

# 環境・生命科学概論 (part 2/2)

かとり まこと  
香取 眞理

物理学科 1号館5F1538

研究分野 統計物理学  
数理物理学  
確率論  
数理生物学  
経済物理学

§ 森林生態系とイジング模型

§ 自己組織化臨界現象と砂山崩しのモデル

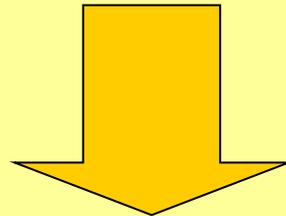
§ 伝染病伝播とパーコレーション問題

# § 自己組織化臨界現象と 砂山崩しのモデル

**Self-Organized Criticality (SOC)  
and Sandpile Models**

## 新たな疑問

なぜ森林は相転移点（臨界点）  
に近い状態を維持しているのか？



自己組織化臨界現象  
Self-Organized Criticality (SOC)  
の一例

# 臨界点でのフラクタル性

$T_c$  = Curie Temperature (キュリー温度)  
ピエール・キュリー(マリー・キュリーの旦那)

ちょうど  $T=T_c$  のときのスピン配置は  
フラクタル的(自己相似性を持つ)になっている。

比較: フラクタル図形の例: Sierpinski の3角形  
次元  $D=\log 3/\log 2=1.58\dots$

# フラクタル図形

(自己相似性＝拡大・縮小しても同じように見える)

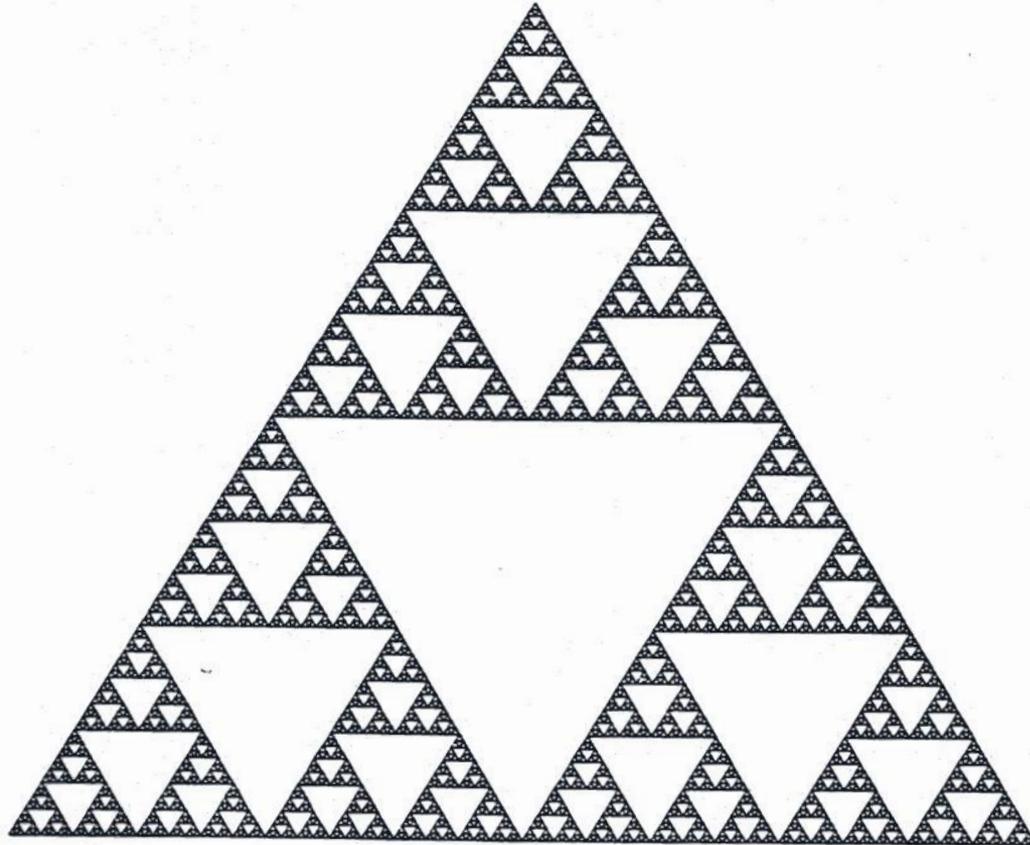
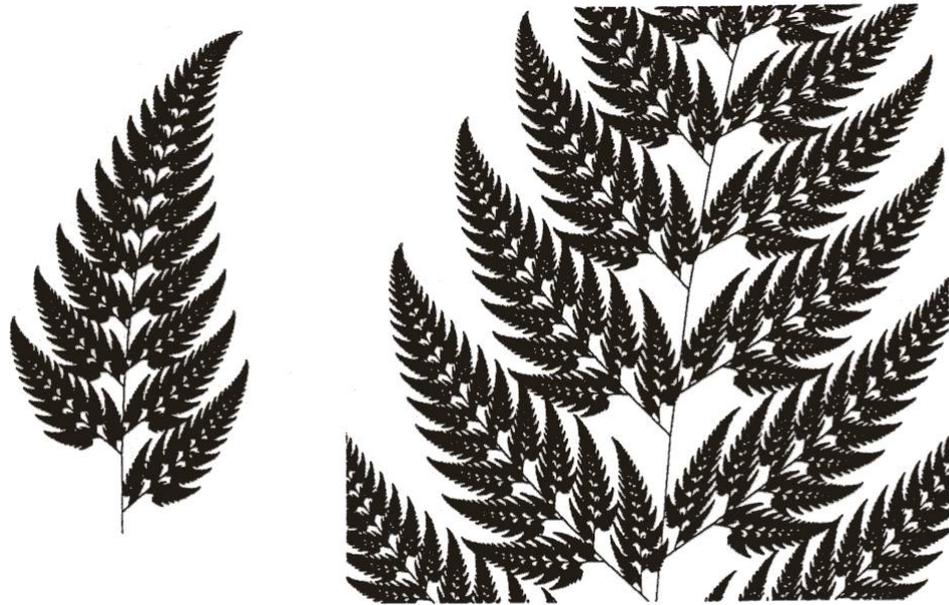
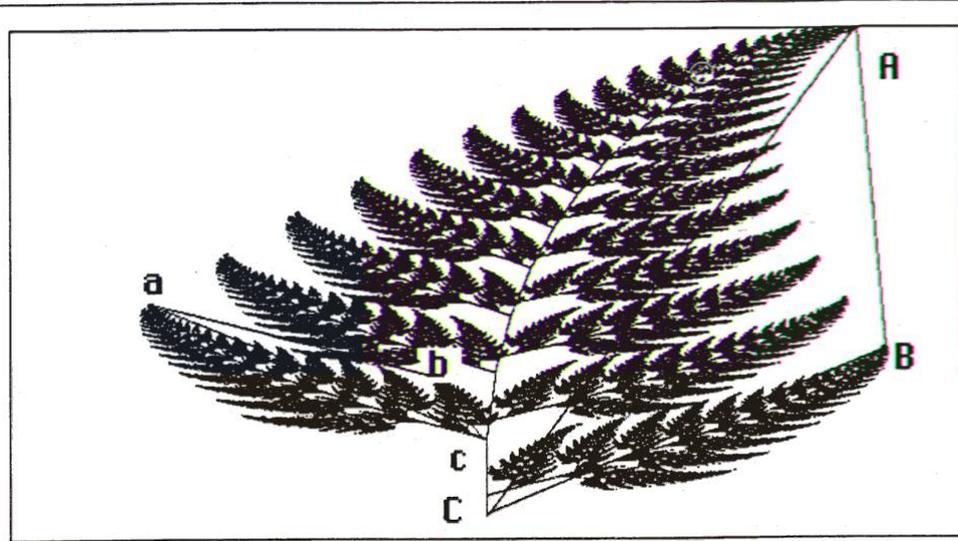


図1・5 シェルピンスキーの三角形



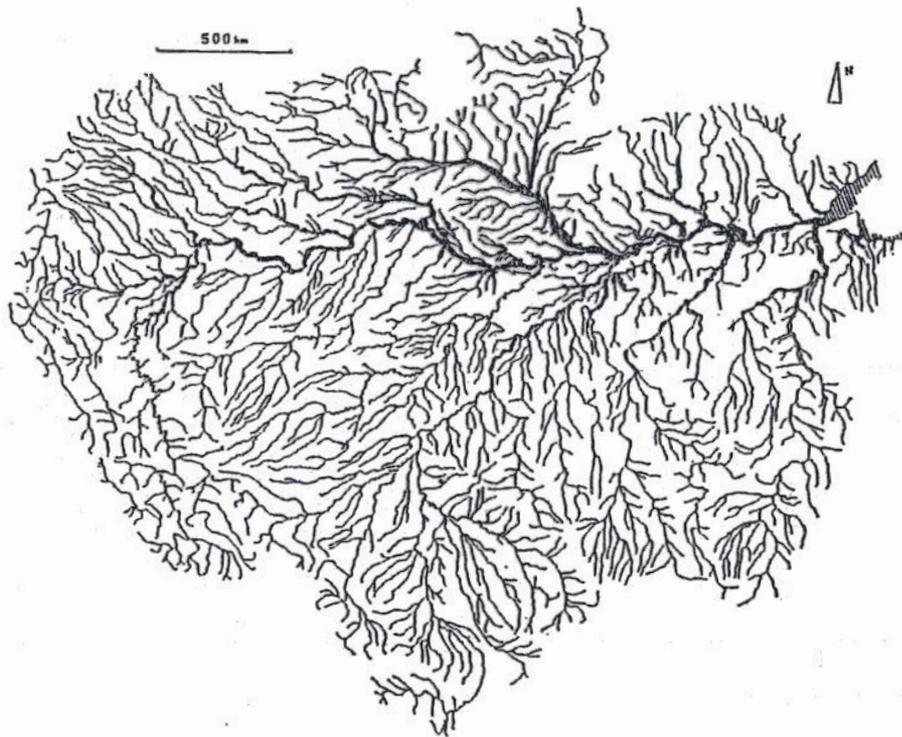


図 9: 自然界に見られるフラクタル図形(アマゾン川の形, [T86] p.34,  
図 2.2)

# Barro Colorado Island (1983)

1999)

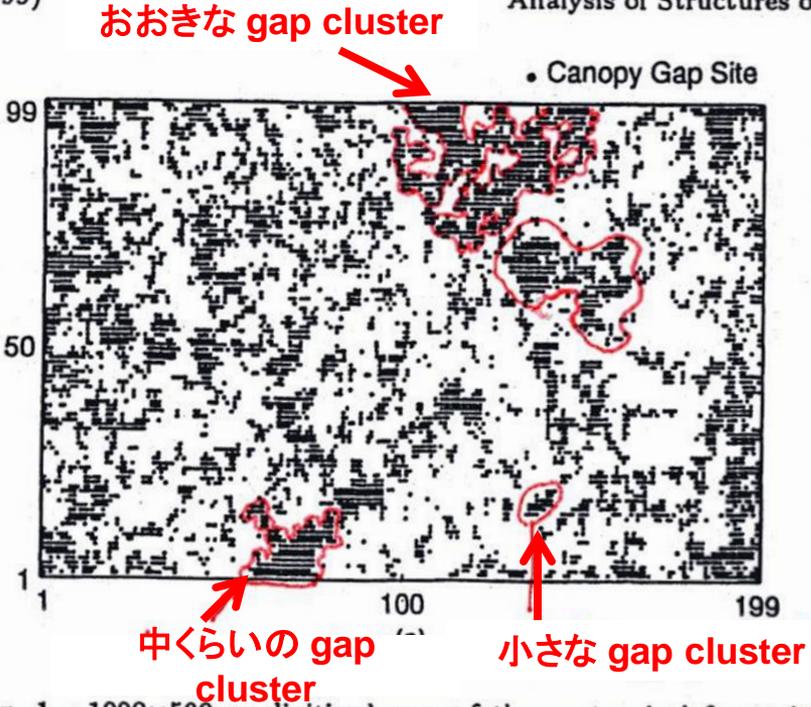


Fig. 1. 1000×500 m digitized map of the neotropical forest in Barro Colorado Island, Panama, in 1983.<sup>2,4)</sup> Gap sites, 5×5 m subplots in which vegetation height is less than 20 m, are plotted by black dots.

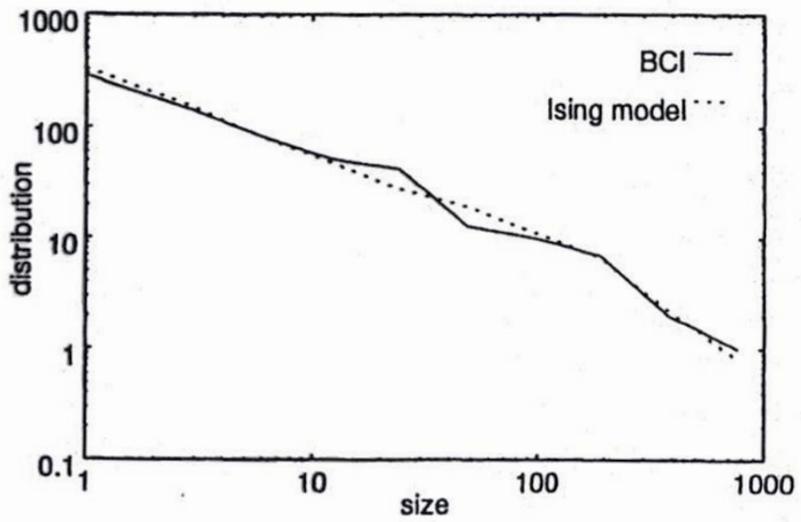


Fig. 2. Log-log plot of the gap-size distribution for BCI and the cluster-size distribution of down spins in the Ising-Gibbs state with  $K = 0.37$  and  $h = 0.016$ .<sup>11)</sup> The size of the gap cluster (down-spin cluster) is determined with Neumann neighborhood. For the Ising-Gibbs state, we performed the Monte Carlo simulations on a  $700 \times 700$  square lattice with the periodic boundary condition and averaged over 10 data, each of which is obtained after discarding 1500 Monte Carlo steps. Clusters contained in a  $199 \times 99$  region on the lattice are counted and the points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

林冠ギャップのかたまり(クラスター、cluster)のサイズ S の分布  
両対数グラフでほぼ一直線

# 自己組織化臨界現象

## Self-Organized Criticality (SOC)

P. Bak の造語 (1987)

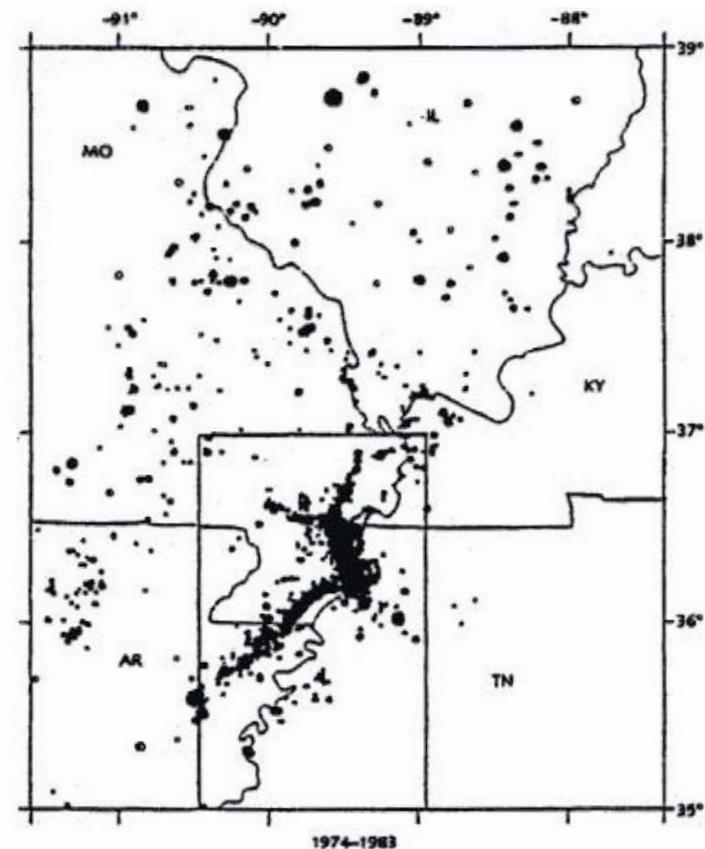
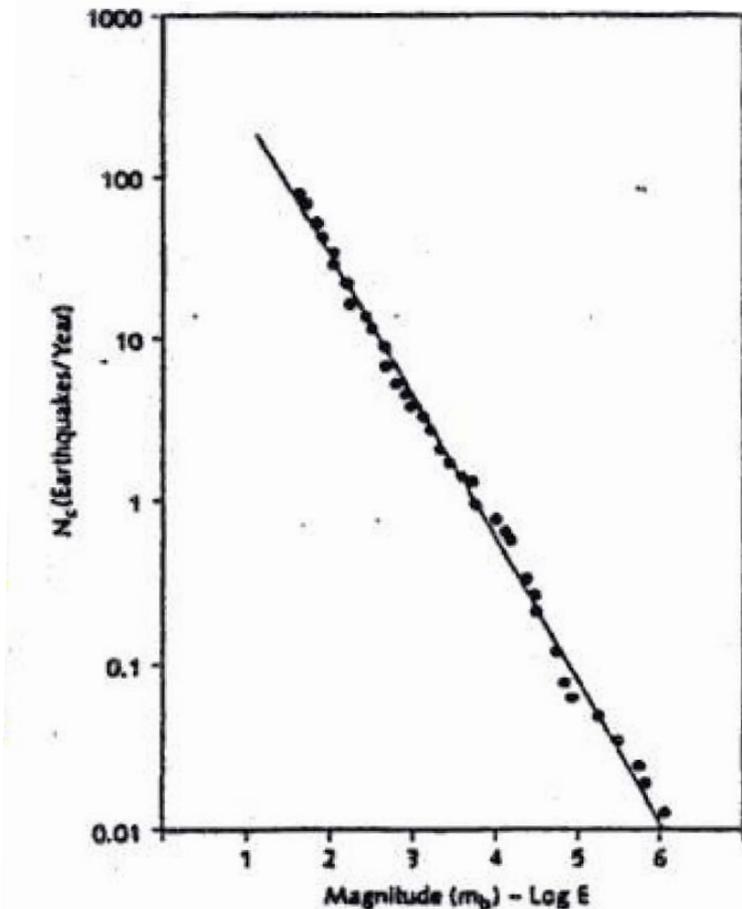
自己組織化 + 臨界現象？

**自己組織化**: 外部からのコントロールを受けることなく, 自発的にシステムがある構造を形成し, 秩序だった状態に発展していくこと.

(例) 受精卵 ⇒ 分割 ⇒ 分化

**相転移に伴う臨界現象**: 2次相転移点 (臨界点) でのみ見られる現象. 温度, 圧力, 磁場などの外部パラメータをある値にチューニングして初めて実現する. よって, 自己組織的とは言えない.

# 実は SOC は自然界に多く見られる.



**地震の Gutenberg-Richter 則** (P. Bak (1997) より)

**左図:** 横軸は地震のマグニチュード  $m$  (地震のエネルギーの  $\log$ ),  
縦軸はマグニチュードが  $m$  以上の地震の1年間の発生頻度の  $\log$ .

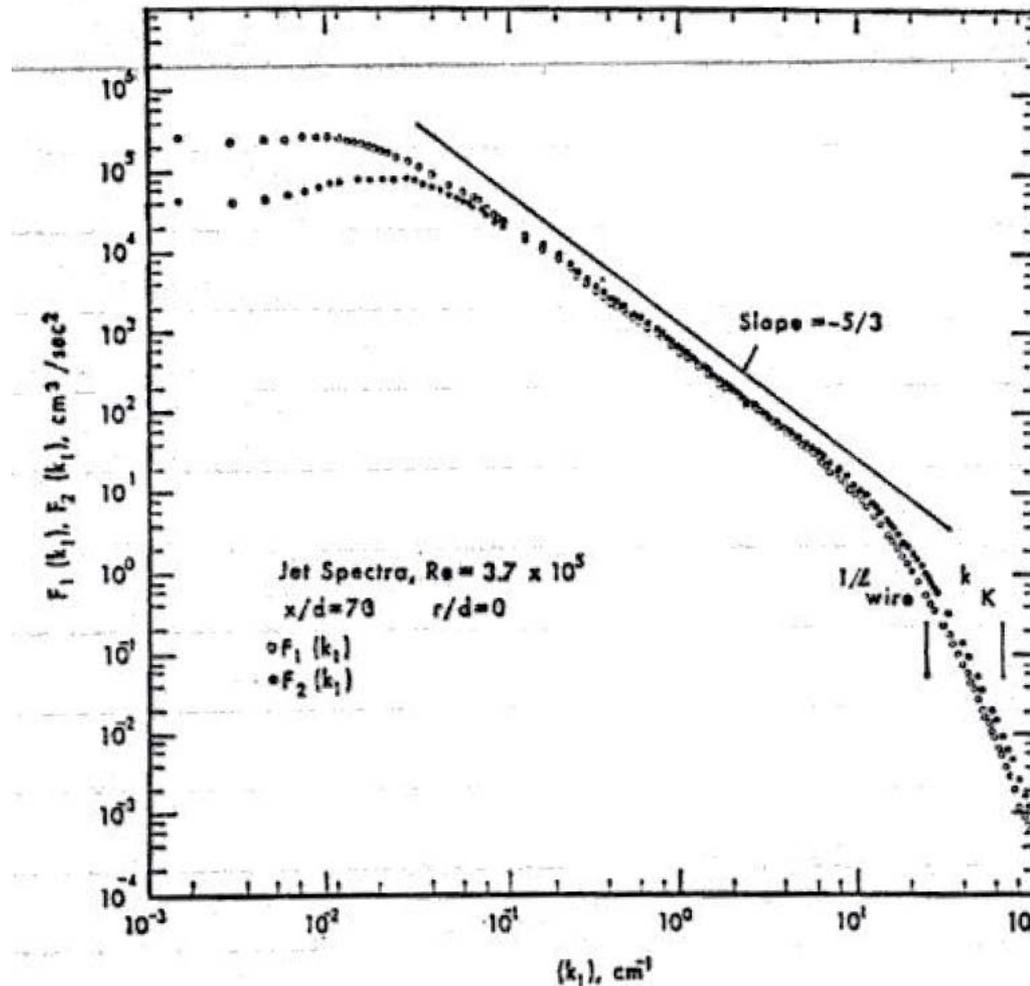
**右図:** 地震発生地点の地図上のプロット(アメリカ, 1974-1983)

# 乱流における Kolmogorov の - 5/3乗則

横軸: 波数の log, 縦軸: エネルギー散逸量の log.

(高安秀樹 (1986) よ

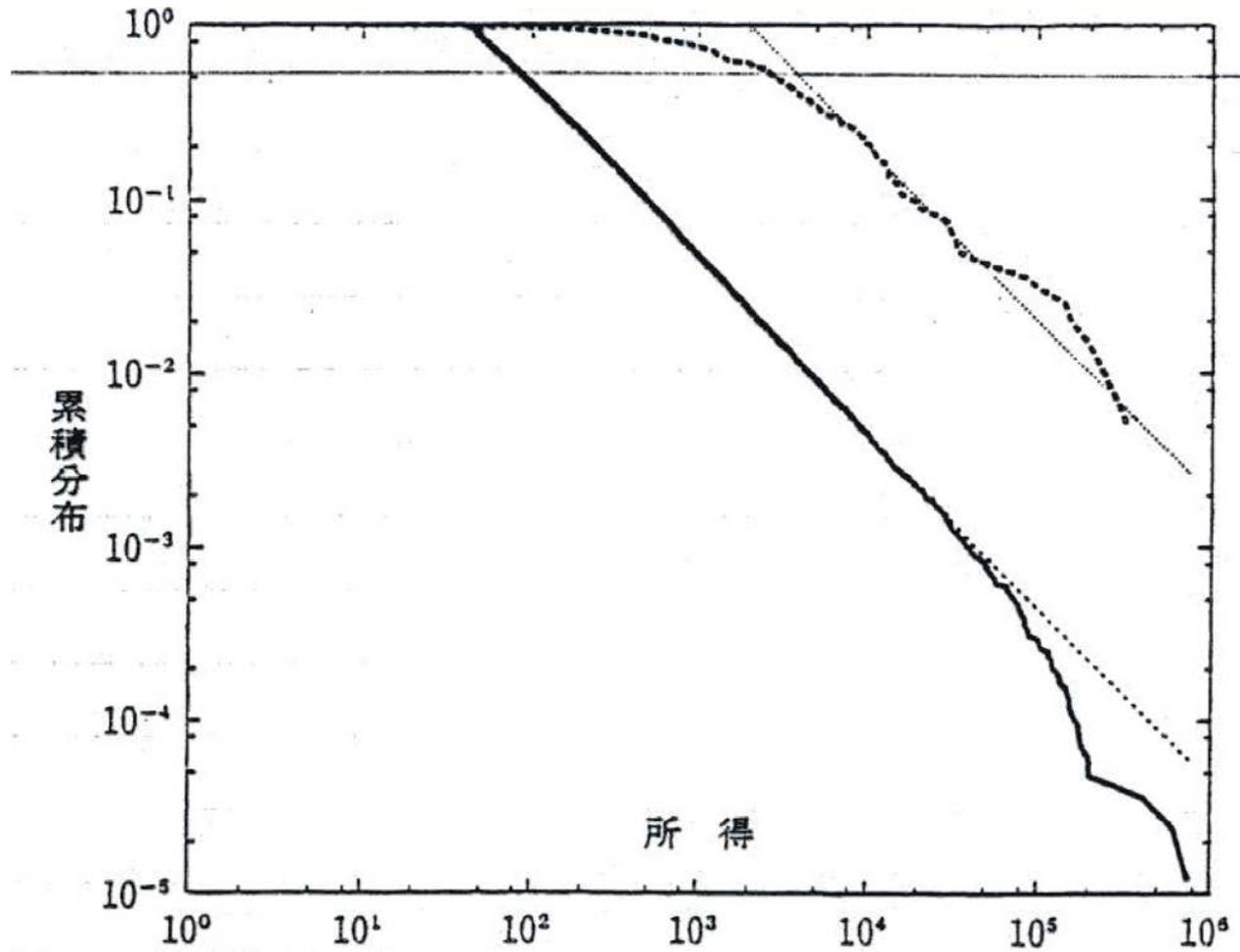
り)

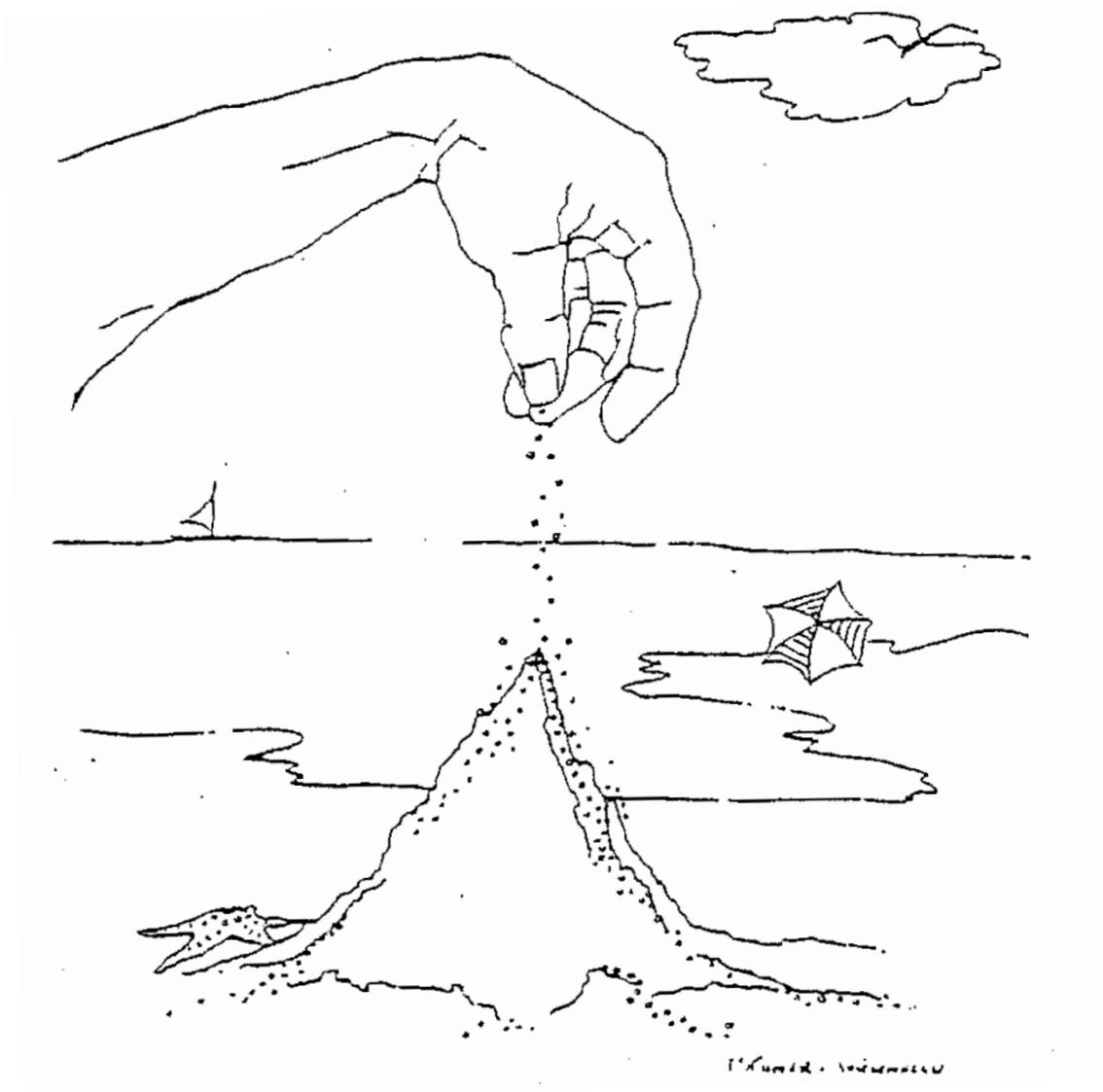


# 企業の所得分布 (1997年度, 実線は日本, 点線はイタリア)

横軸: 所得(金額)のlog, 縦軸: 累積分布のlog.

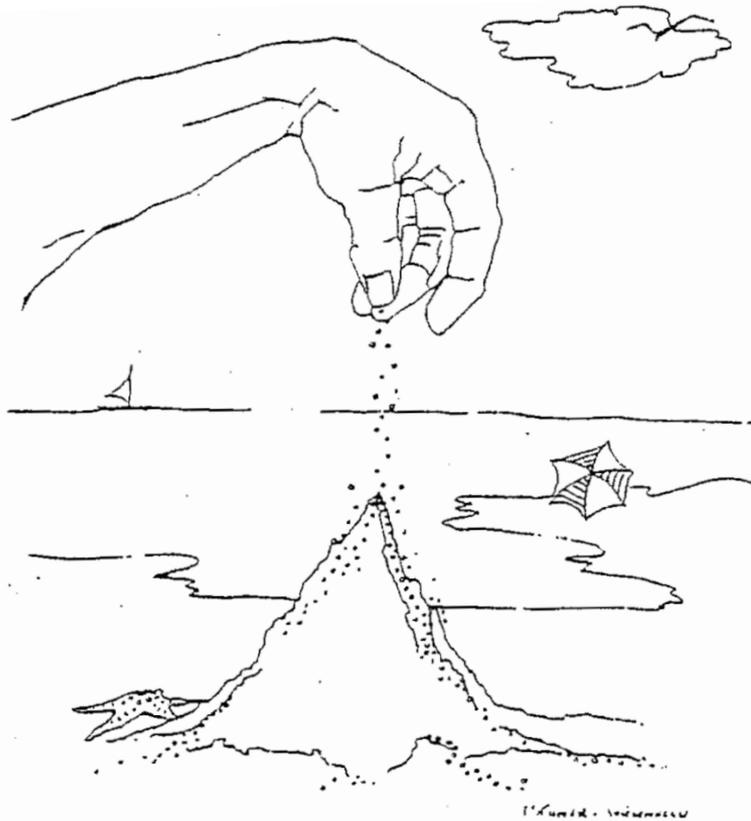
(高安秀樹, 高安美佐子, 2000 より)





砂山遊びの図 (K. Wiesenfeld et al.: J. Stat. Phys. **54**, 1441 (1989) より引用)

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Phys. Rev. Lett. **59**, 381-384 (1987).



安息角＝その角度よりも傾斜がなだらかな間は、砂の堆積により傾斜が大きくなる。しかし、これを超えて傾斜が急になるとなだれ(土砂崩れ)が起こる。

自然と安定な角度へ

⇒ 砂山の形: 相似形

⇒ この形を保つために: なだれの規模は大きく分布する(べき乗則)

キーワード: **なだれ=avalanche**

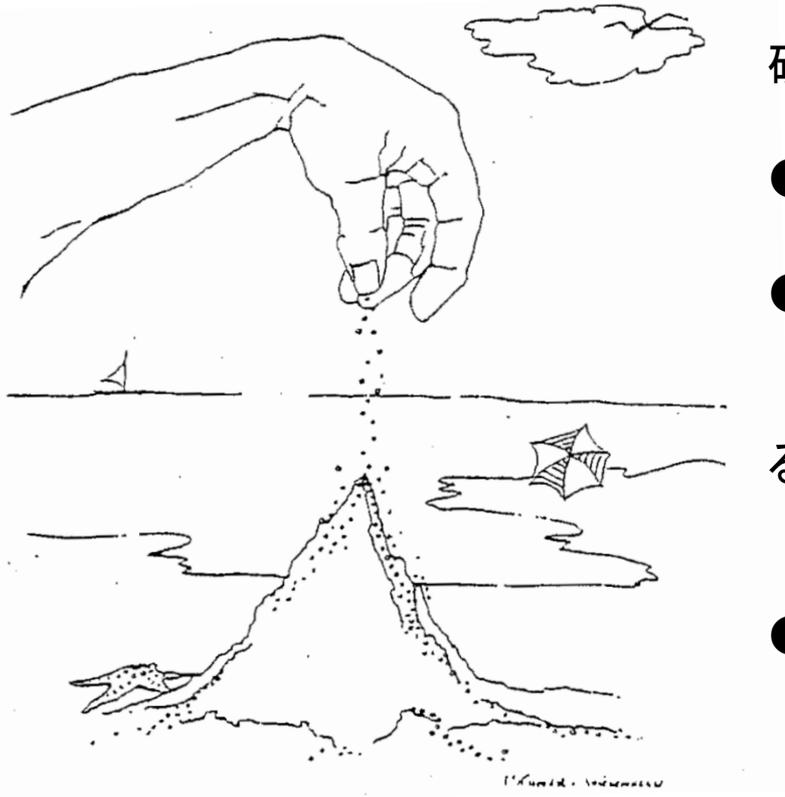
砂山崩しモデル (sandpile model)

=SOCの典型例

◎ **開放系: 散逸構造の一種**

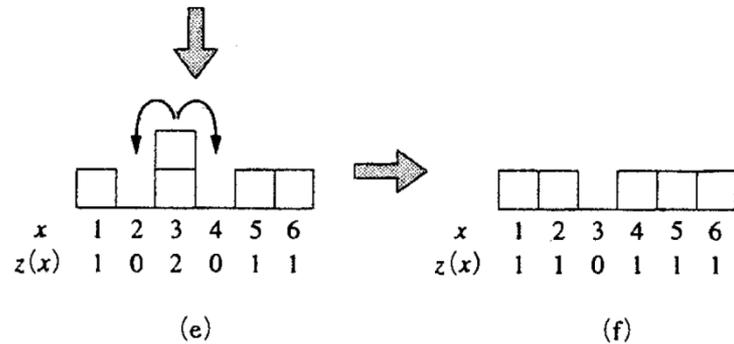
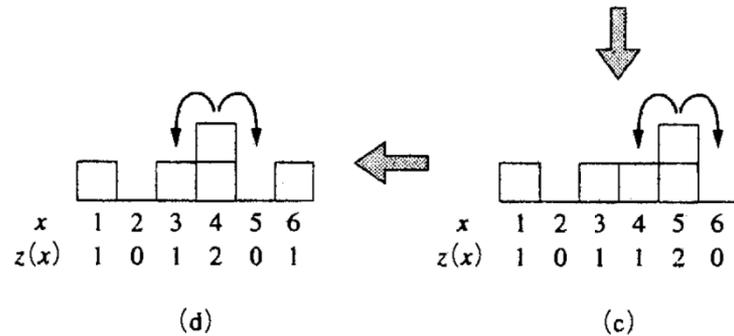
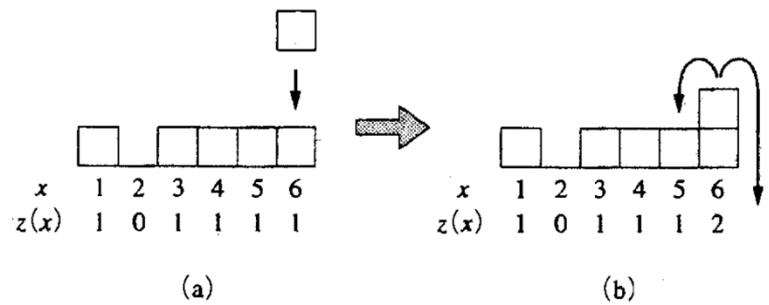
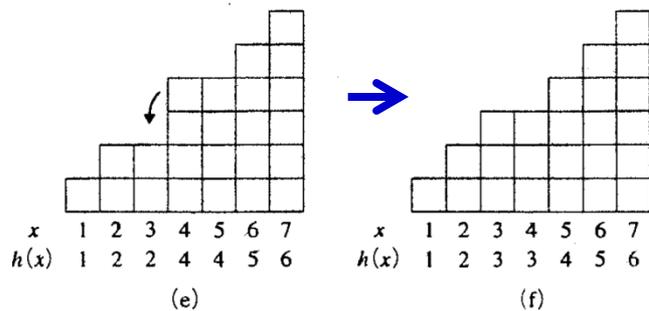
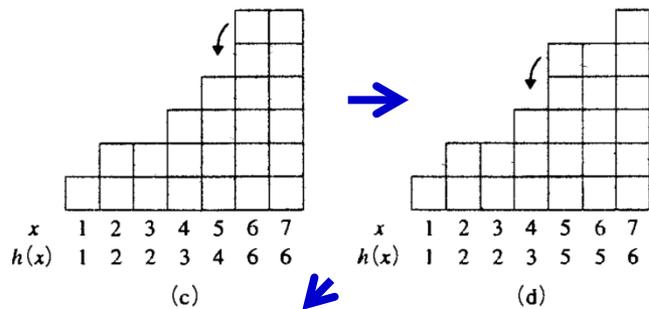
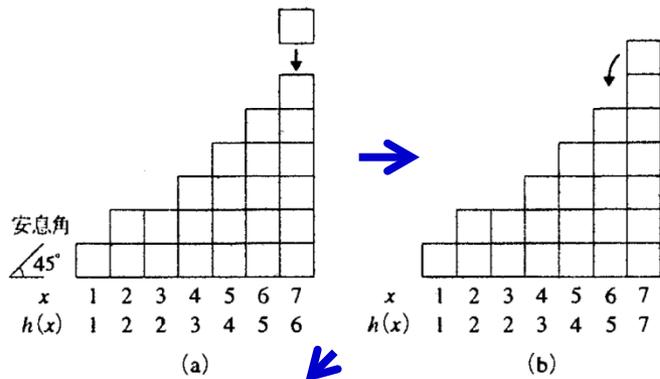
砂山遊びの図 (K. Wiesenfeld et al.: J. Stat. Phys. **54**, 1441 (1989) より引用)

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Phys. Rev. Lett. **59**, 381-384 (1987).



## 砂山崩しのモデル化

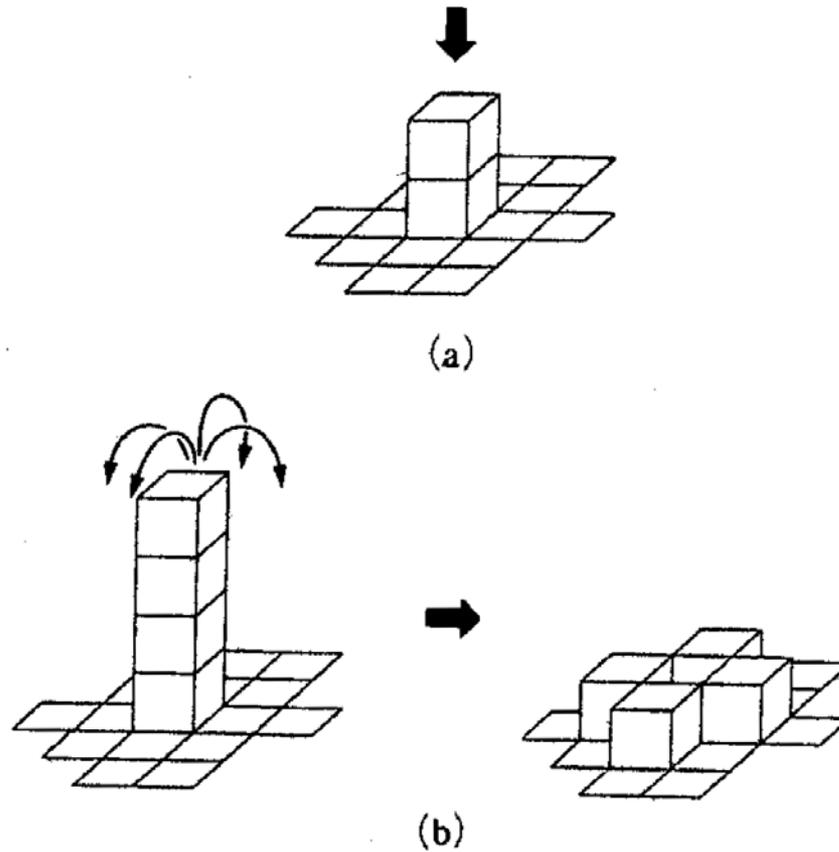
- まず1次元系(断面)を考える.
- **粗視化(coarse graining)**したモデル  
空間 ⇒ 格子  
砂 ⇒ ある量の集まりを1ブロックとする
- 転げ落ちる = **toppling** という



「粗視化」した砂山断面の時間発展：  
 砂塊の1単位を四角で表現。  
 砂塊を加えた結果、安息角を超えると倒壊。  
 倒壊は連鎖的に起こる。  
 この連鎖を「なだれ」とよぶことにする。

左の各格子上の「高さ」の差の時間発展を描いた：  

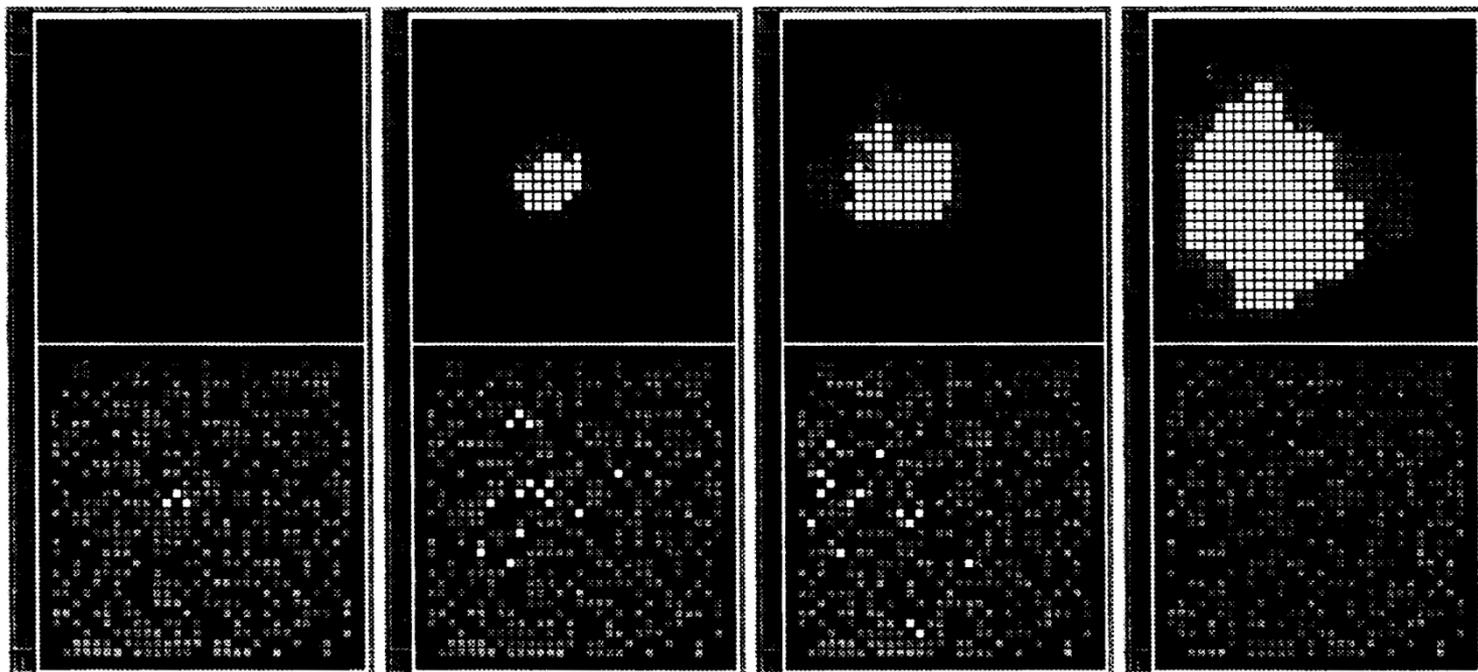
$$z(x) = h(x+1) - h(x)$$
 各格子点上の値が「2単位」になると不安定化して、  
 左右に「1単位」ずつばらける。



## 2次元正方格子上的 Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) 模型の素過程

(a) 格子点に「1単位」を加える。

(b) 格子点上の値が「4単位」になったら不安定化して、  
四方に「1単位」ずつばらける。

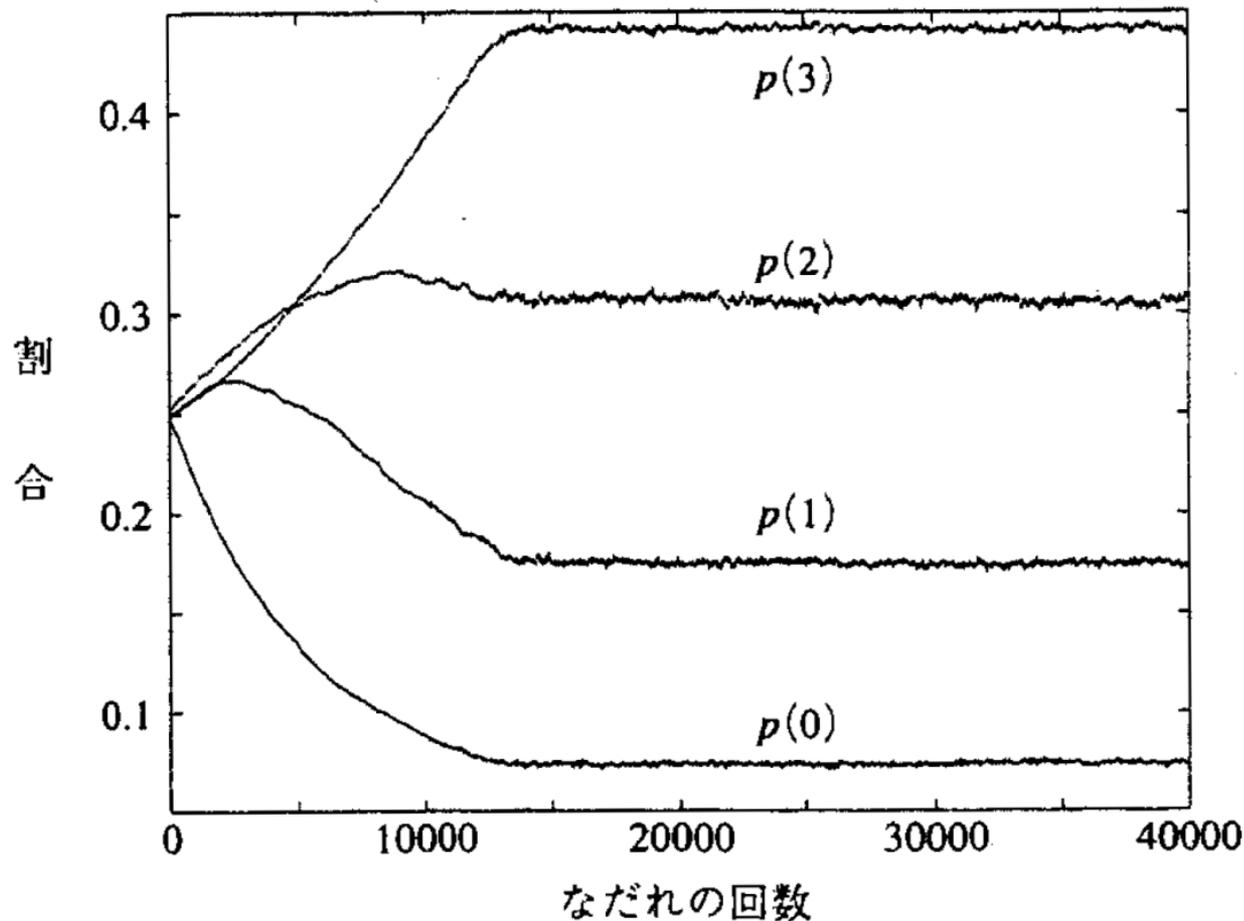


—— 時間 ——→

計算機シミュレーションの図：

[上] なだれの広がる様子

[下] 各格子点上の値の時間発展

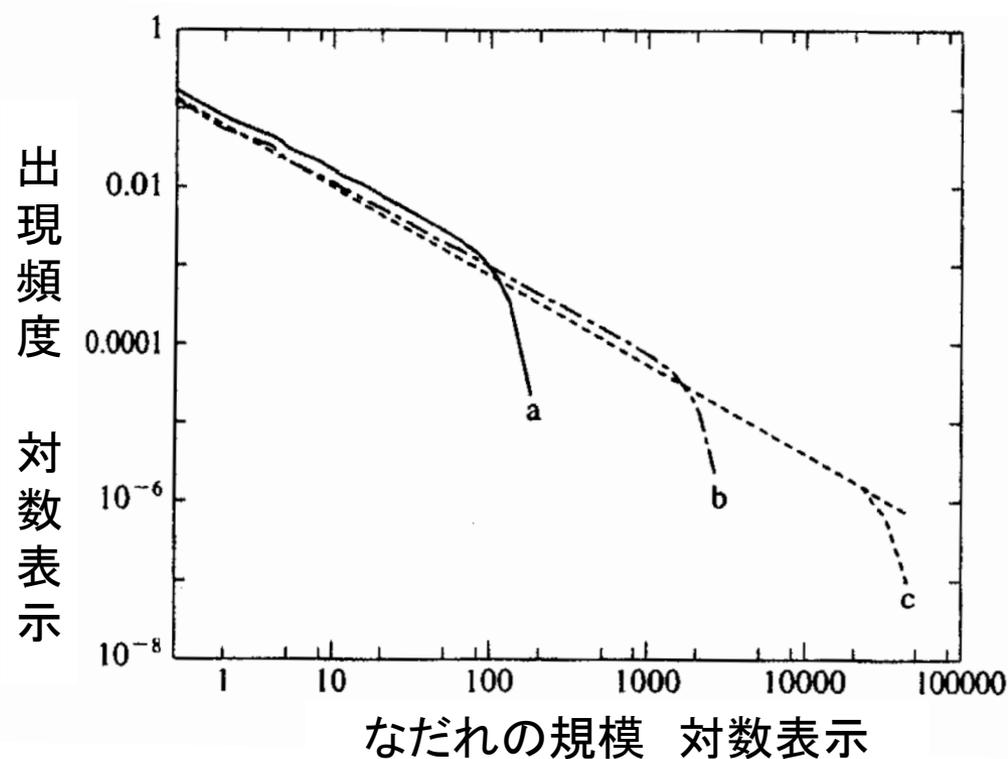


2次元正方格子上的 BTW 模型の各格子点上の安定な値は 0, 1, 2, 3 である.

(4 になると不安定化して倒壊する.)

$p(k)$  は値が  $k$  の格子点数の全対数に対する割合 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

なだれを繰り返すうちに, 定常分布に近づいていく.



定常分布において、ランダムにサイトを選んで「1単位」を加える。

その結果起こるなだれの規模分布を両対数グラフで表した。

正方格子のサイズ  $L$  を大きくする ( $a: L = 16, b: L = 64, c: L = 256$ ) と、直線部分が長くなっていく。つまり、なだれの規模は冪乗分布に従う。

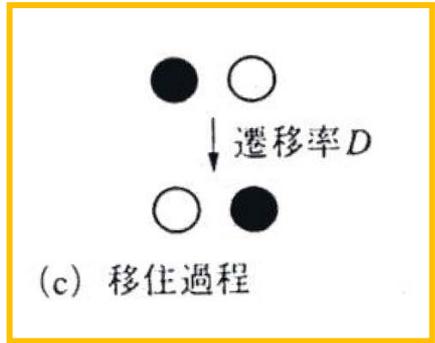
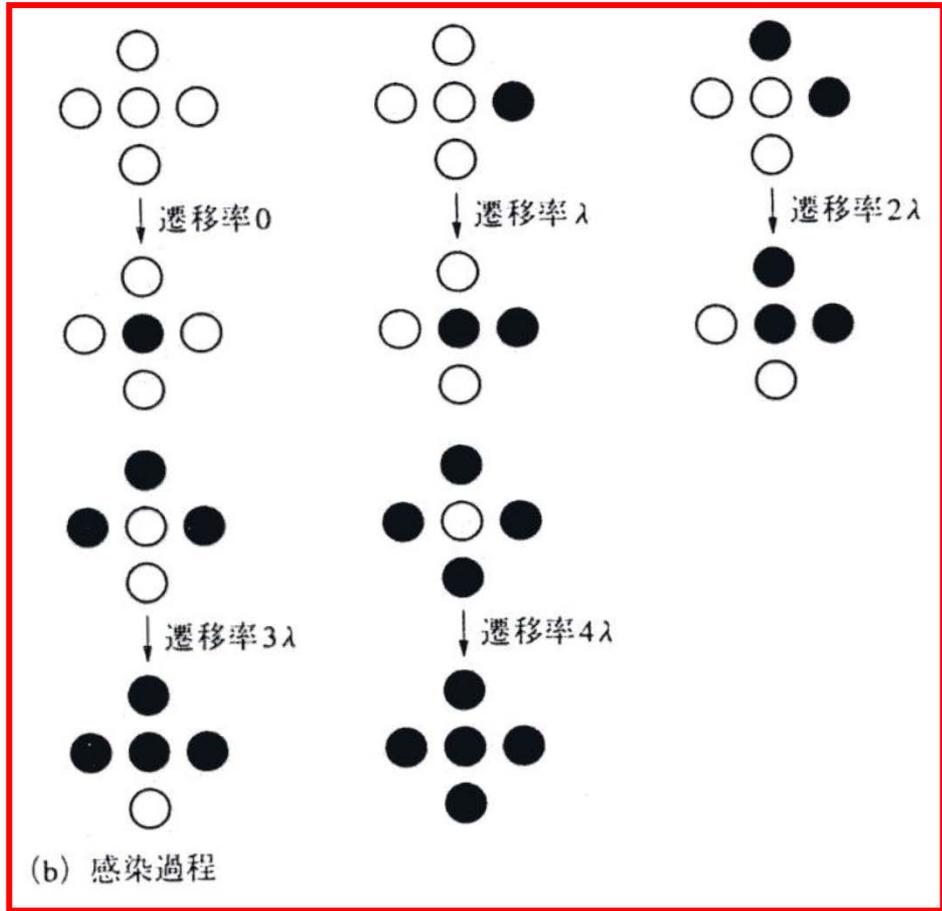
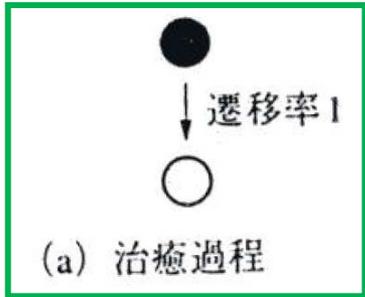
冪乗分布は、定常分布が何か臨界的な状態であることを示唆している。

温度のような外部パラメータを臨界値に合わせることなく、臨界状態になる。

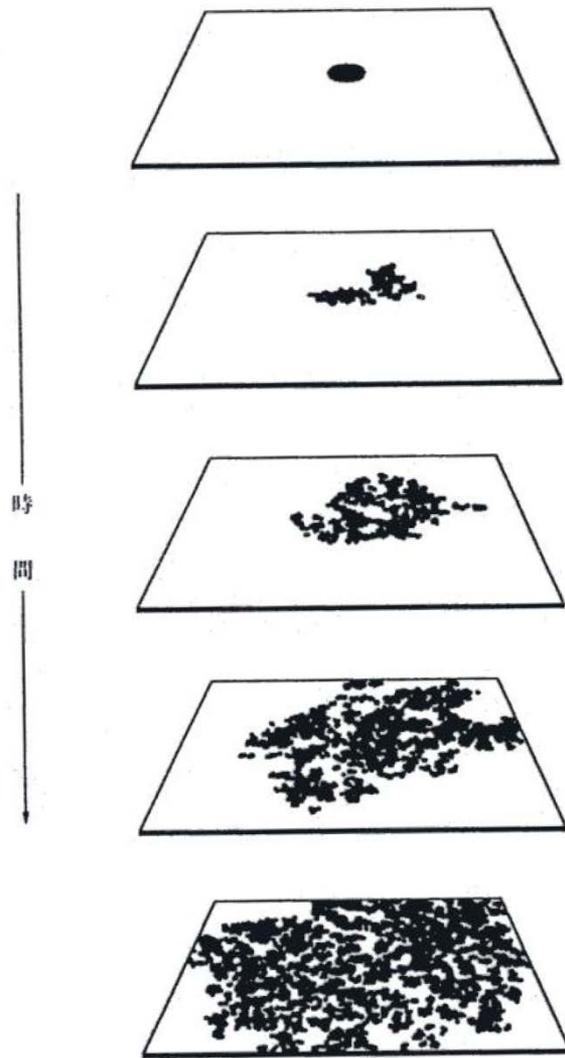
これを Bak らは自己組織化臨界現象 (**Self-Organized Criticality**) とよんだ。

# § 伝染病伝播と パーコレーション問題

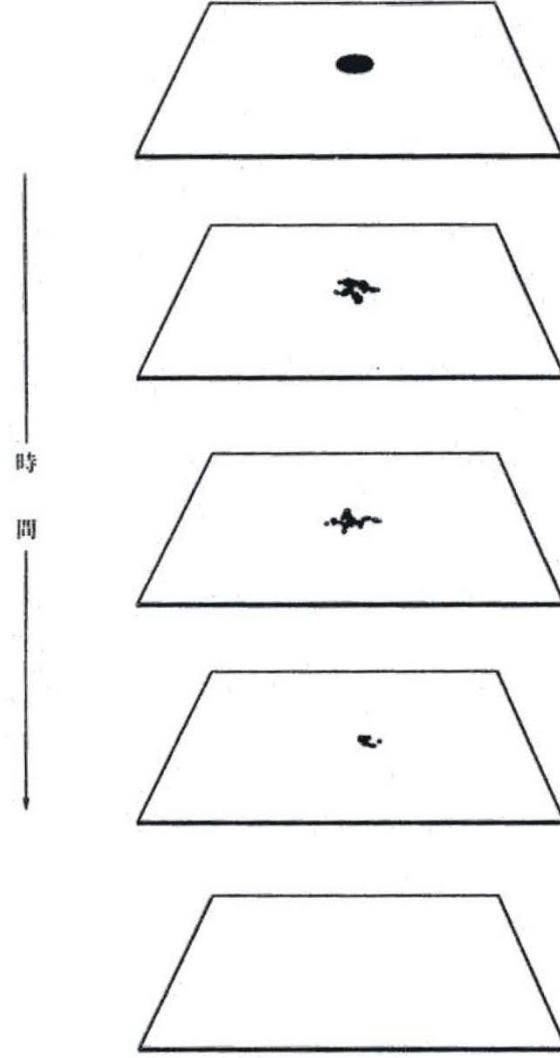
percolation (浸透現象)



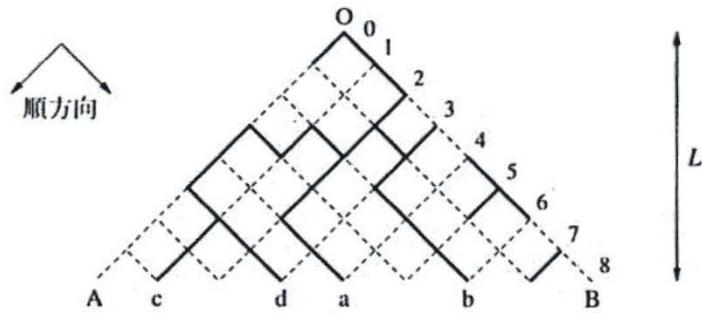
## コンタクト・プロセスの素過程



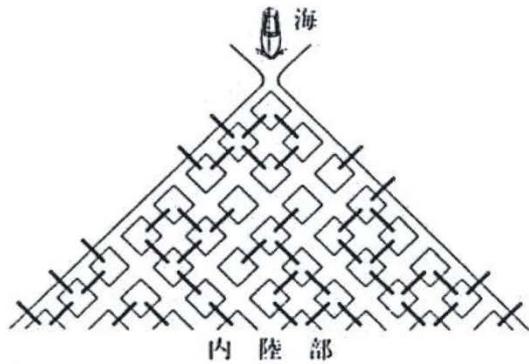
コンタクト・プロセスの時間発展  
 $\lambda > \lambda_c$  の場合 (伝染病蔓延相)



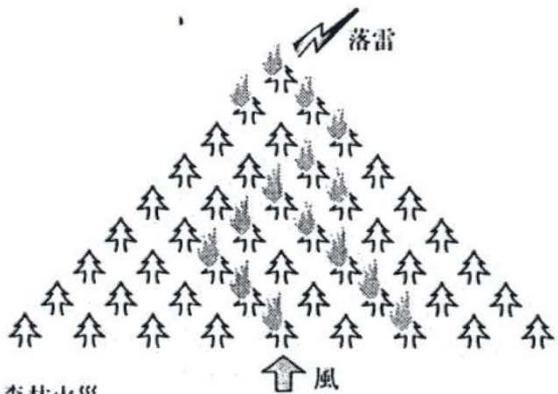
コンタクト・プロセスの時間発展  
 $\lambda < \lambda_c$  の場合 (伝染病撲滅相)



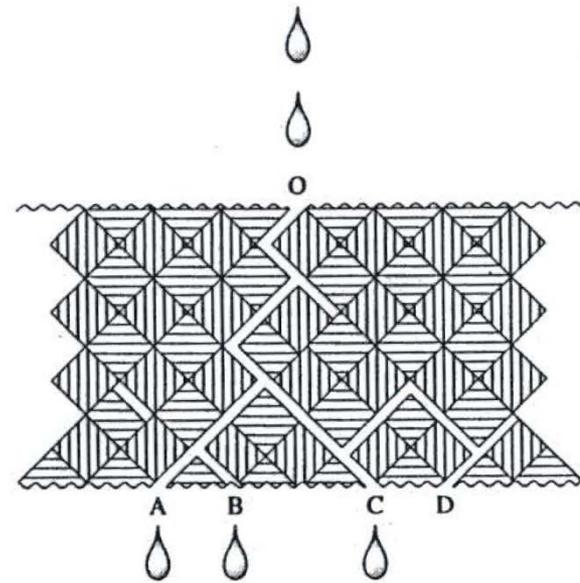
(a) 水の浸透



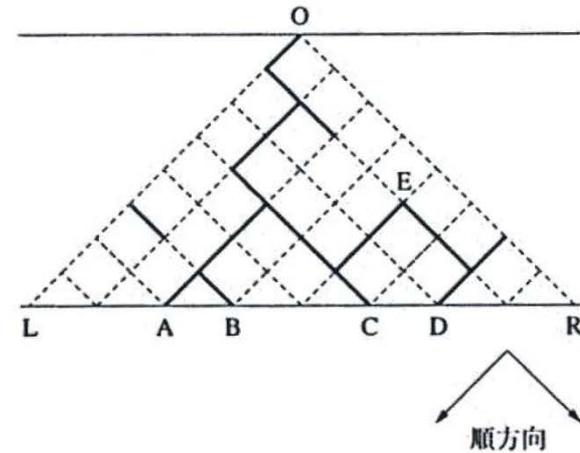
(b) 水路網



(c) 森林火災



(a)



(b)

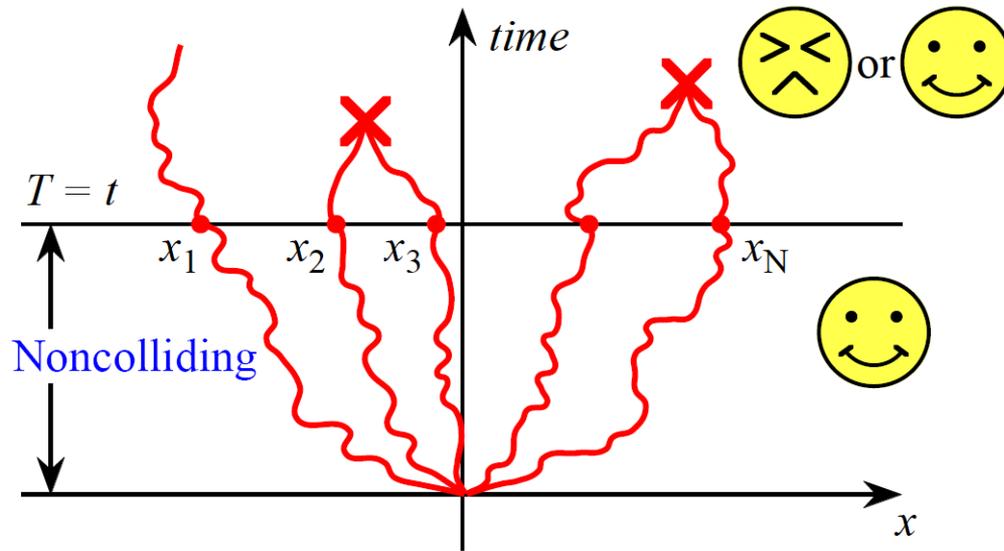
伝染病の伝播 = 時空上のパーコレーション

percolation = 浸透現象

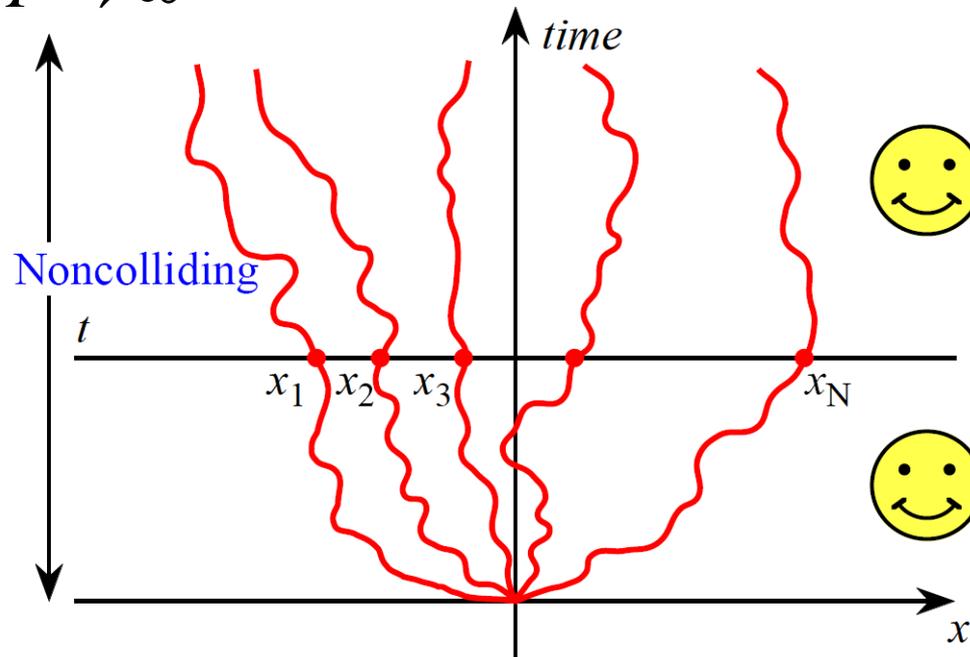
# § 生物の棲み分けのモデル

**Vicious Walker Model  
and  
Random Matrix Theory**

Case  $t = T$



Case  $T \rightarrow \infty$



## 2. HERMITIAN MATRIX-VALUED PROCESS AND DYSON'S BROWNIAN MOTION MODEL

- Let  $B_{ij}(t), \tilde{B}_{ij}(t), 1 \leq i, j \leq N$ , be mutually independent (standard one-dim.) Brownian motions started from the origin. Define

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}(t) & (i < j) \\ B_{ii}(t) & (i = j) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}(t) & (i > j) \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{ij}(t) & (i < j) \\ 0 & (i = j) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{ij}(t) & (i > j) \end{cases}$$

- Consider the  $N \times N$  **Hermitian Matrix-Valued** stochastic process

$$\Xi(t) = \left( \xi_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \left( s_{ij}(t) + \sqrt{-1} a_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

That is,

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) + \sqrt{-1} a_{12}(t) & s_{13}(t) + \sqrt{-1} a_{13}(t) & \dots & s_{1N}(t) + \sqrt{-1} a_{1N}(t) \\ s_{12}(t) - \sqrt{-1} a_{12}(t) & s_{22}(t) & s_{23}(t) + \sqrt{-1} a_{23}(t) & \dots & s_{2N}(t) + \sqrt{-1} a_{2N}(t) \\ s_{13}(t) - \sqrt{-1} a_{13}(t) & s_{23}(t) - \sqrt{-1} a_{23}(t) & s_{33}(t) & \dots & s_{3N}(t) + \sqrt{-1} a_{3N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1N}(t) - \sqrt{-1} a_{1N}(t) & s_{2N}(t) - \sqrt{-1} a_{2N}(t) & s_{3N}(t) - \sqrt{-1} a_{3N}(t) & \dots & s_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

- Consider the variation of the matrix,  $d\Xi(t) = (d\xi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$

It is clear that

$$\langle d\xi_{ij}(t) \rangle = 0 \quad (1 \leq i, j \leq N)$$

And by the previous observation, we find that

$$\langle (d\xi_{ij}(t))^2 \rangle = 0 \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

$$\langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{ji}(t) \rangle = \langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{ij}(t)^* \rangle = dt \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

$$\langle (d\xi_{ii}(t))^2 \rangle = dt \quad (1 \leq i \leq N)$$

They are summarized as

$$\langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{kn}(t) \rangle = \delta_{in}\delta_{jk}dt \quad (1 \leq i, j, k, n \leq N)$$

- Since  $\Xi(t)$  is a Hermitian matrix-valued process, at each time  $t$  there is a **Unitary Matrix**  $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ , such that

$$U(t)^+ \Xi(t)U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)\}$$

where the **eigenvalues** are in the **increasing order**

$$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t), \quad \forall t \in [0, \infty)$$

- We can regard

$$\lambda(t) \equiv (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)) \in \mathbf{R}^N$$

as an  **$N$ -particle stochastic process in one dimension.**

[Previous Story](#) / [Next Story](#) / [Volume 26 archive](#)

[Phys. Rev. Lett. 105, 190601](#)

(issue of 5 November 2010)

[Title and Authors](#)

**12 November 2010**

## How Animals Avoid Each Other

A foraging spider monkey appears to follow a specific kind of "random walk" that optimizes its chances for finding food. Now theoretical work in the 5 November *Physical Review Letters* explores how this type of motion may help these monkeys, as well as other animals, avoid unfriendly encounters with competitors or predators. The theory predicts how long it would take for different foraging animals to meet up, but the formalism could also help in understanding the dynamics of physical systems such as chemical reactions in turbulent environments.

The standard example of a random walk is a drunk man stumbling away from the bar in random directions for each step.



National Geographic/Punchstock

**Going separate ways.** New calculations could help uncover whether spider monkeys have adapted a foraging pattern that avoids run-ins with other monkeys. The theory could also apply to molecules diffusing in turbulent fluids or search strategies in large databases.

## References:

- [1] N. E. Humphries *et al.*, "Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators," [Nature \(London\) 465, 1066 \(2010\)](#).
- [2] F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra, and G. M. Viswanathan, "Optimizing the Encounter Rate in Biological Interactions: Lévy versus Brownian Strategies," [Phys. Rev. Lett. 88, 097901 \(2002\)](#).
- [3] J. Cardy and M. Katori, "Families of Vicious Walkers," [J. Phys. A 36, 609 \(2003\)](#).

## Related Information:

- educational review: N. Chakravarti, "Beyond Brownian Motion: A Levy Flight in Magic Boots," [Resonance 9, 50 \(2004\)](#)
- M. West, "[Rollicking Pollock Debate](#)" (*Plus* magazine, 2004) on Jackson Pollock paintings and Lévy flights

# 自由課題

生態系など環境問題に関連した現象を一つ取り上げ、レポートにせよ。

- インターネットなどを使って写真，データなどを集めてみる。
- 上の現象に対して，簡単なモデルを考案してみる。
- モデルの振る舞いを考察し(出来れば解析して)，現象を説明してみる。

## 例

- ・ 山火事の発生と広がり分布
- ・ (コンピュータ)ウイルスの伝播
- ・ 交通渋滞の規模と分布
- ・ etc. etc.

# もっと詳しく知りたい人には・・・

香取眞理 「複雑系を解く確率モデル」  
(講談社 BLUE BACKS、1997年)  
を眺めてみてください。

もしくは、**質問に来てください。**  
(1号館5階1538室に居ます。)

なお、このスライドの pdf.file が、下の  
中央大学物理学科香取研究室のHPから  
ダウンロードできます。

<http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

ページで [教育] ➡ [大学院]と進んでください。

