 \times 5$  m subplots in which vegetation height is less than 20 m, are plotted by black dots.

林冠ギャップのかたまり(クラスター、cluster)のサイズ  $S$  の分布  
両対数グラフでほぼ一直線

# Ogawa Forest Reserve

[小川群落保護林  
(茨城県)]

林間ギャップの  
クラスターサイズ分布



どれも両対数グラフで  
ほぼ直線

分布関数

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

べき乗分布則

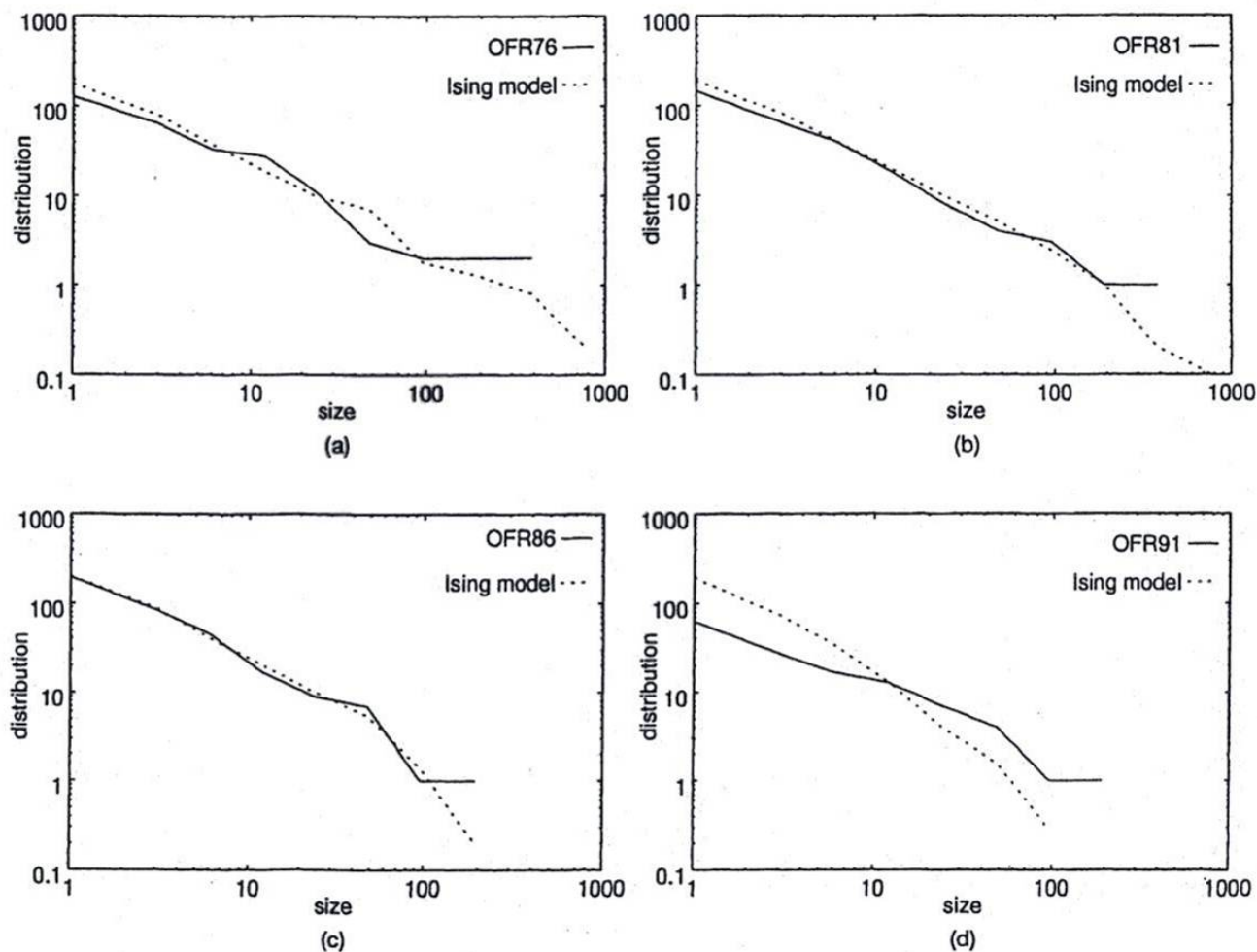


Fig. 4. Log-log plots of the gap-size distributions for OFR in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991, and those of the cluster-size distributions of down spins in the Ising-Gibbs states with  $K$  and  $h$  listed in Table I. For the Ising-Gibbs states, the Monte Carlo simulations were performed and clusters contained in a  $111 \times 91$  region on the  $700 \times 700$  lattice were counted. The points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

## べき乗分布則

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

指数  $\tau$  の値

BCI

OFR 86, 76

ともに約 1.7

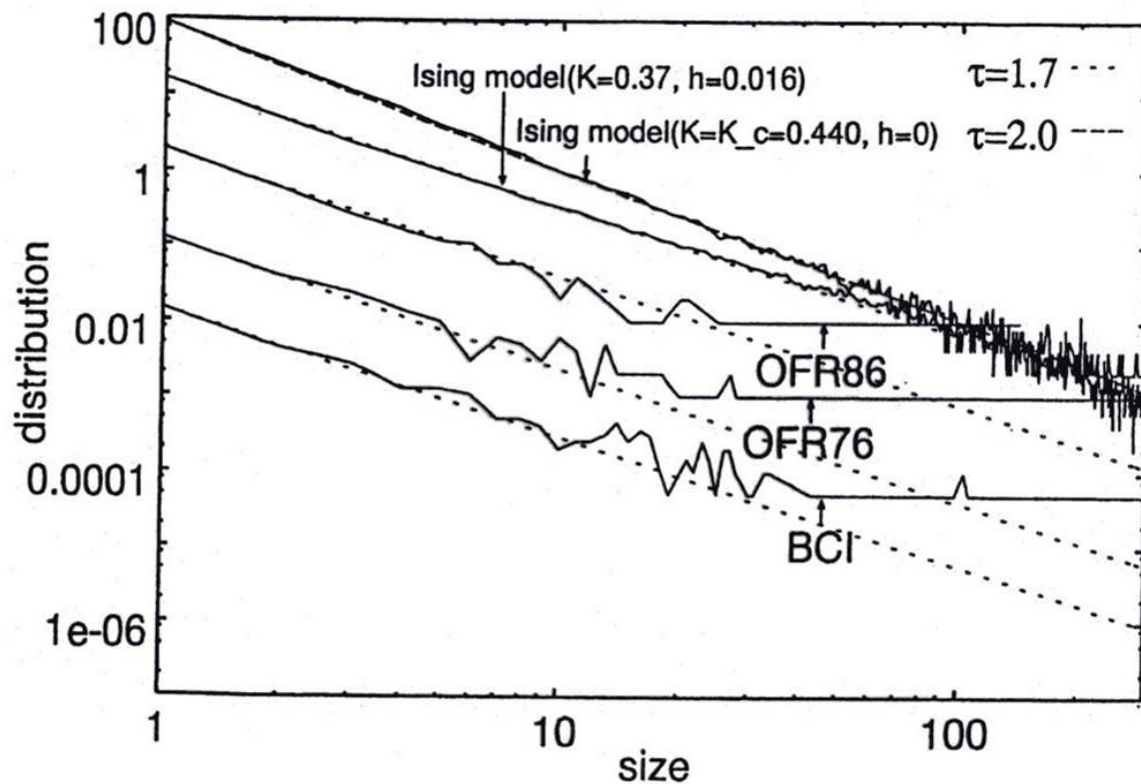
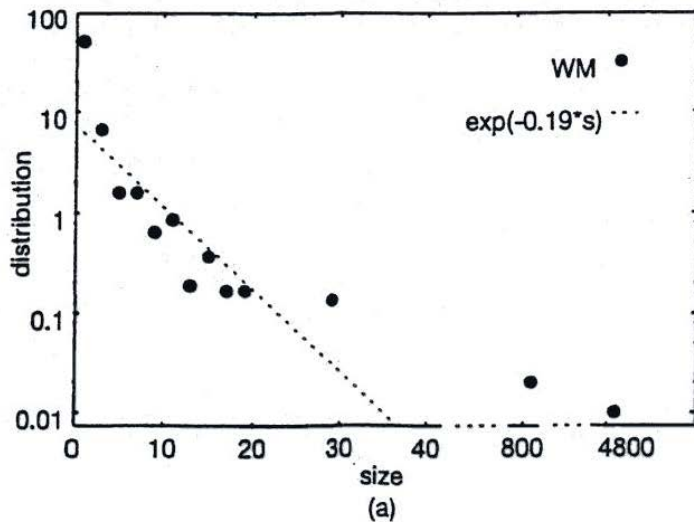


Fig. 6. From the bottom to the top, the gap-size distribution  $f_f(s)$  for BCI,  $f_f(s)$  for OFR in 1976, in 1986, the cluster-size distribution of down spins  $f_{IG}(s)$  of the Ising model with  $K = 0.36$  and  $h = 0.016$  and  $f_{IG}(s)$  with  $K = K_c = 0.440$  and  $h = 0$ . These are shifted upward in order to see them easily. The points in the distributions are not logarithmically binned. The distribution at the top is fitted by a size to the power of 2.0. Other four distributions are fitted by a size to the power of 1.7.

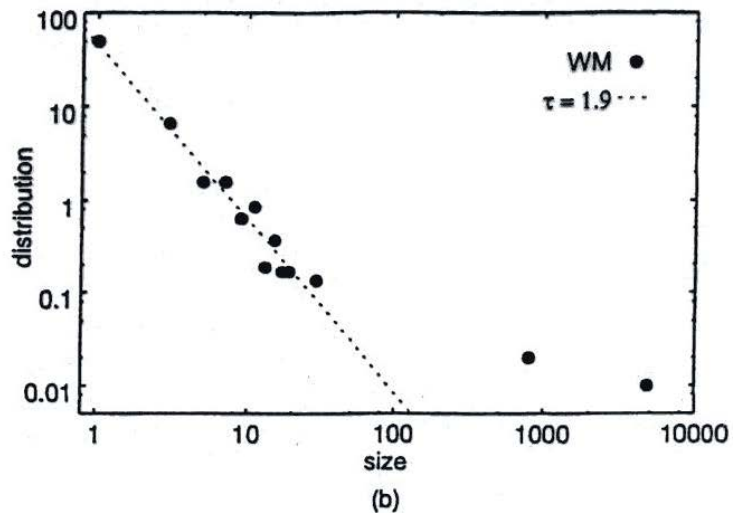




## 別の森林データ

Foster-Reiners  
(1986)

White Mountains,  
New Hampshire,  
USA



べき乗分布則

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

指数  $\tau$  の値は約 1.9

Fig. 7. The gap-size distribution  $f_f(s)$  for White Mountains (WM), New Hampshire, USA from ref. 3. (In the ordinate of Fig. 1 of ref. 3, 15 should be read as 50.) (a) The semilog plot of  $f_f(s)$  for WM. (b) The log-log plot of  $f_f(s)$  for WM. The dashed line in (a) denotes the fitted exponential function of a size and that in (b) denotes the fitted algebraic function of a size in the region where sizes are less than 30.

Praise for **SIGNS OF LIFE**

nts and stockmarkets, cells and mass extinction. All  
y told by two of the most brilliant and engaging  
rapidly emerging science of complexity.

STUART PIMM

Author of *The Balance of Nature?*

theoretical biologists, Richard Solé and Brian  
duced an outstanding book. Non-linear dynamics  
of collective “higher” properties are central con-  
g applications in biology and beyond. *Signs of Life*  
fted, readily understandable, and wise book.  
, physicists, and a wide audience will read it with  
tual profit.”

STUART KAUFFMAN

Author of *Investigations* and *At Home in the Universe*

s of systems where the whole is (far) greater than  
ganisms seem to defy analysis using the traditional  
of reductionism. A small—but growing—band of  
scientists is forging a path to a new understanding  
ive. In this fascinating new book, Solé and Goodwin  
ess made so far, and point the way to what we can  
future.”

KEITH DEVLIN

Author of *The Math Gene* and  
*Mathematics: The Science of Patterns*

int of the Perseus Books Group  
icbooks.com

US \$30.00 / \$44.95 CAN  
ISBN 0-465-01927-7

53000  
9 780465 019274

**SIGNS OF LIFE**  
SOLE AND GOODWIN

HOW COMPLEXITY PERVADES BIOLOGY

**SIGNS OF LIFE**

HOW  
COMPLEXITY  
PERVADES  
BIOLOGY

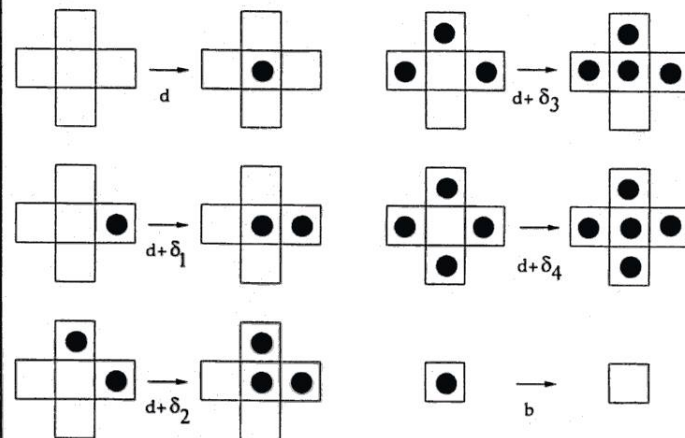
**RICARD SOLÉ AND BRIAN GOODWIN**

**Rechard Sole'らの2000年発行の本**  
**(サンタフェ 複雑系研究所、バルセロナ大)**

## An Ising Model for the Rainforest

In a recent paper, Makoto Katori and coworkers have shown that the forest canopy dynamics of the Barro Colorado plot can, in fact, be regarded as the result of an Ising-like model<sup>21</sup> (see Chapter 2). Using a simple set of rules directly inspired by field data analysis, Katori et al. reproduced some of the most interesting properties of the Barro Colorado 50 hectare plot. In Figure 7.17 the basic rules are described. Here two types of states are allowed (as with the Ising model): nongap points (here white squares) and gap points (black squares, corresponding to canopy below 20 meters high).

Field data provided the estimation of the transition rates (indicated in the figure below the arrows for each of the six possible cases). Here  $d$  is the spontaneous creation of a canopy gap (here  $d \approx 0.024$ ), and  $\delta_k$



**Figure 7.17** Basic rules defined in the Katori's et al. model. Gaps sites are denoted by black circles.

indicates the risk of falling trees due to the presence of neighboring gaps. Katori et al. use the simple (and sensible) approximation  $\delta_k = k\delta$ , where  $k = 1, \dots, 4$  and  $\delta = 0.276$ . This choice is based in the observation that the presence of nearest canopy gaps strongly increases the fall of neighboring trees either by direct physical effects or because of the strong modifications of local microclimate. The model is completed by introducing a transition rate from a canopy gap point to a noncanopy point due to tree growth ( $b = 0.177$ ).

The dynamics of this model give quite good results. But Katori et al. go a step further and show that in fact, this model is equivalent to an Ising model close to criticality. They estimated the appropriate temperature for the Ising model configuration consistent with Barro Colorado data. An example of the similarity between the Ising model and its rainforest counterpart is shown in Figure 7.15b, to be compared with Figure 7.15a (from Katori et al., 1998). The quantitative agreement between both plots can be shown by means of fractal measures or by plotting the size distribution of canopy gaps. The later is shown in Figure 7.16, where both field data and simulation are shown. These results give strong support to the early conjecture that rainforest dynamics take place close to critical states.<sup>22</sup>

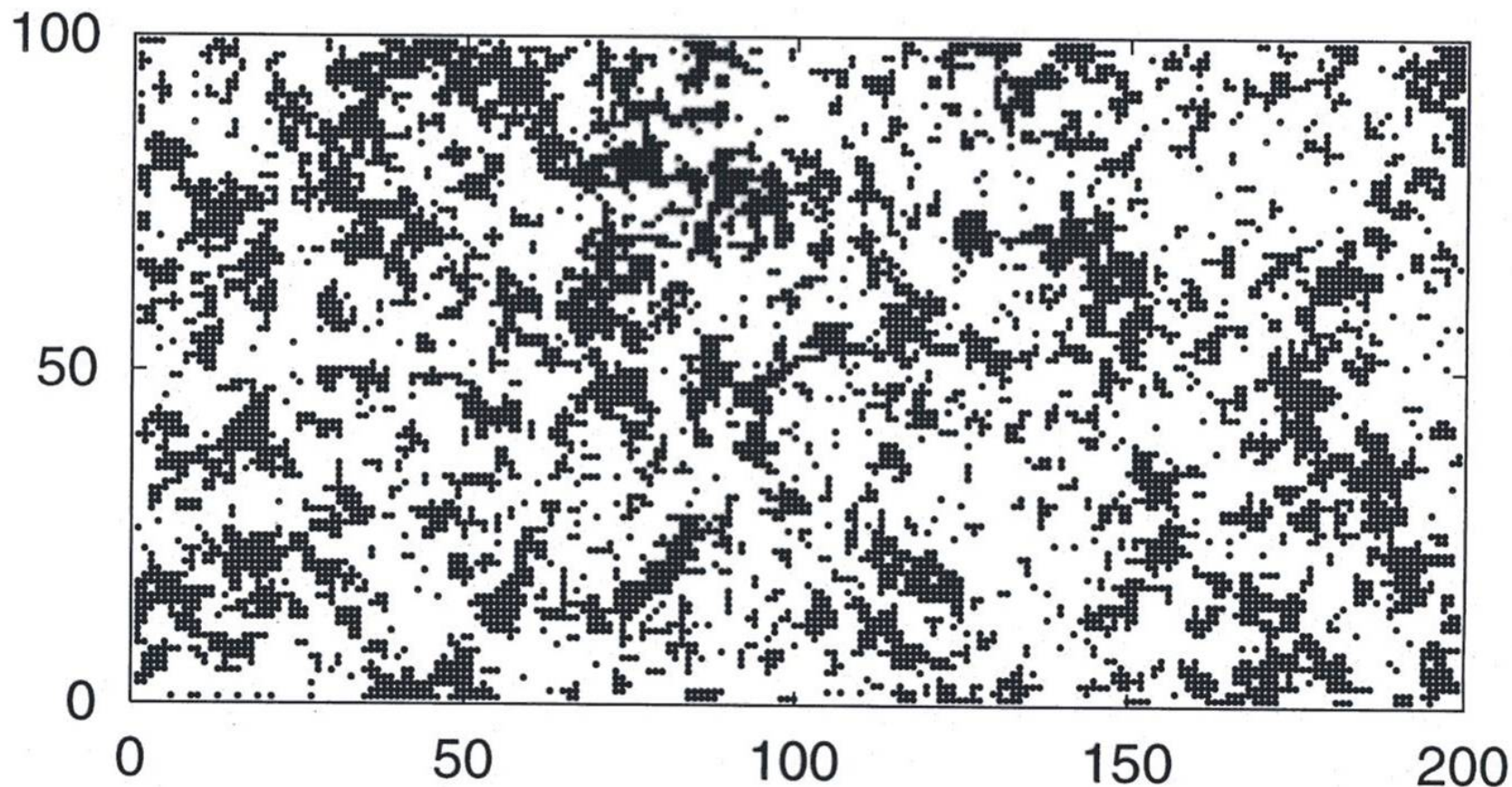
林冠ギャップ  
生成・消滅の  
確率モデル  
↓  
Ising 模型



# Ising 模型でシミュレートした BCI の林冠ギャップ分布

$$K = \frac{J}{kT} = 0.37, h = \frac{\mu_B}{kT} = 0.016$$

Ising





磁石は  $T_c$  (キュリー温度) を超えると磁力を失う。  
キュリー温度は鉄の場合  $770^{\circ}\text{C}$  くらい

## 強磁性体の相転移現象

第2章 磁石のモデルと森林生態系

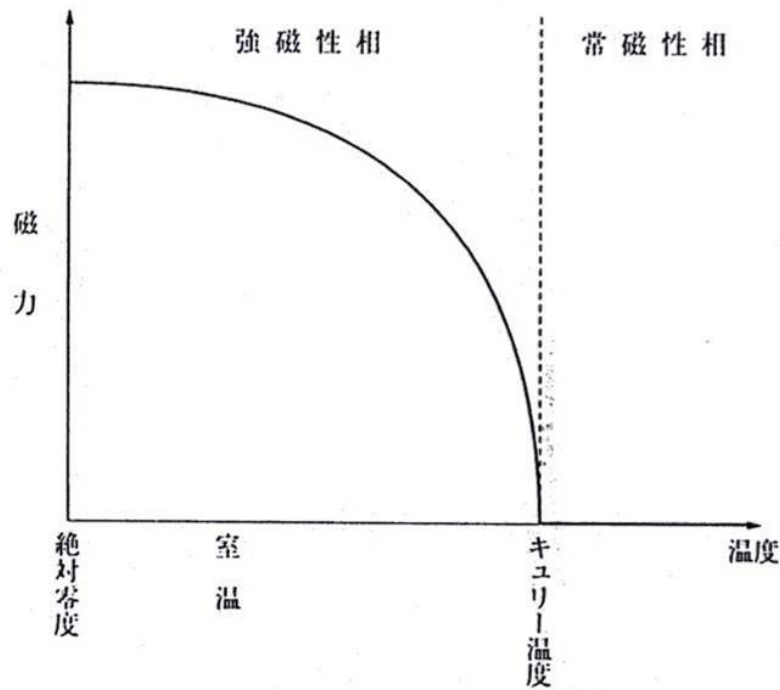


図2・1 磁石の磁力の温度による変化

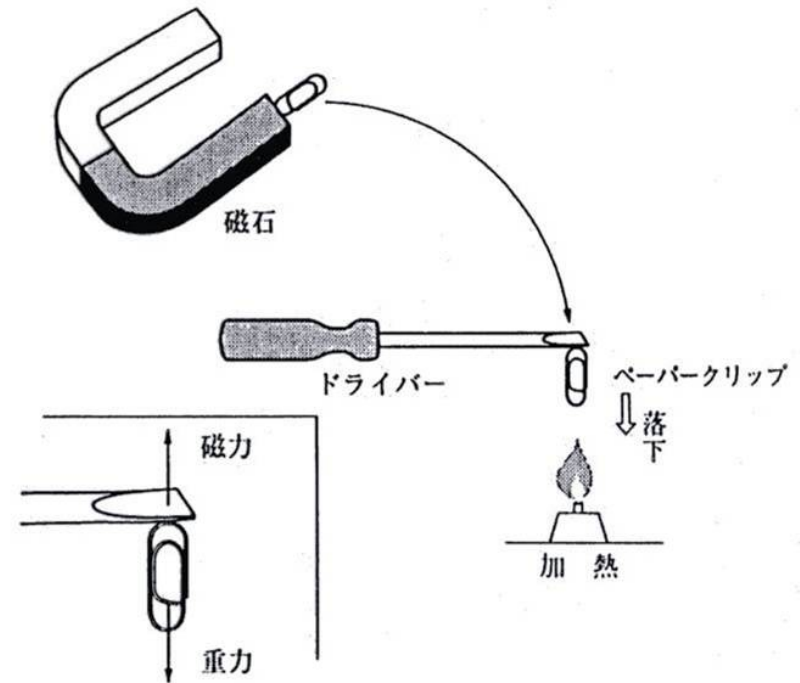


図2・2 簡単な実験

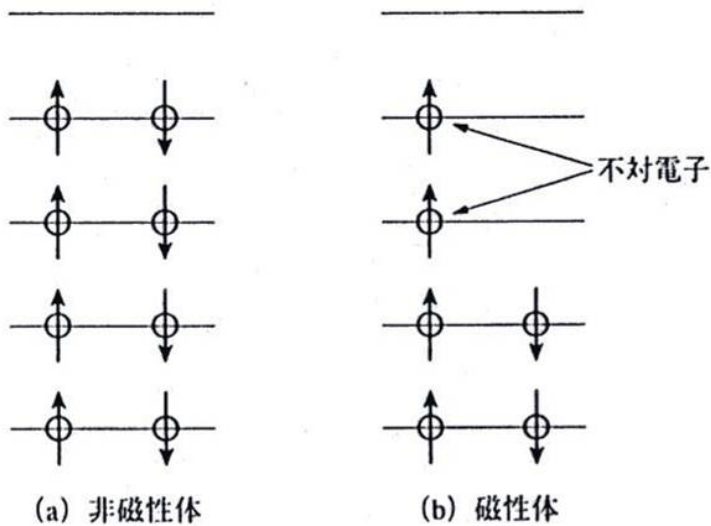


図 2 ・ 4 磁性体と非磁性体

非磁性体: 磁石につかないもの  
 (例) アルミニウム  
 磁性体: 磁石のつくもの  
 (例) 鉄, ニッケル

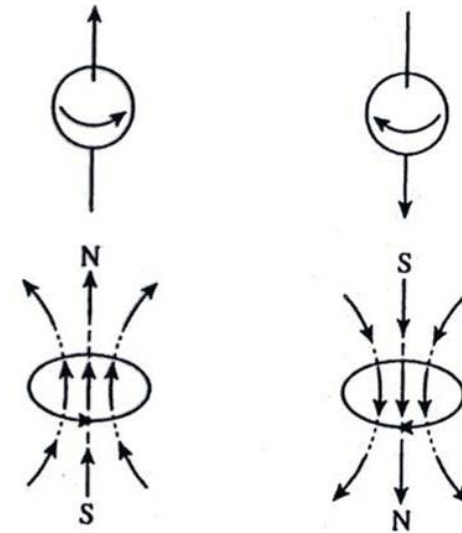


図 2 ・ 3 電子のスピン of 古典的イメージ

電荷 ( $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) を持つ電子は  
**自転 (spin)** している.



微小磁力を持つ  
 $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

## パウリの排他律

電子などのフェルミ粒子では、  
2つ以上の粒子が同時に  
同じ状態になることは不可能

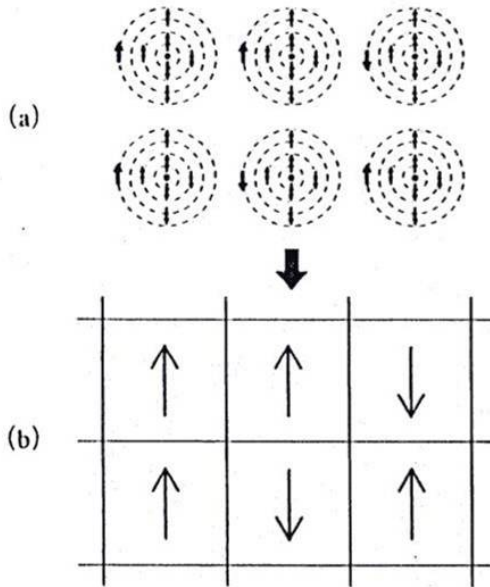


図2・5 粗視化して格子スピン・モデルにする

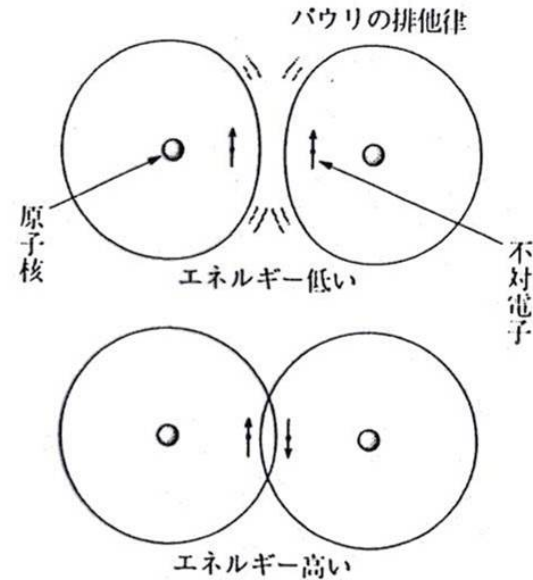
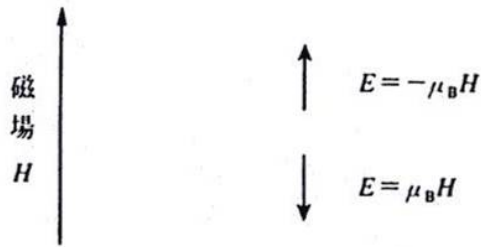


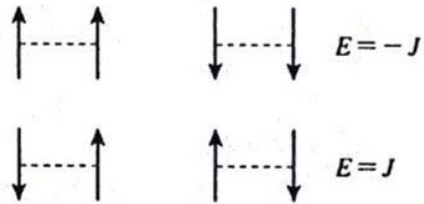
図2・6 パウリの排他律と交換相互作用

この場合の「同じ状態」とは、  
スピン(自転)の向きが揃った状態が  
近づく(空間的に同じ位置にある)ということ。

電子は全てマイナス電荷なので、近づくときクーロン反発力のため、電気ポテンシャル・エネルギーが高くなる。



(a) ゼーマン・エネルギー



(b) 交換相互作用

図2・7 スピンの向きとエネルギー

## エネルギー

$$E = -J \sum_{i,j} s_i s_j - \mu_B H \sum_i s_i$$

$s_i$  = サイト  $i$  の電子のスピンの向き  
 $= \begin{cases} 1 & \text{スピン上向き} \uparrow \\ -1 & \text{スピン下向き} \downarrow \end{cases}$

キュリー温度  
(相転移温度)  $T_c$

絶対零度  $T=0$

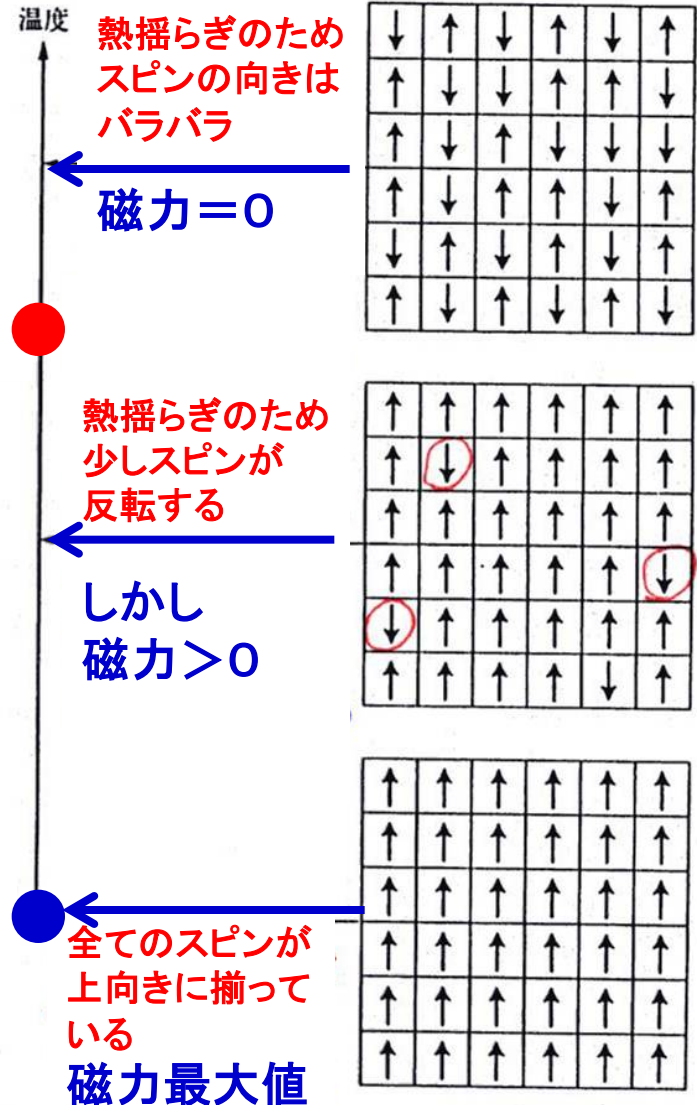


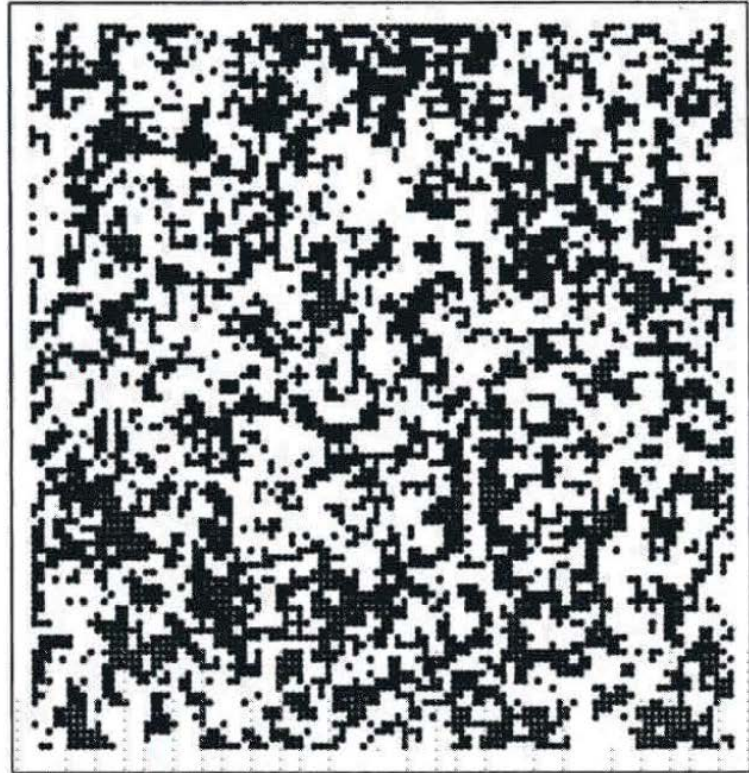
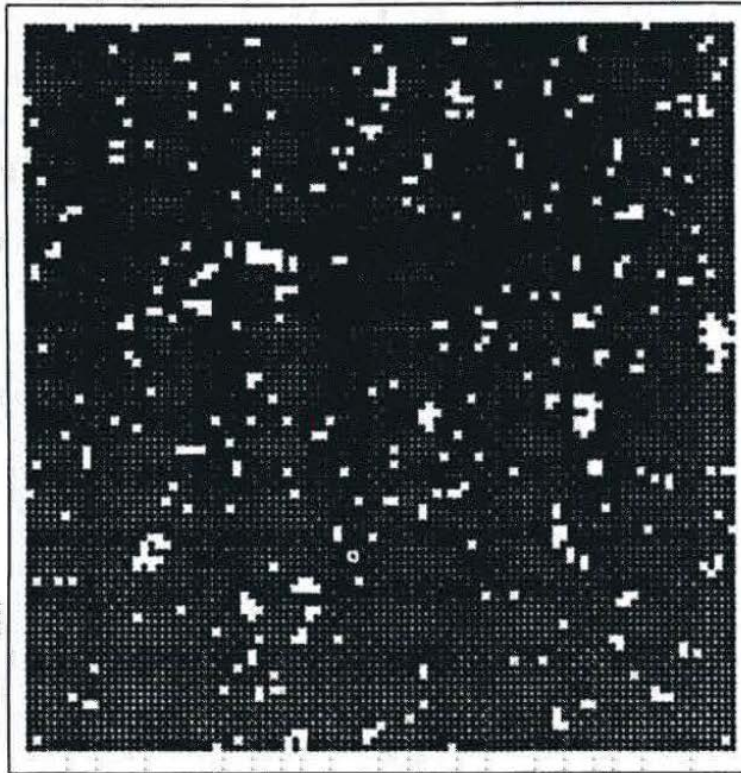
図2・8 スピン配置と温度



# イジングモデル(磁性体のモデル)の計算機シミュレーション

黒: up spin

白: down spin



$T < T_c$  (低温相)

スピンの揃ってエネルギー  $E$  が小

$T > T_c$  (高温相)

スピンの揃いでエントロピー  $S$  が大

$T_c$  = 相転移温度 (臨界温度, キュリー温度)

熱力学(統計力学)の大法則  $E$  = エネルギー、 $T$  = 絶対温度、 $S$  = エントロピーとしたとき

「自由エネルギー最小の原理」  $F = E - TS$

# エネルギーとエントロピー

## 相反する2つの自然法則

**自然法則1:** 自然はエネルギーが低い状態を好む。  
 $E$  が小さい方が良い(負の方が良い)。

**自然法則2:** 絶対零度以外では、自然は乱雑になりたがる。  
この乱雑になりたがる傾向は、絶対温度  $T$  が上がるほど増す。  
**エントロピー  $S$  増大則**

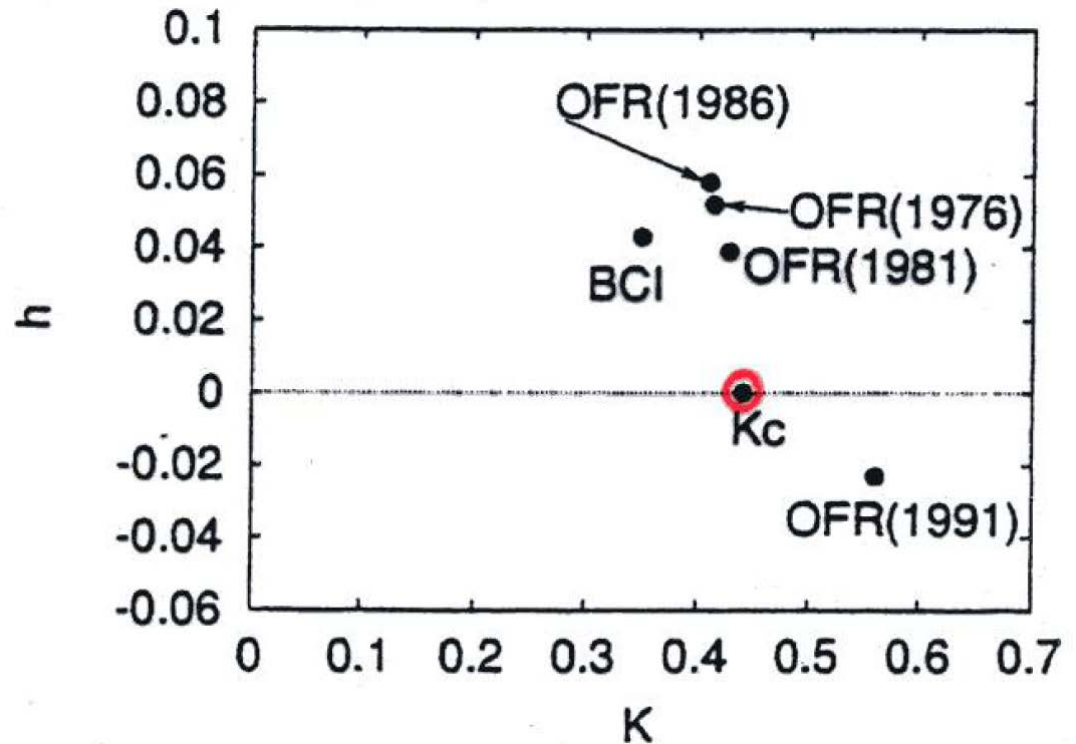
**熱力学(統計力学): 上の2つの法則の統一理論**

自由エネルギー最小の法則

**$F = E - TS$**  ..... これが小さい(負の)方が良い

Table 1: List of the parameters  $K$  and  $h$  which are chosen to satisfy the correlation equalities for BCI in 1983 and for OFR in 1976, 1981, 1986 and 1991.

Data	$K$	$h$
BCI(1983)	0.350	0.043
OFR(1976)	0.414	0.052
OFR(1981)	0.428	0.039
OFR(1986)	0.410	0.058
OFR(1991)	0.559	-0.023



2次元正方格子上的 Ising 模型  
 臨界点  $T_c=2.269 \text{ J/k}$ ,  $H=0$

$$\downarrow$$

$$K = \frac{J}{kT} \rightarrow K_c = \frac{J}{kT_c} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) = 0.4406\dots$$

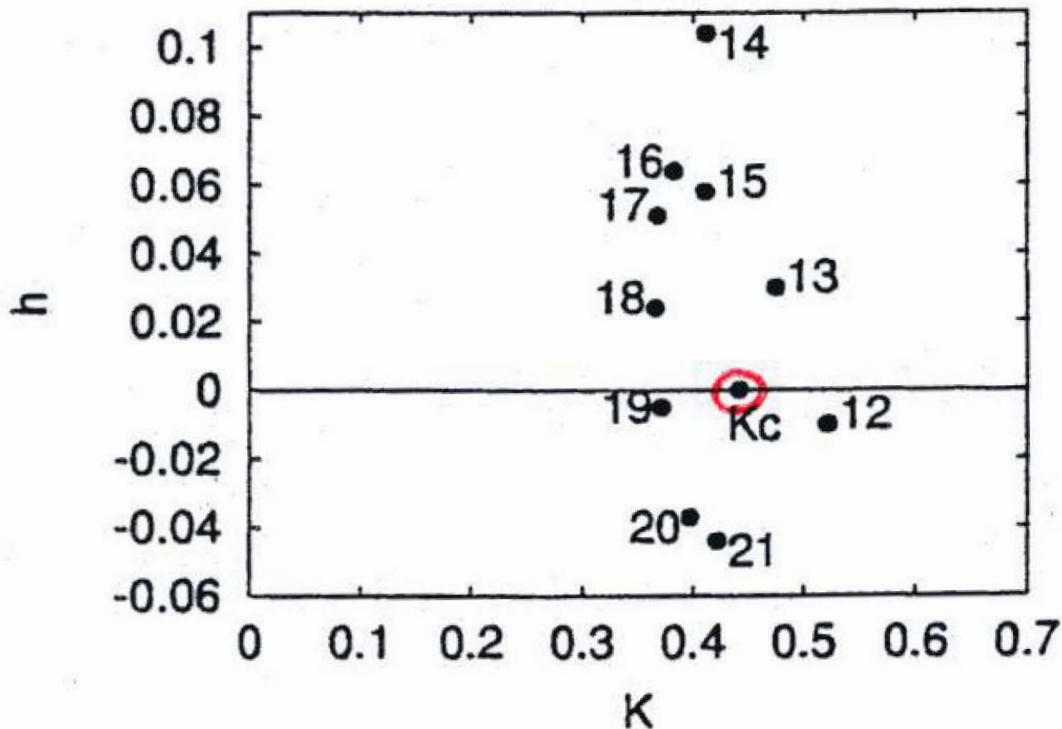
$$h = \frac{\mu_B}{kT} \rightarrow h_c = 0$$

Table 2: List of the parameters  $K$  and  $h$  for OFR in 1986, which are chosen to satisfy the correlation equalities on the configuration of canopy-gap sites for each value of threshold.

Threshold [m]	$K$	$h$
12	0.521	-0.010
13	0.474	0.030
14	0.411	0.104
15	0.410	0.058
16	0.382	0.064
17	0.367	0.051
18	0.365	0.024
19	0.371	-0.005
20	0.397	-0.037
21	0.421	-0.044

林冠ギャップの定義 = 最高樹高 < 15 m  
OFR の場合

この閾値を 12 m ~ 21 の範囲で  
いろいろと変えて比較してみた

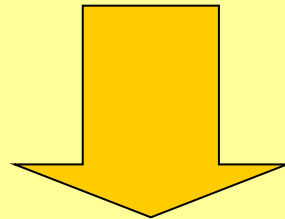


定義の詳細には依らずに  
常に  $(K_c, 0)$  の臨界点の  
近傍であることが分かった



## 新たな疑問

なぜ森林は相転移点（臨界点）  
に近い状態を維持しているのか？



自己組織化臨界現象  
Self-Organized Criticality (SOC)  
の一例

# 自由課題

生態系など環境問題に関連した現象を一つ取り上げ、レポートにせよ。

- インターネットなどを使って写真，データなどを集めてみる。
- 上の現象に対して，簡単なモデルを考案してみる。
- モデルの振る舞いを考察し(出来れば解析して)，現象を説明してみる。

## 例

- ・ 山火事の発生と広がり分布
- ・ (コンピュータ)ウイルスの伝播
- ・ 交通渋滞の規模と分布
- ・ etc. etc.

# もっと詳しく知りたい人には・・・

香取眞理 「複雑系を解く確率モデル」  
(講談社 BLUE BACKS、1997年)  
を眺めてみてください。

もしくは、**質問に来てください。**  
(1号館5階1538室に居ます。)

なお、このスライドの pdf.file が、下の  
中央大学物理学科香取研究室のHPから  
ダウンロードできます。

<http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

ページで [教育] ➡ [大学院]と進んでください。

