

確率的 Loewner 発展 (SLE) 入門*

香取眞理 (中央大学理工学部物理学科)[†]

15 November 2010 (version 3b)

概要

2次元格子上の統計力学模型やフラクタル曲線の連続極限を統一的に記述することが予想されている確率的 Loewner 発展 (SLE) について, 入門的な解説を行う.

目次

1	Loewner 鎖	1
1.1	Riemann の写像定理と複素 Brown 運動	1
1.2	半平面容量, Schwarz 微分, \mathbb{H} -excursion	4
1.3	単純曲線 γ に対応する共形変換 g_t	8
1.4	Loewner の微分方程式	12
1.5	Loewner 鎖の逆変換 $f_t = g_t^{-1}$ と跡 γ	14
1.6	跡 γ が連続曲線であるための条件	19
2	確率的 Loewner 発展 (SLE)	23
2.1	SLE と SLE の跡	23
2.2	負時刻への拡張と逆変換 $f_t = g_t^{-1}$	24
2.3	SLE flow	25
2.4	時間変更	27
2.5	後進 Loewner 方程式	28
2.6	Rohde-Schramm の局所マルチンゲール	29
3	SLE の基本的な性質	32
3.1	SLE 曲線の存在	32
3.2	SLE 曲線のフラクタル次元	33
4	SLE 曲線の 3 つの相	38
4.1	Bessel 過程との対応関係	38
4.2	SLE の 3 つの相	39

*東工大大学院数学専攻での集中講義における講義ノート (2010 年 12 月 6-10 日).

[†]電子メール: katori@phys.chuo-u.ac.jp

5	局所性と制限性	40
5.1	局所性 ($\kappa = 6$)	40
5.2	制限性 ($\kappa = 8/3$)	44
A	付録	46
A.1	Poisson 核の計算について	46
A.2	Bessel 過程と Bessel flow の次元性	49
A.3	$\Phi_{t,B}(z)$, $\Phi'_{t,B}(z)$ および $(\Phi'_{t,B}(U_t))^b$ の確率微分方程式の導出	57

1 Loewner 鎖

1.1 Riemann の写像定理と複素 Brown 運動

\mathbb{C} の開部分集合で、連結しているものを領域とよぶ。 $\hat{\mathbb{C}}$ を Riemann 球 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする。 \mathbb{C} の部分集合 A に対して、その $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結部分集合を成しているとき、 A は単連結であるということにする (この定義から、単連結な集合 A が \mathbb{C} 上の連結していない複数の集合から成っている場合もある。ただし、領域は連結集合であるものとしたので、単連結領域 D と言ったときには、 D は連結集合である。) \mathbb{C} 上の原点を中心とする単位円を $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す。

一般に、領域 $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ から領域 $D' \subset \hat{\mathbb{C}}$ への写像 f が D 上の正則関数で与えられ、 $D \rightarrow D'$ が全単射であるとき、 $f: D \rightarrow D'$ を共形変換 (共形写像) という。この定義から、 $\forall z \in D$ で $f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} \neq 0$ であり、逆写像 $f^{-1}: D' \rightarrow D$ もまた共形変換であることになる。

定理 1.1 (Riemann の写像定理) D が \mathbb{C} 全体ではない単連結領域であるとする。この D 内の 1 点 $z_0 \in D$ を選ぶ。このとき、 D を単位円 \mathbb{D} に写す共形変換で

$$f(z_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(z_0) > 0 \tag{1.1}$$

であるものが存在し、それは一意的に定まる。

証明は [1] Chapter 6 を参照せよ。

複素上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ と書く。 \mathbb{H} の有界部分集合 A において、 $A = \mathbb{H} \cap \bar{A}$ であり、かつ $\mathbb{H} \setminus A$ が単連結であるとき、 A をコンパクト \mathbb{H} -hull という。

$\mathcal{Q} = \mathbb{H}$ -hull 全体の集合

と書くことにする。 $A \in \mathcal{Q}$ 自体は連結していない複数の集合から成っていてもよい。ただし、 $\bar{A} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である。

$A \in \mathcal{Q}$ が与えられているものとする。 $\mathbb{H} \setminus A$ は \mathbb{C} 全体ではない単連結領域なので、Riemann の写像定理 (定理 1.1) より

$$f_A^{(1)}: \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}, \quad \text{共形変換}$$

が存在することが保証される．1 次分数関数で表される共形変換を，特に Möbius 変換とよぶ．その特別なものとして

$$f^{(2)}(z) = \frac{\bar{\alpha}z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \quad (1.2)$$

を考えることにすると，これは

$$f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \text{共形変換}$$

である ($f^{(2)}(0) = \alpha$ である)．この 2 つを合成した $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f_A^{(1)} \equiv f^{(2)}(f_A^{(1)}(\cdot))$ は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}, \quad \text{共形変換}$$

である．

$\mathbb{H} \setminus A$ の境界は， A の境界の一部 $\partial\bar{A} \cap \mathbb{R}^c$ と実軸の一部 $\mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ ，および無限遠点 ∞ とから成る． $f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$ によって， $\partial\bar{A} \cap \mathbb{R}^c$ と $\mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ は単位円周 $\partial\mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上に写される． ∞ もまた， $f_A^{(1)}$ により $\partial\mathbb{D}$ 上のいずれかの点に写される．他方， $f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ によって， $\partial\mathbb{D}$ は \mathbb{H} の境界，すなわち \mathbb{R} および ∞ に写される．(1.2) で与えられる $f^{(2)}$ では，特に $z = \beta$ という $\partial\mathbb{D}$ 上の点が ∞ に写される．よって $f^{(2)}$ の径数 β を調節することにより， $f_A^{(3)}$ として ∞ を ∞ に写すものが得られる． ∞ 以外の $\mathbb{H} \setminus A$ の境界である $\partial\bar{A} \cap \mathbb{R}^c$ と $\mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ は，ともに $f_A^{(3)}$ によって \mathbb{R} に写されることになる．

$f_A^{(3)}$ は元来は $\mathbb{H} \setminus A$ 上で定義した関数であるが，上の考察により， $\mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ に拡張される． $f_A^{(3)}$ は $\mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ 上では実関数である．つまり， $z \in \mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ のときには $f_A^{(3)}(\bar{z}) = f_A^{(3)}(z)$ が成り立つ．したがって，次の Schwarz の鏡像原理によって下半平面に解析接続することができる．

補題 1.2 (Schwarz の鏡像原理) \mathbb{H} 内の領域 D において f が正則であるとする．この領域 D の実軸に対する鏡像を \tilde{D} とすると，領域 \tilde{D} において関数 $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ は正則である．

$1/f_A^{(3)}(1/z)$ を考えると，これは原点 0 を原点 0 に写す正則関数であるから，原点 0 の周りで次のように Taylor 展開できる．

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots$$

という展開が得られる．上述のように， $z \in \mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ に対して $f_A^{(3)}(z) \in \mathbb{R} \cap \bar{A}^c$ であることから， $a_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ，かつ， $b_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, 0, -1, \dots\}$ である．

次に， $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ の Möbius 変換で ∞ を ∞ に写すものを考えることにする．これは

$$f^{(4)}(z) = d_1z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in \mathbb{R}$$

で与えられる．これと $f_A^{(3)}$ との合成を考えると

$$\begin{aligned} [f^{(4)} \circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1 b_1 z + (d_1 b_0 + d_0) + \frac{d_1 b_{-1}}{z} + \frac{d_1 b_{-2}}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

となるが，特に $d_1 b_1 = 1, d_1 b_0 + d_0 = 0 \iff d_1 = 1/b_1, d_0 = -b_0/b_1$ と係数 d_0, d_1 を選ぶことにする．こうして定められた共形変換を

$$g_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$$

と書くことにする．これは条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [g_A(z) - z] = 0 \quad (1.3)$$

を満たし，

$$g_A(z) = z + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \quad c_j \in \mathbb{R}, j \in \{-1, -2, \dots\}, \quad (1.4)$$

と展開できるものである．(1.3) は流体力学的条件とよばれるが，これは (1.4) の展開の初項 z の係数が 1 であり，かつ， z に依らない定数項はないという条件である．

条件 (1.3) より $z - g_A(z)$ は $\mathbb{H} \setminus A$ 上有界な正則関数であるから，その実部と虚部はそれぞれ $\mathbb{H} \setminus A$ 上有界な調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_A(z) = \text{Im}(z - g_A(z)) \quad (1.5)$$

を考えることにする．

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と書く． $B_t^{(j)}, j = 1, 2$ を 2 つの独立な 1 次元標準 Brown 運動とする．このとき，標準複素 Brown 運動は

$$B_t = B_t^{(1)} + i B_t^{(2)} \quad (1.6)$$

で定義される．いま，領域 D に対して，この内点 $z \in D$ からスタートした複素 Brown 運動に対して $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : B_t \in D^c\}$ とする．一般に， $B_0 = z$ という初期条件の下での複素 Brown 運動の確率分布を $\mathbf{P}^z[\cdot]$ と書き，また期待値を $\mathbf{E}^z[\cdot]$ と書くことにする．

次の命題が知られている（例えば，文献 [5] では Proposition 2.10 として与えられている．）

命題 1.3 領域 D の境界に対して，有界で連続な関数 $F : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているものとする．このとき， D の中では調和的であり， ∂D 上では F に一致するような $\bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ の関数 u が一意的に定まり， D 内の各点 $z \in D$ に対する値は

$$u(z) = \mathbf{E}^z[F(B_{\tau_D})] \quad (1.7)$$

で与えられる．

この命題を $D = \mathbb{H} \setminus A$ に対して適用する． $z \in \mathbb{H} \setminus A$ に対して $\tau_{\mathbb{H} \setminus A}$ を τ と略記すると，

$$\tau = \tau_{\mathbb{H} \setminus A} = \inf\{t \geq 0 : B_t \in A \cup \mathbb{R}\} \quad (1.8)$$

である．つまりこれは ($t = 0$ で $z \in \mathbb{H} \setminus A$ をスタートした) 複素 Brown 運動がコンパクト \mathbb{H} -hull A か実軸 \mathbb{R} のいずれかにはじめて到達する時刻である．(1.5) で与えた調和関数は，命題 1.3 より

$$\phi_A(z) = \mathbf{E}^z[\phi_A(B_\tau)]$$

と書くことができることになる．(1.5) をこの式の右辺に代入すると

$$\phi_A(z) = \mathbf{E}^z[\operatorname{Im}(B_\tau)] - \mathbf{E}^z[\operatorname{Im}(g_A(B_\tau))] = \mathbf{E}^z[\operatorname{Im}(B_\tau)] \quad (1.9)$$

となる．ただしここで， τ の定義より B_τ は $\mathbb{H} \setminus A$ の (∞ 以外の) 境界上の点であり，これは共形変換 g_A で \mathbb{R} 上に写されるので，その虚部 $\operatorname{Im}(g_A(B_\tau)) = 0$ であることを用いた．(1.9) を (1.5) と等値することにより，

$$\operatorname{Im}(g_A(z)) = \operatorname{Im}(z) - \mathbf{E}^z[\operatorname{Im}(B_\tau)], \quad z \in \mathbb{H} \setminus A \quad (1.10)$$

という表式が得られる．

1.2 半平面容量, Schwarz 微分, \mathbb{H} -excursion

(1.10) で特に $z = iy, y > 0$ とおくと， $\operatorname{Im}(iy) = y$ なので

$$\operatorname{Im}(g_A(iy)) = y - \mathbf{E}^{iy}[\operatorname{Im}(B_\tau)]$$

となる．ここで (1.4) の展開式を用いると

$$(\text{LHS}) = \operatorname{Im} \left(iy + \frac{c_{-1}}{iy} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right) = y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^2} \right)$$

なので

$$y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^2} \right) = y - \mathbf{E}^{iy}[\operatorname{Im}(B_\tau)].$$

したがって

$$c_{-1} = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbf{E}^{iy}[\operatorname{Im}(B_\tau)]$$

が得られる．以下ではこの量を $A \in \mathcal{Q}$ に対する半平面容量 (half-plane capacity) とよび， $\operatorname{hcap}(A)$ と表すことにする：

$$\operatorname{hcap}(A) \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbf{E}^{iy}[\operatorname{Im}(B_{\tau_{\mathbb{H} \setminus A}})], \quad A \in \mathcal{Q}. \quad (1.11)$$

この定義より， $A \in \mathcal{Q}$ に対して

$$g_A(z) = z + \frac{\operatorname{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{|z|^2} \right), \quad z \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

となる．

半平面容量に関して，2つの補題を証明しておくことにする．以下では， \mathbb{C} 上の集合 $S = \{z : z \in S\}$ に対して，

$$\begin{aligned} \text{拡大・縮小} & : r > 0 \text{ に対して} & rS &= \{rz : z \in S\} \\ \text{平行移動} & : u \in \mathbb{C} \text{ に対して} & S + u &= \{z + u : z \in S\} \end{aligned}$$

と書くことにする．

補題 1.4 $r > 0, x \in \mathbb{R}$ とすると， $A \in \mathcal{Q}$ に対して次が成り立つ．

$$\text{hcap}(rA) = r^2 \text{hcap}(A), \quad (1.13)$$

$$\text{hcap}(A + x) = \text{hcap}(A). \quad (1.14)$$

証明. 共形変換 g_A の定義より，

$$g_{rA}(z) = r g_A(z/r), \quad (1.15)$$

$$g_{A+x}(z) = g_A(z - x) + x \quad (1.16)$$

が成り立つことは明らかである．展開 (1.12) を用いると

$$(1.15) \text{ の左辺} = z + \frac{\text{hcap}(rA)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり，

$$\begin{aligned} (1.15) \text{ の右辺} &= r \left\{ \frac{z}{r} + \frac{\text{hcap}(A)}{z/r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z/r|^2}\right) \right\} \\ &= z + \frac{r^2 \text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

なので，両辺の $1/z$ の係数を比較すると (1.13) が得られる．同様に

$$(1.16) \text{ の左辺} = z + \frac{\text{hcap}(A + z)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり，また

$$\begin{aligned} (1.16) \text{ の右辺} &= (z - x) + \frac{\text{hcap}(A)}{z - x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z - x|^2}\right) + x \\ &= z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

なので，(1.14) が得られる．■

いま $A, B \in \mathcal{Q}$ であり

$$A \subset B$$

とする．共形変換 g_A によって $\mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ となるが， $A \subset B$ なので $g_A(B \setminus A) \in \mathcal{Q}$ である．さらに

$$\mathbb{H} \setminus g_A(B \setminus A) \rightarrow \mathbb{H}$$

と写像する共形変換が $g_{g_A(B \setminus A)}$ ということになる．以上より

$$g_B = g_{g_A(B \setminus A)} \circ g_A, \quad A, B \in \mathcal{Q}, \quad A \subset B \quad (1.17)$$

という関係が成り立つことになる．このとき，次が成り立つ．

補題 1.5 $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$ とする．このとき

$$\text{hcap}(B) = \text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A)) \quad (1.18)$$

が成り立つ．

証明. 展開式 (1.12) より

$$\begin{aligned} g_A(z) &= z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \\ g_{g_A(B \setminus A)}(z) &= z + \frac{\text{hcap}(g_A(B \setminus A))}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & [g_{g_A(B \setminus A)} \circ g_A](z) = g_{g_A(B \setminus A)}(g_A(z)) \\ &= g_{g_A(B \setminus A)}\left(z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \\ &= \left\{z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right\} + \frac{\text{hcap}(g_A(B \setminus A))}{z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \\ &= z + \frac{1}{z}(\text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A))) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

となるが，(1.17) よりこれが

$$g_B(z) = z + \frac{\text{hcap}(B)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

と等しくなければならない．これより (1.18) が導かれる．■

$x_0 \in \mathbb{R}$ に対して， Ω を \mathbb{H} 内の x_0 の開近傍とする． Ω を \mathbb{H} の中に写す共形変換で， x_0 を含む実軸上のある区間 $[x_0 - r, x_0 + r]$, $\exists r > 0$ を実軸 \mathbb{R} 上に写す共形変換を φ とする．この共形変換 φ の x_0 における微係数を $\varphi'(x_0)$ と書くことにすると，補題 1.4 から次が導かれる．

補題 1.6 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たすように $\delta > 0$ をとることができる: もしも $A \in \mathcal{Q}$ が x_0 の δ -近傍 $\{z \in \mathbb{H} : |z - x_0| < \delta\}$ に含まれているならば,

$$|\text{hcap}(\varphi(A)) - \varphi'(x_0)^2 \text{hcap}(A)| \leq \varepsilon |\text{hcap}(A)| \quad (1.19)$$

が成り立つ.

\mathbb{C}^3 級連続関数 $f(z), z \in \mathbb{C}$ に対して, Schwarz 微分を次式で定義する:

$$Sf(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (1.20)$$

次が成り立つ.

補題 1.7 $D \subset \mathbb{C}$ を, 原点 0 の ε -近傍を含む単連結領域とする. $f : D \rightarrow \mathbb{H}$ を $f(0) = 0, f'(0) = 1$ である共形変換とする. 負符号をつけた反転写像を $\varpi(z) = -1/z$ とし ($\varpi^{-1}(z) = \varpi(z)$ である), $A = \varpi(\mathbb{H} \setminus D)$ とおくと,

$$Sf(0) = -6 \text{hcap}(A) \leq 0 \quad (1.21)$$

である.

証明. 合成写像 $\phi \equiv \varpi^{-1} \circ f \circ \varpi$, すなわち

$$\phi(z) = \varpi^{-1}(f(\varpi(z))) = \varpi^{-1}(f(-1/z)) = -\frac{1}{f(-1/z)} \quad (1.22)$$

は, $\mathbb{H} \setminus A$ を \mathbb{H} に写す共形変換を与える. 与条件より

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{f(-1/z)} \right) = \infty, \\ \phi'(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \phi'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f'(-1/z)}{(f(-1/z))^2} \frac{1}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} f' \left(-\frac{1}{z} \right) \left\{ \frac{f(-1/z) - f(0)}{-1/z - 0} \right\}^{-2} = \frac{f'(0)}{(f'(0))^2} = 1 \end{aligned}$$

であるから, この共形変換は流体力学的条件 (1.3) を満たす. よってこれは, (1.12) のように展開できる共形変換 g_A にある実数 $x \in \mathbb{R}$ を加えたものである:

$$\phi(z) = x + g_A(z), \quad \exists x \in \mathbb{R}.$$

よって, (1.22) より

$$f(z) = -\frac{1}{\phi(-1/z)} = -\frac{1}{x + g_A(-1/z)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

となる. 分母を $g_A(w) = w + \text{hcap}(A)/w + \mathcal{O}(|w|^{-2}), w \rightarrow \infty$ に従って展開して整理すると

$$\begin{aligned} f(z) &= -\left\{ x - \frac{1}{z} - \text{hcap}(A)z + \mathcal{O}(z^2) \right\}^{-1} \\ &= z + xz^2 + \{x^2 - \text{hcap}(A)\}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned}$$

が得られる．これから一般に $f''(0) = 2x$, $f'''(0) = 6\{x^2 - \text{hcap}(A)\}$ であることが分かるので，(1.21) が導かれる．■

複素 Brown 運動は (1.6) のように，実部と虚部が互いに独立な 1 次元標準 Brown 運動であるが，虚部を 3 次元 Bessel 過程（付録 A.2 を参照）としたものを， \mathbb{H} -excursion とよぶことにする：

$$\begin{aligned}\widehat{B}_t &= B_t + iX_t, \\ B_t &= 1 \text{ 次元標準 Brown 運動}, \quad X_t = 3 \text{ 次元 Bessel 過程}.\end{aligned}\quad (1.23)$$

ただし， $X_0 = x > 0$ とする． \mathbb{H} -excursion は，実軸 \mathbb{R} に衝突しないという条件の下での \mathbb{H} 内での複素 Brown 運動として実現される．このことから，半平面容量 (1.11) に対して，次の表式を与えることができる． $A \in \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\text{hcap}(A) = \lim_{y \uparrow \infty} y^2 \widehat{\mathbf{P}}^{x+iy} [\widehat{B}[0, \infty) \cap A \neq \emptyset]. \quad (1.24)$$

ただし， $\widehat{\mathbf{P}}^{x+iy}$ は $\widehat{B}_0 = x + iy$ から出発した \mathbb{H} -excursion に対する確率分布であり， $\widehat{B}[0, \infty)$ は \mathbb{H} -excursion の軌跡全体を表す．また， $A \in \mathcal{Q}$, $z \in \mathbb{H} \setminus A$ に対して，

$$\widehat{\mathbf{P}}^z [\widehat{B}[0, \infty) \cap A = \emptyset] = \frac{\text{Im}(g_A(z))}{\text{Im}(z)} \quad (1.25)$$

が成立する．この等式で， $z = x + i\varepsilon$ とおいて， $\varepsilon \downarrow 0$ の極限をとることにより，

$$\widehat{\mathbf{P}}^x [\widehat{B}[0, \infty) \cap A = \emptyset] = g'_A(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bar{A} \quad (1.26)$$

という等式が得られる．ただし， $g'_A(x) = \frac{dg_A(x)}{dx}$ である．

1.3 単純曲線 γ に対応する共形変換 g_t

時間 $t \in [0, \infty)$ をパラメータとしてもつ曲線 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ を考える． $\gamma(0, t] = \{\gamma(s) : s \in (0, t]\}$, $\gamma[t_1, t_2] = \{\gamma(s) : s \in [t_1, t_2]\}$ といった記法を用いることにする．任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対して $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ であるとき， γ は単純曲線であるという．

曲線 γ が次の条件を満たしているものとする：

(C.1) (i) $\gamma(0) \in \mathbb{R}$, (ii) $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$, (iii) γ は単純曲線である．

各時刻 $t > 0$ ごとに， $\gamma(0, t] \in \mathcal{Q}$ であり， $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ なる共形変換 $g_{\gamma(0, t]}(z)$ が定義される．以下では

$$g_t(z) = g_{\gamma(0, t]}(z), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t], \quad t > 0 \quad (1.27)$$

と書くことにする．これは

$$g_t(z) = z + \frac{b_1(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (1.28)$$

と展開できる．ここで

$$b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]) \quad (1.29)$$

である．本 1.3 節では t を固定して考えることにする．

1.1 節では (1.10) , すなわち

$$\text{Im}(g_t(z)) = \text{Im}(z) - \mathbf{E}^z[\text{Im}(B_\tau)], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (1.30)$$

という表式を得た．ただしここで

$$\tau = \tau_{\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]} \equiv \inf\{s \geq 0 : B_s \in \gamma(0, t] \cup \mathbb{R}\} \quad (1.31)$$

である．

いま

$$R = R_t = \sup\{|\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in [0, t]\} \quad (1.32)$$

とする．つまり $\gamma(0, t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R の半円 $B(\gamma(0), R) \cap \mathbb{H}$ の中に含まれることになる．この半円の外の \mathbb{H} の点 $z \in \mathbb{H} \setminus B(\gamma(0), R)$ に対して，この点を出発点とする複素 Brown 運動を考える．半円 $B(\gamma(0), R) \cap \mathbb{H}$ の円周を Γ と書くことにする．上述の複素 Brown 運動が，この半円周 Γ 上または実軸 \mathbb{R} に初めて到達する時刻を σ と書くことにする (図 1 を参照):

$$\sigma = \inf\{s \geq 0 : B_s \in \Gamma \cup \mathbb{R}\}.$$

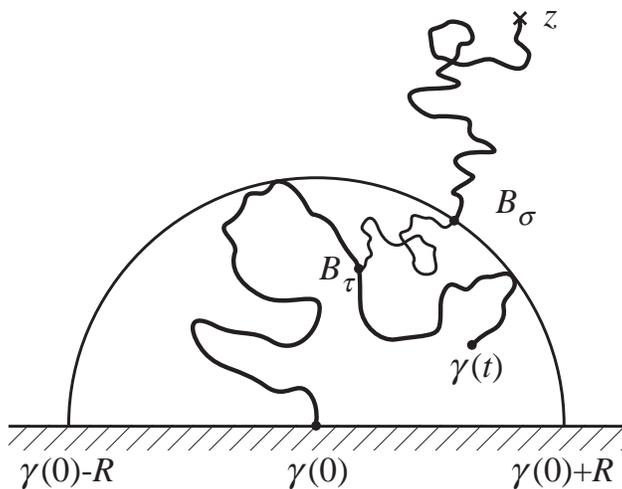


図 1: 上半複素平面 \mathbb{H} 内の単純曲線 $\gamma(0, t]$ と $z \in \mathbb{H}$ を出発点とした複素 Brown 運動の軌跡

指示関数を $1(\cdot)$ と書くことにすると (条件 a に対して，条件 a が成り立つときは $1(a) = 1$, それ以外ときは $1(a) = 0$ である)，時刻 τ と σ の定義から

$$\mathbf{E}^z[\text{Im}(B_\tau)] = \int_{\Gamma \cup \mathbb{R}} \mathbf{E}^z[1(B_\sigma \in d\omega) \mathbf{E}^\omega[\text{Im}(B_\tau) | B_\sigma \in d\omega]]$$

であるが，複素 Brown 運動の強 Markov 性より，これは

$$\int_{\Gamma \cup \mathbb{R}} \mathbf{P}^z[B_\sigma \in d\omega] \mathbf{E}^\omega[\operatorname{Im}(B_\tau)] = \int_\Gamma \mathbf{P}^z[B_\sigma \in d\omega] \mathbf{E}^\omega[\operatorname{Im}(B_\tau)] \quad (1.33)$$

で与えられる． $B_\sigma \in \mathbb{R}$ の場合には $\tau = \sigma$ であり， $\operatorname{Im}(B_\tau) = 0$ となることから最後の等式が成り立つ．付録 A.1 の (A.13) で与えた Poisson 核 $H_{D'}$ で $\zeta \rightarrow z, r \rightarrow \gamma(0), q \rightarrow \theta$ としたものととして与えられる関数

$$p(z, \gamma(0) + Re^{i\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R^{n-1} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right] \quad (1.34)$$

を用いて，(1.33) は

$$\mathbf{E}^z[\operatorname{Im}(B_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + Re^{i\theta}) \mathbf{E}^{\gamma(0) + Re^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_\tau)] R d\theta \quad (1.35)$$

と書くことができる．この結果を (1.30) に代入すると

$$\operatorname{Im}[g_t(z)] = \operatorname{Im}[z] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right] \int_0^\pi \sin(n\theta) \mathbf{E}^{\gamma(0) + Re^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_\tau)] d\theta \quad (1.36)$$

となる．

曲線 $\gamma[0, t]$ は，その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R の円に含まれる．この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点を出発点とするようにした後，全体を $1/R$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\hat{\gamma}[0, t]$ と書くことにする．これは原点を中心とする単位円 \mathbb{D} に含まれることになる．そして

$$\hat{\tau} = \inf\{s \geq 0 : B_s \in \hat{\gamma}(0, t] \cup \mathbb{R}\} \quad (1.37)$$

とする．複素 Brown 運動の平行移動不変性と拡大・縮小共変性より

$$\mathbf{E}^{\gamma(0) + Re^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_\tau)] = R \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_{\hat{\tau}})] \quad (1.38)$$

が成り立つので，(1.36) は

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[g_t(z)] &= \operatorname{Im}[z] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right] \int_0^\pi \sin(n\theta) \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_{\hat{\tau}})] d\theta \\ &= \operatorname{Im} \left[z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \gamma(0))^n} \right], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \end{aligned} \quad (1.39)$$

となる．ただし

$$b_n = R^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) \mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_{\hat{\tau}})] d\theta, \quad n \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\} \quad (1.40)$$

である． g_t は $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ で正則であるので，その実部 $\operatorname{Re}[g_t(z)]$ と虚部 $\operatorname{Im}[g_t(z)]$ は Cauchy-Riemann の微分方程式を満たさなければならない．その結果，虚部に対する表式 (1.39) よ

り, $c = \text{定数}$ として $\text{Re}[g_t(z)] = \text{Re}[z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z - \gamma(0))^n] + c$ となるが, 流体力学的条件 (1.3) より $c = 0$ でなければならない. これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (1.41)$$

と定まることになる. これを (1.28) および (1.29) と見比べると, 半平面容量に対して

$$b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]) = R^2 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \mathbf{E}^{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{\hat{\gamma}})] d\theta \quad (1.42)$$

という表式が得られることになる.

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $n = 2, 3, \dots$ に対して

$$|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin \theta \quad (1.43)$$

となる有限な値 c_n をとることができる. $\mathbf{E}^{e^{i\theta}}[\text{Im}(B_{\hat{\gamma}})] \geq 0$ なので, (1.40) より

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq R^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(n\theta)| \mathbf{E}^{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{\hat{\gamma}})] d\theta \\ &\leq c_n R^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \mathbf{E}^{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{\hat{\gamma}})] d\theta \end{aligned}$$

である. よって (1.42) より,

$$|b_n| \leq c_n R^{n-1} |b_1|, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.44)$$

という評価が得られる.

1.4 Loewner の微分方程式

前 1.3 節では時刻 t を固定して考えたが, ここでは時間を連続的に変化させることにする. $b_n = b_n(t)$ と書くことにして

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(t)}{(z - \gamma(0))^n} \quad (1.45)$$

とする.

$\varepsilon > 0$ として, 時刻 $t + \varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0, t + \varepsilon]$ を考える. これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる:

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0, t+\varepsilon]}(z) \\ &= \left[g_{\gamma(t, t+\varepsilon]} \circ g_t \right](z) = g_{\gamma(t, t+\varepsilon]}(g_t(z)), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

これは, (1.17) で特に $A = \gamma(0, t], B = \gamma(0, t + \varepsilon]$ としたものである.

$B \setminus A = \gamma(t, t + \varepsilon]$ であり, $g_A(B \setminus A) = g_{\gamma(0, t]}(\gamma(t, t + \varepsilon]) = g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$ である. 共形変換 g_t は $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ を \mathbb{H} に写すので, $\gamma(t, t + \varepsilon]$ は g_t の定義域 $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ に入っており, よってその像は $g_t(\gamma(t, t + \varepsilon]) \subset \mathbb{H}$ である.

有界領域 $D \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\text{diam}(D) = \sup\{|z - w| : z, w \in D\} \quad (1.47)$$

とし, 曲線 $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$ に対して, $\delta > 0, 0 < t_0 < \infty$ として

$$\text{osc}(\gamma, \delta, t_0) = \sup\{|\gamma(s) - \gamma(t)| : 0 \leq s, t \leq t_0, |t - s| \leq \delta\} \quad (1.48)$$

と定義する. また, $0 \leq s < t$ に対して

$$\begin{aligned} \|g_s - g_t\|_\infty &= \sup\{|g_s(z) - g_t(z)| : z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]\} \\ &= \sup\{|g_{g_s(\gamma(s, t))} - z| : z \in \mathbb{H} \setminus g_s(\gamma(s, t))\} \end{aligned} \quad (1.49)$$

とする. このとき, 次が成り立つ. (文献 [5] に Lemma 4.1 として与えられている.)

補題 1.8 曲線 γ が条件 (C.1) を満たすものとする. このとき, $0 \leq t < \infty, 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} < \infty$ に対して,

$$\text{diam}[g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])] \leq c\sqrt{\text{diam}(\gamma[0, \bar{\varepsilon}])\text{osc}(\gamma, \varepsilon, \bar{\varepsilon})}, \quad (1.50)$$

$$\|g_t - g_{t+\varepsilon}\|_\infty \leq c\sqrt{\text{diam}(\gamma[0, \bar{\varepsilon}])\text{osc}(\gamma, \varepsilon, \bar{\varepsilon})} \quad (1.51)$$

となる定数 $c < \infty$ が存在する.

この補題 1.8 より, 次が導かれる.

補題 1.9 曲線 γ が条件 (C.1) を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

- (i) g_t は各 $z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ において, t の連続関数である.
- (ii) 各時刻 $t \geq 0$ において,

$$\lim_{z \rightarrow \gamma(t) : z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]} g_t(z) = U_t \quad (1.52)$$

となる $U_t \in \mathbb{R}$ が唯一存在する. また, この U_t は

$$U_t = \lim_{s \uparrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (1.53)$$

を満たし, t について連続である.

注 1.1 以後では, (1.52) および (1.53) の意味において

$$g_t(\gamma(t)) = U_t \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \infty) \quad (1.54)$$

と書くことにする.

この補題 1.9 の (1.52) より , $U_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_t(\gamma(t + \varepsilon)) \in \mathbb{R}$ であり , (1.46) は

$$g_{t+\varepsilon}(z) = g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n((t, t + \varepsilon])}{(g_t(z) - U_t)^n} \quad (1.55)$$

という形に書けることになる . ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \max\{|g_t(\gamma(t + s)) - U_t| : 0 \leq s \leq \varepsilon\}, \quad (1.56)$$

として ,

$$\begin{aligned} b_1((t, t + \varepsilon]) &= b_1(t + \varepsilon) - b_1(t), \\ |b_n((t, t + \varepsilon])| &\leq c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1} |b_1((t, t + \varepsilon])|, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.57)$$

が成り立つ . 初めの等式は補題 1.5 から導かれ , 後の不等式は (1.44) と同様にして導くことができる .

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{b_1(t + \varepsilon) - b_1(t)}{g_t(z) - U_t} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} |b_1(t + \varepsilon) - b_1(t)|$$

という不等式が得られることになる . この両辺を ε で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{b_1(t + \varepsilon) - b_1(t)}{\varepsilon} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} \left| \frac{b_1(t + \varepsilon) - b_1(t)}{\varepsilon} \right|$$

となるが , ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることを考える . 半平面容量 $b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$ は時間に関して微分可能であり ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{b_1(t + \varepsilon) - b_1(t)}{\varepsilon} = \frac{db_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma(0, t]) \quad (1.58)$$

が存在するものと仮定する . $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} R_t^\varepsilon = 0$ であるから ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{db_1(t)}{dt}, \quad b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$$

という等式が成り立つことになる . 補題 1.9 より , この等式の右辺に現れる $g_t(z)$ と U_t は t に関して連続である . よって , $db_1(t)/dt$ が t の連続関数であると仮定すると , $g_t(z)$ の右微分 (上式の左辺) も t について連続ということになる . このことから , 上式は $g_t(z)$ の微分 $dg_t(z)/dt$ に等しいことが保証される .

よって , $b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$ が C^1 級連続であれば , g_t は次の微分方程式を満たすことになる .

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{db_1(t)}{dt}, \quad b_1(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]). \quad (1.59)$$

ただし , 初期条件は $g_0(z) = z$ である . これを Loewner の微分方程式 (Loewner differential equation) という . また , U_t を Loewner 方程式の駆動関数という . この初期値問題

の解として与えられる，時刻 $t \geq 0$ で径数付けられる共形変換の族 $(g_t(\cdot))_{t \geq 0}$ は Loewner 鎖 とよばれる．

注 1.2 補題 1.5 と補題 1.8 より， $b_1(t)$ は t について狭義単調増加であり， $t > 0, \varepsilon > 0$ に対して， $b_1(t + \varepsilon) - b_1(t) \leq c \operatorname{diam}(\gamma[0, t + \varepsilon]) \operatorname{diam}(\gamma[t, t + \varepsilon])$ となる定数 $c < \infty$ があることが導かれる．したがって， $b_1(t)$ は t の連続関数である．上の (1.58) のところでは，さらに， $b_1(t) = \operatorname{hcap}(\gamma(0, t])$ が C^1 級連続であることを仮定したが，この仮定は必ずしも必要ではない．曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面容量 $b_1(t)$ そのもので径数付けすることが可能であるからである．通常は $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(b_1^{-1}(2t))$ とおく．この定義より

$$b_1(t) = \operatorname{hcap}(\tilde{\gamma}((0, t])) = 2t \quad (1.60)$$

となるので，Loewner 方程式は

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \quad (1.61)$$

となる．以下では，特に断りのない限り，(1.61) を Loewner 方程式とよぶことにする．

1.5 Loewner 鎖の逆変換 $f_t = g_t^{-1}$ と跡 γ

1.3 節と 1.4 節では，条件 (C.1) を満たす曲線 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ を考え，共形変換 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}, t \geq 0$ の満たすべき常微分方程式 (1.61) を導いた．この Loewner 方程式は，曲線 γ の各時刻での先端の値 $\gamma(t)$ から (1.54) によって与えられる t の連続関数 U_t で駆動される形をしている．

以下では，逆に適当な条件を満たす t の連続関数 U_t を与えて，その U_t で駆動される Loewner 方程式 (1.61) の解 g_t によって \mathbb{H} から共形的に消去される曲線 γ を導くことを考えることにする．

$U_t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (ただし $U_0 = 0$ とする) を t の連続関数として，各 $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$ に対して，Loewner 方程式 (1.61) の解を $g_t(z)$ とする．解 $g_t(z)$ は $g_t(z) - U_t \neq 0$ である間は存在する．そこで

$$T_z = \sup\{t > 0 : g_t(z) - U_t \neq 0\} \quad (1.62)$$

として，

$$H_t \equiv \{z \in \mathbb{H} : T_z > t\}, \quad K_t \equiv \{z \in \overline{\mathbb{H}} : T_z \leq t\} \quad (1.63)$$

と定義する．任意の $t \geq 0$ に対して， K_t は $\overline{\mathbb{H}}$ 内のコンパクトな集合であり， H_t は非有界な開領域である． g_t は H_t を \mathbb{H} に写す共形変換である．

Loewner 鎖 $(g_t)_{t \geq 0}$ に対して，

$$f_t \equiv g_t^{-1}, \quad \widehat{f}_t(\cdot) = f_t(\cdot + U_t) \quad (1.64)$$

とする． f_t は $\mathbb{H} \rightarrow H_t$ の共形変換である．定義より $f_t(g_t(z)) = z$ であるが，この自明な式の両辺を t で微分すると (z と t は独立なので右辺の t 微分は零であり)

$$\frac{d}{dt} f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z)) \frac{d}{dt} g_t(z) = 0$$

が得られる．ただし一般に， z の解析関数 $F(z)$ に関して $F'(z) = \partial F(z)/\partial z$ と書くことにする．ここで，Loewner 方程式 (1.61) を代入すると，

$$\frac{d}{dt}f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z))\frac{2}{g_t(z) - U_t} = 0$$

となるので， $g_t(z)$ を改めて z と書くことにすると

$$\frac{d}{dt}f_t(z) = -f'_t(z)\frac{2}{z - U_t}, \quad f_0(z) = z \quad (1.65)$$

という， g_t の逆変換 f_t に対する方程式が導かれる．

(1.54) は

$$\gamma(t) = g_t^{-1}(U_t) = f_t(U_t) = \lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{H}} f_t(z + U_t)$$

と式変形できるので，Loewner 鎖に対して，一般に

$$\gamma(t) \equiv \lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{H}} \hat{f}_t(z) \quad (1.66)$$

を考えることにする．これを Loewner 鎖の跡 (trace of Loewner chain) とよぶことにする．極限として唯一の点が定まらないときには， $\gamma(t)$ はすべての極限点の集合を表すものとする．各 $t \geq 0$ で $\gamma(t)$ が \mathbb{H} 上の唯一の点として定まり， $\gamma(t)$ が t の連続曲線であるとき，「Loewner 鎖の跡 γ は連続曲線である」あるいは「Loewner 鎖は連続曲線 γ で生成される」という．

一般に

$$A = \{D : \text{単連結領域}, D \neq \mathbb{C}, D \ni 0\},$$

$$S^* = \{f : \mathbb{D} \text{ 上の単葉関数} (\equiv \text{正則かつ単射}), f(0) = 0, f'(0) > 0\}$$

とすると，Riemann の写像定理 (定理 1.1) より， A と S^* とは 1 対 1 対応することになる．ここでは， S^* の部分集合として

$$S = \{f \in S^* : f'(0) = 1\}$$

を考え，これに対応する A の部分集合を A_1 とする．任意の $F \in S$ は，原点 0 の周りで

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.67)$$

と展開できて，次が成り立つことが示せる．(例えば，文献 [5] には Proposition 3.16 として与えられている.)

命題 1.10 (Bieberbach) $F \in S$ ならば， $|a_2| \leq 2$ である．

この命題から，有名な Koebe の 1/4 定理 (Koebe One-Quarter Theorem) が導かれる．

定理 1.11 (Koebe 1/4 定理) $F \in S$ ならば， $\mathcal{B}(0, 1/4) \subset F(\mathbb{D})$ である．

そして、これの系として次が得られる。

系 1.12 D, D' を \mathbb{C} 上の単連結領域とし、 $f : D \rightarrow D'$ を共形変換とする。いま、 $z \in D$ 、 $f(z) = z' \in D'$ に対して、 $d = \text{dist}(z, \partial D)$ 、 $d' = \text{dist}(z', \partial D')$ とすると、

$$\frac{d'}{4d} \leq |f'(z)| \leq \frac{4d'}{d}$$

が成り立つ。

さて、(各 $t \geq 0$) に対して、 f_t は $\mathbb{H} \rightarrow H_t \in \mathcal{Q}$ の共形変換である。像 H_t は原点 0 を含まないが、これを $\beta_0 \in \mathbb{C}$ 、 $\text{Im } \beta < 0$ だけ並行移動して、像が原点を含むようにする。さらに全体を β_1 倍 ($\beta_1 \in \mathbb{C}$) する (拡大・縮小・回転する) ことにより、像が \mathcal{A}_1 の元となるようにできる。すなわち、

$$\phi_\beta(z) = \beta_0 + \beta_1 z, \quad \phi_\beta(H_t) \in \mathcal{A}_1 \quad (1.68)$$

とする。

また、 $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ なる共形変換が Möbius 変換 (1.2) で与えられることを述べたが、その逆の共形変換 ($\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$) は Möbius 変換

$$\varphi_\alpha(z) = \gamma \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \alpha > 0, \quad |\gamma| = 1 \quad (1.69)$$

で与えられる。ただし、この変換は $\alpha \in \mathbb{H}$ を原点 $0 \in \mathbb{D}$ に写す。

以上の考察から、 (β_0, β_1) を適当に選べば、

$$\begin{aligned} f_t(\cdot) &= \phi_\beta^{-1} \circ F \circ \varphi_\alpha(\cdot) \\ &= \phi_\beta^{-1}(F(\varphi_\alpha(\cdot))), \quad F \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.70)$$

と表せることが分かる。ただし、 α (と γ) は任意に選ぶことができる。(図 2 を参照.)

以下で、 $|f'_t(z)|$ の挙動を評価する必要が生じる。そのため、対数微分 $\frac{\partial}{\partial z} \log f'_t(z)$ を計算したい。(1.68) より $\phi_\beta^{-1}(z) = (z - \beta_0)/\beta_1$ なので、(1.70) より

$$\begin{aligned} f'_t(z) &= (\phi_\beta^{-1})'(F(\varphi_\alpha(z)))F'(\varphi_\alpha(z))\varphi'_\alpha(z) = \frac{1}{\beta_1}F'(\varphi_\alpha(z))\varphi'_\alpha(z), \\ f''_t(z) &= \frac{1}{\beta_1}F''(\varphi_\alpha(z))(\varphi'_\alpha(z))^2 + \frac{1}{\beta_1}F'(\varphi_\alpha(z))\varphi''_\alpha(z) \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial}{\partial z} \log f'_t(z) = \frac{f''_t(z)}{f'_t(z)} = \frac{F''(\varphi_\alpha(z))}{F'(\varphi_\alpha(z))}\varphi'_\alpha(z) + \frac{\varphi''_\alpha(z)}{\varphi'_\alpha(z)}$$

である。

パラメータ α は任意に選ぶことができた。そこで、各 $z \in \mathbb{H}$ に対して、上の対数微分を計算する際に、 $\alpha = z$ とすることもできる。つまり、Möbius 変換で $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ とする際に $z \in \mathbb{H} \rightarrow 0 \in \mathbb{D}$ となるようにすることになるので、 $\varphi_z(z) = 0$ である。また、(1.69) より

$$\varphi'_\alpha(z) = \gamma \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{(z - \bar{\alpha})^2}, \quad \varphi''_\alpha(z) = -2\gamma \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{(z - \bar{\alpha})^3}$$

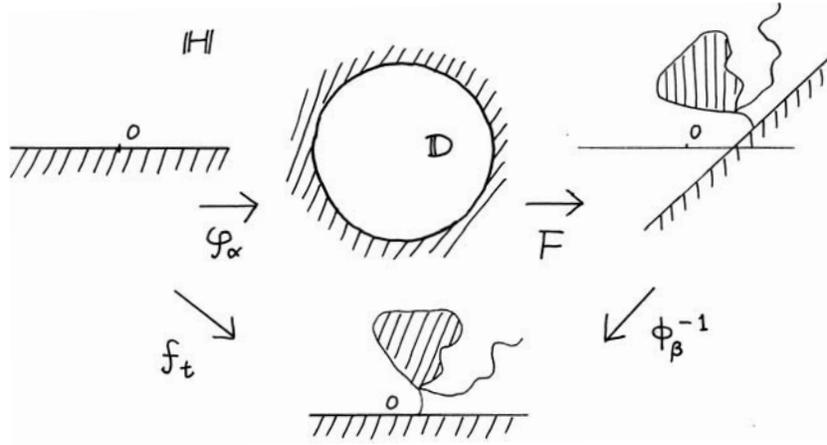


図 2: $f_t = \phi_\beta^{-1} \circ F \circ \phi_\alpha$.

なので,

$$\varphi'_z(z) = \frac{\gamma}{z - \bar{z}} = \frac{\gamma}{2i \operatorname{Im} z}, \quad \varphi''_z(z) = -\frac{2\gamma}{(z - \bar{z})^2} = -\frac{2\gamma}{(2i \operatorname{Im} z)^2}$$

である. また, $F \in \mathcal{S}$ の展開 (1.67) より, $F'(0) = 1, F''(0) = 2a_2$ なので,

$$\frac{\partial}{\partial z} \log f'_t(z) = 2a_2 \frac{\gamma}{2i \operatorname{Im} z} - \frac{2}{2i \operatorname{Im} z} = \frac{a_2 \gamma - 1}{i \operatorname{Im} z} \quad (1.71)$$

という表式が得られる.

これから, 命題 1.10 を用いると ($|\gamma| = 1$ なので)

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \log f'_t(z) \right| = \frac{|f''_t(z)|}{|f'_t(z)|} \leq \frac{|a_2| + 1}{\operatorname{Im} z} \leq \frac{3}{\operatorname{Im} z} \quad (1.72)$$

という評価が得られる. また, $f'_t(z) = |f'_t(z)|e^{i \arg(f'_t(z))}$ と極表示してから対数をとると

$$\log f'_t(z) = \log |f'_t(z)| + i \arg(f'_t(z)) \quad (1.73)$$

となるので, この t 微分をとると

$$\frac{d}{dt} \log f'_t(z) = \frac{d}{dt} \log |f'_t(z)| + i \frac{d}{dt} \arg(f'_t(z))$$

が得られる. この等式の実部をとると

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d}{dt} \log f'_t(z) \right) = \frac{d}{dt} \log |f'_t(z)| \leq \left| \frac{d}{dt} \log f'_t(z) \right| \quad (1.74)$$

である. 他方, f_t に対する微分方程式 (1.65) の両辺を z で微分すると

$$\frac{d}{dt} f'_t(z) = -f'_t(z) \frac{2}{z - U_t} + f'_t(z) \frac{2}{(z - U_t)^2},$$

つまり

$$\frac{d}{dt} \log f'_t(z) = -\frac{f''_t(z)}{f'_t(z)} \frac{2}{z - U_t} + \frac{2}{(z - U_t)^2}$$

を得るので, (1.74) より

$$\frac{d}{dt} \log |f'_t(z)| \leq \frac{|f''_t(z)|}{|f'_t(z)|} \frac{2}{|z - U_t|} + \frac{2}{|z - U_t|^2} \leq \frac{|f''_t(z)|}{|f'_t(z)|} \frac{2}{\operatorname{Im} z} + \frac{2}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

が得られる. よって, (1.72) を用いると,

$$\frac{d}{dt} \log |f'_t(z)| \leq \frac{8}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

であることが導かれる. $0 \leq s \leq t$ として, これを s から t まで積分すると

$$|f'_t(z)| \leq \exp \left\{ \frac{8(t-s)}{(\operatorname{Im} z)^2} \right\} |f'_s(z)|$$

を得る.

次に, (1.73) を z で微分して, 両辺の実部をとると,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial z} \log f'_t(z) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \log |f'_t(z)|$$

となる. そこで (1.71) および命題 1.10 を用いると

$$\frac{\partial}{\partial z} \log |f'_t(z)| = \operatorname{Re} \left(\frac{a_2 \gamma - 1}{i \operatorname{Im} z} \right) = \frac{\operatorname{Im}(a_2 \gamma)}{\operatorname{Im} z} \leq \frac{|a_2|}{\operatorname{Im} z} \leq \frac{2}{\operatorname{Im} z}$$

を得る. $z, w \in \mathbb{H}$ として, これを z から w まで積分すると

$$|f'_t(w)| \leq |f'_t(z)| \exp \left\{ \int_z^w \frac{2}{\operatorname{Im} z'} dz' \right\}$$

となるが, 特に $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} w$ の場合には

$$|f'_t(w)| \leq |f'_t(z)| \exp \left\{ \frac{|w - z|}{\operatorname{Im} z} \right\}$$

が成り立つ. 以上を補題の形にまとめておく.

補題 1.13 Loewner 鎖の逆変換 $(f_t(\cdot))_{t \geq 0}$ は次を満たす.

$$|f'_t(z)| \leq \exp \left\{ \frac{8(t-s)}{(\operatorname{Im} z)^2} \right\} |f'_s(z)|, \quad 0 \leq s \leq t, z \in \mathbb{H}, \quad (1.75)$$

$$|f'_t(w)| \leq \exp \left\{ \frac{|w - z|}{\operatorname{Im} z} \right\} |f'_t(z)|, \quad t \geq 0, \quad z, w \in \mathbb{H}, \quad \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} w. \quad (1.76)$$

1.6 跡 γ が連続曲線であるための条件

Loewner 鎖の跡 γ が連続曲線であるための条件は次で与えられる .

命題 1.14 各 $t \geq 0$ に対して

$$\gamma(t) = \lim_{y \downarrow 0} \widehat{f}_t(iy) \quad (1.77)$$

が存在して , $\gamma(t) : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ が連続であるならば , Loewner 鎖 g_t の跡 γ は連続曲線である .

$y, t \geq 0$ に対して

$$V(y, t) = \widehat{f}_t(iy) \quad (1.78)$$

と書くことにする . これは微分方程式 (1.65) の解で与えられるのであるから , $(y, t) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$ で連続であることは明らかである . 命題 1.14 の条件は , V が $[0, \infty) \times [0, \infty)$ で連続であることを要請している . 微分方程式 (1.65) で一様な時間変更をしても解の時刻についての連続性には影響しないので , V が $[0, 1] \times [0, 1]$ で連続であれば , 命題 1.14 の仮定が満たされることになる .

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ となる関数 δ があって ,

$$|V(y_1, t_1) - V(y_2, t_2)| \leq \delta(y_1 + y_2 + |t_1 - t_2|), \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad 0 < y_1, y_2 \leq 1 \quad (1.79)$$

であれば , 任意の $t_0 \in [0, 1]$ に対して , 極限 $\lim_{y \downarrow 0, t \rightarrow t_0} V(y, t) = V(0, t_0)$ が存在することになる . よって , 連続関数 V は $[0, 1] \times [0, 1]$ に拡張できることになる .

整数 $j \in \mathbb{N}$ に対して ,

$$y_1, y_2 \leq 2^{-j}, \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad |t_2 - t_1| \leq 2^{-2j}$$

であるものと仮定する . また , 以下では $V'(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} V(y, t)$, $\dot{V}(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} V(y, t)$ と記すことにする .

$$\begin{aligned} & |V(y_1, t_1) - V(y_2, t_2)| \\ & \leq |V(y_1, t_1) - V(2^{-j}, t_1)| + |V(2^{-j}, t_1) - V(2^{-j}, t_2)| + |V(2^{-j}, t_2) - V(y_2, t_2)| \end{aligned} \quad (1.80)$$

において , 右辺の 3 項をそれぞれ評価したい . まず , 第 1 項を評価するのに , 仮に $2^{-m} \leq y_1 \leq 2^{-m+1}$, $m > j$ であったとすると ,

$$\begin{aligned} & |V(y_1, t_1) - V(2^{-j}, t_1)| \\ & \leq |V(y_1, t_1) - V(2^{-m+1}, t_1)| + \sum_{\ell=j+1}^{m-1} |V(2^{-\ell}, t_1) - V(2^{-\ell+1}, t_1)| \\ & \leq |y_1 - 2^{-m+1}| \sup_{y_1 \leq \tilde{y} \leq 2^{-m+1}} |V'(\tilde{y}, t_1)| + \sum_{\ell=j+1}^{m-1} |2^{-\ell} - 2^{-\ell+1}| \sup_{2^{-\ell} \leq \tilde{y} \leq 2^{-\ell+1}} |V'(\tilde{y}, t_1)| \\ & \leq \sum_{\ell=j+1}^m 2^{-\ell} \sup_{2^{-\ell} \leq \tilde{y} \leq 2^{-\ell+1}} |V'(\tilde{y}, t_1)| \leq \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \sup_{2^{-\ell} \leq \tilde{y} \leq 2^{-\ell+1}} |V'(\tilde{y}, t_1)|. \end{aligned}$$

ここで、各区間 $2^{-\ell} \leq \tilde{y} \leq 2^{-\ell+1}$ において、それぞれ、 $k_1 2^{-2\ell} \leq t_1 \leq (k_1 + 1)2^{-2\ell}$ となる $k_1 = k_1(\ell) \in \{0, 1, \dots, 2^{2\ell} - 1\}$ を選ぶことにする。(図 3 参照.) そして、補題 1.13 の (1.76) を用いると

$$\begin{aligned}
|V'(\tilde{y}, t_1)| &= |\hat{f}'_{t_1}(i\tilde{y})| = |f'_{t_1}(i\tilde{y} + U_{t_1})| \\
&= |f'_{t_1}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}} + i(\tilde{y} - 2^{-\ell}) + (U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}}))| \\
&\leq \exp\left[\frac{1}{2^{-\ell}}\{|\tilde{y} - 2^{-\ell}| + |U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}}|\}\right] |f'_{t_1}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})| \\
&\leq \exp\left[\frac{1}{2^{-\ell}}\{2^{-\ell} + (U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}})\}\right] |f'_{t_1}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})| \\
&\leq e^1 \exp\left\{2^\ell(U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}})\right\} |f'_{t_1}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})|
\end{aligned}$$

を得る. さらに、補題 1.13 の (1.75) を用いると

$$\begin{aligned}
|f'_{t_1}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})| &= |f'_{k_1 2^{-2\ell} + (t_1 - k_1 2^{-2\ell})}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})| \\
&\leq \exp\left\{\frac{8}{(2^{-\ell})^2}(t_1 - k_1 2^{-2\ell})\right\} |f'_{k_1 2^{-2\ell}}(i2^{-\ell} + U_{k_1 2^{-2\ell}})| \\
&\leq \exp\left\{\frac{8}{2^{-2\ell}}2^{-2\ell}\right\} |\hat{f}'_{k_1 2^{-2\ell}}(i2^{-\ell})| = e^8 |\hat{f}'_{k_1 2^{-2\ell}}(i2^{-\ell})|
\end{aligned}$$

なので、 $|V'(\tilde{y}, t_1)| \leq e^9 \exp\left\{2^\ell |U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}}|\right\} |V'(2^{-\ell}, k_1 2^{-2\ell})|$ を得る. よって、(1.80) の右辺第 1 項に対しては

$$|V(y_1, t_1) - V(2^{-j}, t_1)| \leq e^9 \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp\left\{2^\ell (U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}})\right\} |V'(2^{-\ell}, k_1 2^{-2\ell})|$$

という上限が得られる.

同様にして、(1.80) の右辺第 3 項に対しても、各 $\ell \geq j+1$ に対して、 $k_2 2^{-2\ell} \leq t_2 \leq (k_2 + 1)2^{-2\ell}$ となるように $k_2 = k_2(\ell) \in \{0, 2, \dots, 2^{2\ell} - 1\}$ を選ぶことにすると、

$$|V(2^{-j}, t_2) - V(y_2, t_2)| \leq e^9 \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp\left\{2^\ell (U_{t_2} - U_{k_2 2^{-2\ell}})\right\} |V'(2^{-\ell}, k_2 2^{-2\ell})|$$

という上限が得られる.

また、(1.80) の右辺第 2 項に対しては、

$$\begin{aligned}
|V(2^{-j}, t_1) - V(2^{-j}, t_2)| &\leq |t_1 - t_2| \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |\dot{V}(2^{-j}, t)| \\
&\leq |t_1 - t_2| \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left| \frac{d}{dt} f_t(i2^{-j} + U_t) \right| \leq 2^{-2j} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left| \frac{d}{dt} f_t(i2^{-j} + U_t) \right|
\end{aligned}$$

であるが、Löwner 鎖の逆変換に対する方程式 (1.65) より

$$\left| \frac{d}{dt} f_t(i2^{-j} + U_t) \right| = \left| f'_t(i2^{-j} + U_t) \frac{2}{i2^{-j}} \right| = 2^{j+1} |f'_t(i2^{-j} + U_t)|$$

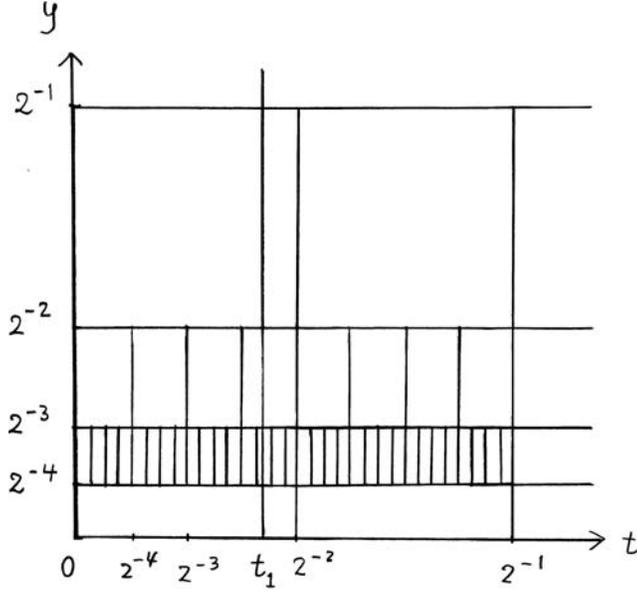


図 3: 各区間 $2^{-\ell} \leq \tilde{y} \leq 2^{-\ell+1}$ において, それぞれ, $k_1 2^{-2\ell} \leq t_1 \leq (k_1 + 1) 2^{-2\ell}$ となる $k_1 = k_1(\ell) \in \{0, 1, \dots, 2^{2\ell} - 1\}$ を選ぶ.

が成立する. そこで, $t_1 \leq t \leq t_2$ である各 t に対して, $k 2^{-2j} \leq t \leq (k + 1) 2^{-2j}$ となる $k = k(t) \in \{0, 1, \dots, 2^{2j} - 1\}$ を用いると, 補題 1.13 の (1.75) および (1.76) より,

$$\begin{aligned}
|f'_t(i 2^{-j} + U_t)| &= |f'_{k 2^{-2j} + (t - k 2^{-2j})}(i 2^{-j} + U_{k 2^{-2j}} + (U_t - U_{k 2^{-2j}}))| \\
&\leq \exp \left\{ \frac{8}{(2^{-j})^2} (t - k 2^{-2j}) + \frac{1}{2^{-j}} (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |f'_{k 2^{-2j}}(i 2^{-j} + U_{k 2^{-2j}})| \\
&\leq e^8 \exp \left\{ 2^j (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |f'_{k 2^{-2j}}(i 2^{-j} + U_{k 2^{-2j}})| = e^8 \exp \left\{ 2^j (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |V'(2^{-j}, k 2^{-2j})|.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
|V(2^{-j}, t_1) - V(2^{-j}, t_2)| &\leq 2^{-2j} 2^{j+1} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} e^8 \exp \left\{ 2^j (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |V'(2^{-j}, k 2^{-2j})| \\
&= 2e^8 2^{-j} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \exp \left\{ 2^j (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |V'(2^{-j}, k 2^{-2j})|
\end{aligned}$$

という上限が得られる. 以上より,

$$\begin{aligned}
&|V(y_1, t_1) - V(y_2, t_2)| \\
&\leq e^9 \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp \left\{ 2^\ell (U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}}) \right\} |V'(2^{-\ell}, k_1 2^{-2\ell})| \\
&\quad + 2e^8 2^{-j} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \exp \left\{ 2^j (U_t - U_{k 2^{-2j}}) \right\} |V'(2^{-j}, k 2^{-2j})| \\
&\quad + e^9 \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp \left\{ 2^\ell (U_{t_2} - U_{k_2 2^{-2\ell}}) \right\} |V'(2^{-\ell}, k_2 2^{-2\ell})| \tag{1.81}
\end{aligned}$$

という評価が得られた .

この結果より , 直ちに次の補題が導かれる .

補題 1.15 正の数列 $r_j, j \in \mathbb{N}$ で以下が成り立つものがあるとする :

$$|V'(2^{-j}, k2^{-2j})| \leq 2^j r_j, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^{2j} - 1\}, \quad (1.82)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0, \quad (1.83)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{j}}{\log r_j} = 0. \quad (1.84)$$

また , 定数 $c > 0$ があり ,

$$|U_t - U_s| \leq c\sqrt{j}2^{-j}, \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad |t - s| \leq 2^{-2j} \quad (1.85)$$

が成り立つとする . このとき , $V(y, t)$ は $[0, 1] \times [0, 1]$ で連続である .

証明. (1.81) の右辺第 1 項において , $|t_1 - k_1 2^{-2\ell}| \leq 2^{-2\ell}$ なので , 条件 (1.82), (1.85) の下では ,

$$\begin{aligned} R(j) &\equiv \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp \left\{ 2^\ell (U_{t_1} - U_{k_1 2^{-2\ell}}) \right\} |V'(2^{-\ell}, k_1 2^{-2\ell})| \\ &\leq \sum_{\ell=j+1}^{\infty} 2^{-\ell} \exp \left(2^\ell c \sqrt{\ell} 2^{-\ell} \right) 2^\ell r_\ell = \sum_{\ell=j+1}^{\infty} e^{c\sqrt{\ell}} r_\ell \\ &= \sum_{\ell=j+1}^{\infty} \exp \left\{ \log r_\ell \left(1 + c \frac{\sqrt{\ell}}{\log r_\ell} \right) \right\}. \end{aligned}$$

よって , 条件 (1.83), (1.84) の下では , $\lim_{j \rightarrow \infty} R(j) = 0$ となる . (1.81) の右辺第 3 項も同様に $j \rightarrow \infty$ で零になる . また ,

$$\begin{aligned} ((1.81) \text{ の右辺第 2 項}) &\leq 2e^8 2^{-j} \exp \left(2^j c \sqrt{j} 2^{-j} \right) 2^j r_j \\ &= 2e^8 e^{c\sqrt{j}} r_j = 2e^8 \exp \left\{ \log r_j \left(1 + c \frac{\sqrt{j}}{\log r_j} \right) \right\} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

である . よって , $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ に対して , $y_1, y_2 \downarrow 0, |t_1 - t_2| \downarrow 0$ で $|V(y_1, t_1) - V(y_2, t_2)| \rightarrow 0$ となるので , (1.79) の状況が実現する . よって , 題意は証明された . ■

2 確率的 Loewner 発展 (SLE)

2.1 SLE と SLE の跡

$(B_t)_{t \geq 0}$ を原点を出発点とする 1 次元標準 Brown 運動とする . 径数 $\kappa \geq 0$ として ,

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

とおき, 各 $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$ に対して, (2.1) を駆動関数とする Loewner 方程式 (1.61) の解を $g_t(z)$ とする. g_t は H_t を \mathbb{H} に写す共形変換である. このようなランダムな Loewner 鎖 $(g_t(\cdot))_{t \geq 0}$ を (径数 κ の) 確率的 Loewner 発展 (stochastic Loewner evolution (with parameter κ)) あるいは Schramm-Loewner 発展とよび, SLE (あるいは SLE_κ) と略記する. また, $K_t = \mathbb{H} \setminus H_t$ を SLE の hull という.

2 つのランダムな時間発展 (確率過程) $(A_t)_{t \geq 0}$ と $(B_t)_{t \geq 0}$ が同じ確率法則に従うとき, $(A_t)_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (B_t)_{t \geq 0}$ と記すことにする. 定義からすぐに, SLE は次の性質を持つことが導かれる. これらは, 駆動関数である Brown 運動 B_t の性質が「遺伝」したものである.

命題 2.1 (i) [スケール性] K_t を SLE の hull とする. 任意の $\alpha > 0$ に対して,

$$(\alpha^{-1/2} K_{\alpha t})_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (K_t)_{t \geq 0}, \quad (2.2)$$

$$(\alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} \cdot))_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (g_t(\cdot))_{t \geq 0}. \quad (2.3)$$

(ii) [ある種の定常性] $t_0 > 0$ として, t_0 だけ時間並進した SLE

$$\tilde{g}_t^{t_0}(z) \equiv g_{t_0+t} \circ g_{t_0}^{-1}(z + U_{t_0}) - U_{t_0} \quad (2.4)$$

を定義する. すると,

$$(\tilde{g}_t^{t_0}(\cdot))_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (g_t(\cdot))_{t \geq 0} \quad (2.5)$$

である. また, $(\tilde{g}_t^{t_0}(\cdot))_{t \geq 0}$ と $(g_t(\cdot))_{0 \leq t \leq t_0}$ とは独立である.

証明. (i) $g_t^\alpha(z) = \alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z)$ とおくと, 初期値は $g_0^\alpha(z) = \alpha^{-1/2} g_0(\sqrt{\alpha} z) = \alpha^{-1/2} \sqrt{\alpha} z = z = g_0(z)$ である. $B_t^\alpha = \alpha^{-1/2} B_{\alpha t}$ とおくと, $g_t^\alpha(z)$ の従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dg_t^\alpha(z)}{dt} &= \alpha^{-1/2} \frac{dg_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z)}{dt} \\ &= \alpha^{-1/2} \frac{2\alpha}{g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z) - \sqrt{\kappa} B_{\alpha t}} \\ &= \frac{2}{\alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z) - \sqrt{\kappa} \alpha^{-1/2} B_{\alpha t}} \\ &= \frac{2}{g_t^\alpha(z) - \sqrt{\kappa} B_t^\alpha} \end{aligned}$$

である. Brown 運動のスケール性 $(B_t^\alpha)_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (B_t)_{t \geq 0}, \forall \alpha > 0$ より, $(g_t^\alpha(\cdot))_{t \geq 0}$ も同じ SLE_κ であるから, (2.2) と (2.3) が成り立つ.

(ii) 初期値は $\tilde{g}_0^{t_0}(z) = g_{t_0} \circ g_{t_0}^{-1}(z + U_{t_0}) - U_{t_0} = z + U_{t_0} - U_{t_0} = z = g_0(z)$ である. また, $\tilde{B}_t^{t_0} = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{g}_t^{t_0}(z)}{dt} &= \frac{d}{dt} g_{t_0+t}(g_{t_0}^{-1}(z + U_{t_0})) \\ &= \frac{2}{g_{t_0+t}(g_{t_0}^{-1}(z + U_{t_0})) - U_{t_0+t}} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t^{t_0}(z) + U_{t_0} - U_{t_0+t}} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t^{t_0}(z) - \sqrt{\kappa} \tilde{B}_t^{t_0}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

である． $(\tilde{B}_t^{t_0})_{t \geq 0} \stackrel{\text{(law)}}{=} (B_t)_{t \geq 0}, \forall t_0 \geq 0$ なので，(2.5) が結論される． $(\tilde{B}_t^{t_0})_{t \geq 0}$ と $(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$ とは独立なので，最後の主張も成り立つ．■

SLE が連続曲線 γ で生成されるとき，SLE の跡を特に SLE 曲線 (SLE curve, SLE path) という．

2.2 負時刻への拡張と逆変換 $f_t = g_t^{-1}$

$B_0 = 0$ である 1 次元標準 Brown 運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ に対して，これと独立な別の 1 次元標準 Brown 運動 $(B_{t,-})_{t \geq 0}$ を用意して ($B_{0,-} = 0$ とする)， $B_{-t} = B_{t,-}, t > 0$ とおくことによって， $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ に拡張する．その上で $U_t = \sqrt{\kappa} B_t, t \in \mathbb{R}$ を駆動関数とする Loewner 方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

の解として，SLE を $(g_t(\cdot))_{t \in \mathbb{R}}$ と拡張して考えることにする．次の補題が示すように， $t < 0$ のときは， g_t は \mathbb{H} から \mathbb{H} の部分領域である H_t への共形変換となる．なお，命題 2.1 (i) で述べた g_t のスケール性は， $t < 0$ に対しても成り立つ．

一般に，2 つの確率変数 X と Y の分布が等しいとき， $A \stackrel{d}{=} B$ と記すことにする．

補題 2.2 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$g_{-t}(\cdot) \stackrel{d}{=} \hat{f}_t(\cdot) - U_t. \quad (2.8)$$

証明. 時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ を任意に選んで， $\tilde{B}_t^{t_0} = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ とおく．(2.4) で特に $t = -t_0$ とすると， $\tilde{g}_{-t_0}^{t_0}(z) = g_0 \circ g_{t_0}^{-1}(z + U_{t_0}) - U_{t_0} = \hat{f}_{t_0}(z) - U_{t_0}$ である．ところが，命題 2.1 (ii) は $t \in \mathbb{R}$ に拡張できるので，特に $t = -t_0$ とすると， $\tilde{g}_{-t_0}^{t_0}(\cdot) \stackrel{d}{=} g_{-t_0}(\cdot)$ である．よって，(2.8) が $t = t_0$ で成立することになる． t_0 は任意に取れるので，命題が証明されたことになる．■

注 2.1 $g_t^{-1} = f_t$ の満たすべき方程式は， t と z に対する偏微分方程式 (1.65) である．しかし，等式 (2.8) は，常微分方程式である (2.7) を $t < 0$ に対して解けば， f_t の分布が定められることを主張している．

2.3 SLE flow

以下では，(2.7) 式において

$$a = \frac{2}{\kappa}, \quad h_t(z) = \frac{g_t(\sqrt{\kappa}z)}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t \quad (2.9)$$

とする．すると， $h_t(z)$ が満たす Loewner 方程式は

$$\frac{dh_t(z)}{dt} = \frac{a}{h_t(z) + W_t}, \quad h_0(z) = z \quad (2.10)$$

となる．

いま, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$ を指定し, 点 $Z_t = h_t(z_0) + W_t$ の時間変化 (SLE flow) を調べることにする. これは, 方程式

$$dZ_t = \frac{a}{Z_t} dt + dW_t, \quad Z_0 = z_0 \quad (2.11)$$

に従う. $Z_t = X_t + iY_t$ において, (2.11) の実部と虚部をとると

$$dX_t = \frac{aX_t}{X_t^2 + Y_t^2} dt + dW_t, \quad (2.12)$$

$$dY_t = -\frac{aY_t}{X_t^2 + Y_t^2} dt \quad (2.13)$$

が得られる. これから, 伊藤の公式を用いると

$$d \log Y_t = -\frac{a}{X_t^2 + Y_t^2} dt, \quad (2.14)$$

$$d|Z_t|^2 = d(X_t^2 + Y_t^2) = \frac{(2a+1)X_t^2 + (1-2a)Y_t^2}{X_t^2 + Y_t^2} dt + 2X_t dW_t, \quad (2.15)$$

$$d \left[\frac{X_t}{Y_t} \right] = 2a \frac{X_t}{Y_t} \frac{1}{X_t^2 + Y_t^2} dt + \frac{1}{Y_t} dW_t, \quad (2.16)$$

$$d[\log Z_t] = \left(a - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{Z_t^2} dt + \frac{1}{Z_t} dW_t \quad (2.17)$$

が得られる.

このうち, (2.17) の

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= d \left[\log(|Z_t| e^{i \arg(Z_t)}) \right] \\ &= d[\log |Z_t|] + i d[\arg(Z_t)], \\ \text{(右辺)} &= \left(a - \frac{1}{2} \right) \frac{(X_t - iY_t)^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} dt + \frac{X_t - iY_t}{X_t^2 + Y_t^2} dW_t \\ &= \left[\left(a - \frac{1}{2} \right) \frac{X_t^2 - Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} dt + \frac{X_t}{X_t^2 + Y_t^2} dW_t \right] \\ &\quad + i \left[(1 - 2a) \frac{X_t Y_t}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} dt - \frac{Y_t}{X_t^2 + Y_t^2} dW_t \right] \end{aligned}$$

であるから, 両辺の実部どうし, 虚部どうしをそれぞれ等置すると, 次が得られる:

$$d[\log |Z_t|] = \left(a - \frac{1}{2} \right) \frac{X_t^2 - Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} dt + \frac{X_t}{X_t^2 + Y_t^2} dW_t, \quad (2.18)$$

$$d[\arg(Z_t)] = (1 - 2a) \frac{X_t Y_t}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} dt - \frac{Y_t}{X_t^2 + Y_t^2} dW_t. \quad (2.19)$$

注 2.2 (2.19) より,

$$a = \frac{1}{2} \iff \kappa = 4$$

のときに限り， $\arg(Z_t)$ が局所マルチンゲールになることが分かる．

また， $h_t(z)$ の満たす Loewner 方程式 (2.10) の両辺を z で微分してから $z = z_0$ とすると

$$\frac{dh'_t(z_0)}{dt} = -\frac{a}{(h_t(z_0) + W_t)^2} h'_t(z_0) = -\frac{ah'_t(z_0)}{Z_t^2},$$

つまり，

$$\frac{d}{dt} \log h'_t(z_0) = -\frac{a}{Z_t^2}$$

が得られるので，

$$\log h'_t(z_0) = -\int_0^t \frac{a}{Z_s^2} ds \quad (2.20)$$

が結論される．この両辺の実部をとると

$$\log |h'_t(z_0)| = -a \int_0^t \frac{X_s^2 - Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} ds \quad (2.21)$$

となるので，

$$|h'_t(z_0)| = \exp \left\{ -a \int_0^t \frac{X_s^2 - Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} ds \right\} \quad (2.22)$$

という表式が導かれる．

2.4 時間変更

次に従って，時間変更 $t \rightarrow \sigma(t)$ を行う：

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = X_{\sigma(t)}^2 + Y_{\sigma(t)}^2 = |Z_{\sigma(t)}|^2 \iff t = \int_0^{\sigma(t)} \frac{ds}{X_s^2 + Y_s^2}. \quad (2.23)$$

この時間変更は， Z_t を通じて W_t に依存しているのでランダムな時間変更であり，また flow の初期点 $z_0 = x_0 + iy_0$ に依存していることに注意せよ．この時間変更に伴って，

$$\tilde{Z}_t = Z_{\sigma(t)}, \quad \tilde{X}_t = X_{\sigma(t)}, \quad \tilde{Y}_t = Y_{\sigma(t)}$$

とする．すると，(2.13) より

$$d\tilde{Y}_t = -a\tilde{Y}_t dt, \quad \tilde{Y}_0 = y_0 \iff \tilde{Y}_t = y_0 e^{-at} \quad (2.24)$$

となり， \tilde{Y}_t の時間発展は決定論的であることになる．他方， \tilde{X}_t の時間発展は，1 次元標準 Brown 運動を改めて

$$\tilde{W}_t = \int_0^{\sigma(t)} \frac{1}{\sqrt{X_s^2 + Y_s^2}} dW_s \quad (2.25)$$

で与えることによって

$$d\tilde{X}_t = a\tilde{X}_t dt + \sqrt{\tilde{X}_t^2 + \tilde{Y}_t^2} d\tilde{W}_t \quad (2.26)$$

で記述される .

さらに ,

$$\tilde{h}_t(z) = h_{\sigma(t)}(z), \quad \tilde{K}_t = \frac{\tilde{X}_t}{\tilde{Y}_t}, \quad \tilde{N}_t = \frac{\tilde{X}_t^2}{\tilde{X}_t^2 + \tilde{Y}_t^2} = \frac{\tilde{K}_t^2}{\tilde{K}_t^2 + 1}$$

とおくことにすると , (2.16), (2.22) および伊藤の公式より , 次が導かれる :

$$d\tilde{K}_t = 2a\tilde{K}_t dt + \sqrt{\tilde{K}_t^2 + 1} d\tilde{W}_t, \quad (2.27)$$

$$d\tilde{N}_t = (1 - \tilde{N}_t)\{4(a - 1)\tilde{N}_t + 1\}dt + 2\sqrt{\tilde{N}_t(1 - \tilde{N}_t)}d\tilde{W}_t, \quad (2.28)$$

$$|\tilde{h}'_t(z_0)| = \exp\left\{-a \int_0^t \frac{\tilde{X}_s^2 - \tilde{Y}_s^2}{\tilde{X}_s^2 + \tilde{Y}_s^2} ds\right\} = e^{at} \exp\left\{-2a \int_0^t \tilde{N}_s ds\right\}. \quad (2.29)$$

2.5 後進 Loewner 方程式

2.2 節で SLE を負時刻へ拡張したが , $t \leq 0$ に対して , さらに時間の進みを逆転させて , 時間的に負の方向に時間発展させる方程式という意味で , 後進 Loewner 方程式を考えることにする . 以下では

$$h_{t,-}(\cdot) = h_{-t}(\cdot), \quad t \geq 0$$

と記すことにすると , 後進 Loewner 方程式は

$$\frac{d}{dt}h_{t,-}(z) = -\frac{d}{dt}h_{-t}(z) = -\frac{a}{h_{t,-}(z) + W_{t,-}}, \quad h_{0,-}(z) = z, \quad W_{t,-} = -B_{t,-} \quad (2.30)$$

で与えられることになる .

注 2.3 (2.9) より , $h'_t(z) = g'_t(\sqrt{\kappa}z)$ なので , 補題 2.2 より

$$\hat{f}'_t(z) \stackrel{d}{=} h'_{-t}(z/\sqrt{\kappa}) = h'_{t,-}(z/\sqrt{\kappa}), \quad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{H}$$

が成り立つ .

\mathbb{H} 上の $z_0 = x_0 + iy_0$ を初期点とする後進 SLE flow に対しては ,

$$Z_{t,-} = Z_{-t} = h_{t,-}(z_0) + W_{t,-} = X_{t,-} + iY_{t,-}$$

と書くことにする．すると，

$$\begin{aligned}
dZ_{t,-} &= -\frac{a}{Z_{t,-}}dt + dW_{t,-}, \\
dX_{t,-} &= -\frac{aX_{t,-}}{X_{t,-}^2 + Y_{t,-}^2}dt + dW_{t,-}, \\
dY_{t,-} &= \frac{aY_{t,-}}{X_{t,-}^2 + Y_{t,-}^2}dt, \\
d\left[\frac{X_{t,-}}{Y_{t,-}}\right] &= -2a\frac{X_{t,-}}{Y_{t,-}}\frac{1}{X_{t,-}^2 + Y_{t,-}^2}dt + \frac{1}{Y_{t,-}}dW_{t,-}, \\
|h'_{t,-}(z_0)| &= \exp\left\{a\int_0^t \frac{X_{s,-}^2 - Y_{s,-}^2}{(X_{s,-}^2 + Y_{s,-}^2)^2}ds\right\}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

が得られる．

これらに対しても，

$$\frac{d\sigma_{-}(t)}{dt} = X_{\sigma_{-}(t),-}^2 + Y_{\sigma_{-}(t),-}^2 = |Z_{\sigma_{-},-}(t)|^2 \iff t = \int_0^{\sigma_{-}(t)} \frac{ds}{X_{s,-}^2 + Y_{s,-}^2}. \tag{2.32}$$

によって，時間変更 $t \rightarrow \sigma_{-}(t)$ を行い， $\tilde{X}_{t,-} = X_{\sigma_{-}(t),-}$ ， $\tilde{h}_{t,-}(z) = h_{\sigma_{-}(t),-}(z)$ などと記すことにすると，

$$\tilde{Y}_{t,-} = y_0 e^{at}, \tag{2.33}$$

$$d\tilde{K}_{t,-} = -2a\tilde{K}_{t,-}dt + \sqrt{\tilde{K}_{t,-}^2 + 1}d\tilde{W}_{t,-}, \tag{2.34}$$

$$d\tilde{N}_{t,-} = (1 - \tilde{N}_{t,-})\{-4(a+1)\tilde{N}_{t,-} + 1\}dt + 2\sqrt{\tilde{N}_{t,-}}(1 - \tilde{N}_{t,-})d\tilde{W}_{t,-}, \tag{2.35}$$

$$|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| = \exp\left\{a\int_0^t \frac{\tilde{X}_{s,-}^2 - \tilde{Y}_{s,-}^2}{\tilde{X}_{s,-}^2 + \tilde{Y}_{s,-}^2}ds\right\} = e^{-at} \exp\left\{2a\int_0^t \tilde{N}_{s,-}ds\right\} \tag{2.36}$$

が成立することが分かる．ただし，

$$\tilde{W}_{t,-} = \int_0^{\sigma_{-}(t)} \frac{1}{\sqrt{X_{s,-}^2 + Y_{s,-}^2}}dW_{t,-} \tag{2.37}$$

は 1 次元標準 Brown 運動である．

2.6 Rohde-Schramm の局所マルチンゲール

Rohde-Schramm [9] は次の局所マルチンゲールを導入した．

命題 2.3 r と β が次の関係式を満たすとする：

$$r^2 - (2a+1)r + a\beta = 0. \tag{2.38}$$

このとき，

$$M_t^{\text{RS}} = \tilde{Y}_{t,-}^{\beta-(r/a)} \left(\frac{|\tilde{Z}_{t,-}|}{\tilde{Y}_{t,-}} \right)^{2r} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta \quad (2.39)$$

は局所マルチンゲールである．

証明. (2.33) と (2.36) より，(2.39) は

$$M_t^{\text{RS}} = y_0^{\beta-(r/a)} e^{-rt} (1 - \tilde{N}_{t,-})^{-r} \exp \left\{ 2a\beta \int_0^t \tilde{N}_{s,-} ds \right\} \quad (2.40)$$

と書き直せる．よって，(2.35) を用いると，伊藤の公式より，

$$dM_t^{\text{RS}} = 2r \sqrt{\tilde{N}_{t,-}} M_t^{\text{RS}} d\tilde{W}_{t,-}$$

であることが導かれる．■

上の結果から，

$$\mathbb{E}[M_t^{\text{RS}}] = \mathbb{E}[M_0^{\text{RS}}], \quad t \geq 0$$

であるが，(2.39) に (2.33) を用いると

$$M_t^{\text{RS}} = y_0^{\beta-(r/a)} e^{t(a\beta-r)} \left(\frac{|\tilde{Z}_{t,-}|^2}{\tilde{Y}_{t,-}} \right)^{2r} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta$$

と書けることと， $(\tilde{h}_{0,-}(z) = z$ より $\tilde{h}'_{0,-}(z) \equiv 1$ なので)

$$\mathbb{E}[M_0^{\text{RS}}] = M_0^{\text{RS}} = y_0^{\beta-(r/a)} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r}$$

であることより，

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{|\tilde{Z}_{t,-}|}{\tilde{Y}_{t,-}} \right)^{2r} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta \right] = \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} e^{t(r-a\beta)}$$

という等式が得られる．いま， $r \geq 0$ とすると， $(|\tilde{Z}_{t,-}|/\tilde{Y}_{t,-})^{2r} = \{(\tilde{X}_{t,-}^2 + \tilde{Y}_{t,-}^2)/\tilde{Y}_{t,-}^2\}^r \geq 1$ なので， $\mathbb{E}[(|\tilde{Z}_{t,-}|/\tilde{Y}_{t,-})^{2r} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta] \geq \mathbb{E}[|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta]$ である．さらに，Markov の不等式より，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbb{E} [|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)|^\beta] \geq \lambda^\beta \mathbb{P} [|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda]$$

であるから，次が得られることになる：

$$\mathbb{P} [|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda] \leq \lambda^{-\beta} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} e^{t(r-a\beta)}, \quad r \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.41)$$

さらに，次が導かれる．

系 2.4 $0 \leq r \leq 2a + 1$ である各 r に対して, $c = c(r, a) < \infty$ が存在して, 次が成立する :

$$\mathbb{P}\left[|h'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda\right] \leq c\lambda^{-\beta} \left(\frac{|z_0|}{y_0}\right)^{2r} \delta(y_0, \lambda),$$

$$0 \leq \forall t \leq 1, \quad 0 \leq \forall y_0 \leq 1, \quad e \leq \forall \lambda \leq y_0^{-1}. \quad (2.42)$$

ただしここで, $\beta = [(2a + 1)r - r^2]/a \geq 0$ であり,

$$\delta(y_0, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{(r/a)-\beta}, & r < a\beta \text{ のとき,} \\ -\log(\lambda y_0), & r = a\beta \text{ のとき,} \\ y_0^{\beta-(r/a)}, & r > a\beta \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.43)$$

証明. (2.31) より,

$$\frac{d}{dt} Y_{t,-} = \frac{a}{Y_{t,-}} \frac{Y_{t,-}^2}{X_{t,-}^2 + Y_{t,-}^2} \leq \frac{a}{Y_{t,-}}$$

なので,

$$Y_{t,-} \leq \sqrt{2at + y_0^2} \leq \sqrt{2a + 1}$$

である.(条件 $0 \leq t \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1$ を用いた.) 時刻 T を $\tilde{Y}_{T,-} = \sqrt{2a + 1}$ となる時刻とする. (2.33) が成り立つので, 具体的に

$$T = \frac{1}{a}(\log \sqrt{2a + 1} - \log y_0) \quad (2.44)$$

と求められる. よって,

$$\mathbb{P}\left[|h'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda\right] \leq \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda\right]$$

が成り立つ. いま, $\lambda = e^a \tilde{\lambda}$ とおいて, ある時刻 $0 \leq t^* \leq T$ で $|\tilde{h}'_{t^*,-}(z_0)| \geq e^a \tilde{\lambda}$ が成り立つとする. ところが, $\tilde{N}_{t,-} = \tilde{X}_t^2 / (\tilde{X}_t^2 + \tilde{Y}_t^2) \leq 1$ なので, (2.36) より, $s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} |\tilde{h}'_{t+s,-}(z_0)| &= e^{-at} \exp\left\{2a \int_0^t \tilde{N}_{s,-} ds\right\} e^{-as} \exp\left\{2a \int_t^{t+s} \tilde{N}_{s,-} ds\right\} \\ &\leq |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| e^{-as} e^{2as} = e^{as} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \end{aligned}$$

であるので, $j = [t^*] \equiv$ 「 t^* を超えない最大の整数」とすると,

$$|\tilde{h}'_{t^*,-}(z_0)| = |\tilde{h}'_{j+(t^*-j),-}(z_0)| \leq e^{a(t^*-j)} |\tilde{h}'_{j,-}(z_0)| \leq e^a |\tilde{h}'_{j,-}(z_0)|$$

である. よって, $|\tilde{h}'_{j,-}(z_0)| \geq \tilde{\lambda}$ が導かれる. したがって,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda\right] \leq \sum_{j=0}^{[T]} \mathbb{P}\left[|\tilde{h}'_{j,-}(z_0)| \geq \tilde{\lambda}\right]$$

が成り立つ．ここで再び (2.36) で $\tilde{N}_{t,-} \leq 1$ に注意すると, $t \geq 0$ に対して一般に $|\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \leq e^{-at}e^{2at} = e^{at}$ であるので, 上式の右辺の j の和は, $e^{aj} < \tilde{\lambda}$, つまり $j < (1/a) \log \tilde{\lambda}$ となるような j についてはとる必要はない．以上より,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}'_{t,-}(z_0)| \geq \lambda \right] \leq \sum_{j=[(1/a) \log \tilde{\lambda}] }^{[T]} \mathbb{P} \left[|\tilde{h}'_{j,-}(z_0)| \geq \tilde{\lambda} \right]$$

という上限が得られることになる．

ここで (2.41) を用いると

$$(\text{右辺}) \leq \tilde{\lambda}^{-\beta} \left(\frac{|z_0|}{y_0} \right)^{2r} \sum_{j=[(1/a) \log \tilde{\lambda}] }^{[T]} e^{j(r-a\beta)}$$

である．ところが,

$$\sum_{j=[(1/a) \log \tilde{\lambda}] }^{[T]} e^{j(r-a\beta)} \sim \begin{cases} e^{[(1/a) \log \tilde{\lambda}](r-a\beta)}, & r < a\beta \text{ のとき,} \\ T - (1/a) \log \tilde{\lambda}, & r = a\beta \text{ のとき,} \\ e^{T(r-a\beta)}, & r > a\beta \text{ のとき,} \end{cases}$$

であるから, $\tilde{\lambda} = e^{-a\lambda}$ であることと (2.44) より, (2.42) および (2.43) が成り立つように $c = c(r, a)$ がとれることが分かる．■

3 SLE の基本的な性質

3.1 SLE 曲線の存在

定理 3.1 $\kappa \neq 8$ のとき, 確率 1 で SLE_κ の跡は連続曲線である．

注 3.1 SLE_8 の跡も連続曲線であるが, それにはここで述べるものとは別の証明が必要である．文献 [8] を参照．

証明. SLE のスケールリング性 (命題 2.1 (i)) より, $t \in [0, 1]$ に対して示せばよい．命題 1.14 と補題 1.15 より, 確率 1 で, $\varepsilon > 0$ とランダムな定数 c が存在して,

$$|\hat{f}_{k2^{-2j}}^t(i2^{-j})| \leq c2^{j-\varepsilon}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^{2j} - 1\}, \quad (3.1)$$

$$|B_t - B_s| \leq c|t - s|^{1/2} |\log \sqrt{|t - s|}|^{1/2}, \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad (3.2)$$

が成り立つことを証明すれば十分である．((3.2) で $t = s + 2^{-2j}$ とおくと, $|B_t - B_s| \leq c2^{-j} |\log 2^{-j}|^{1/2} = (c\sqrt{\log 2})\sqrt{j}2^{-j}$ となり, 確かに条件式 (1.85) の形になる．)

(3.2) は, 1 次元 Brown 運動の一様連続性に関する結果

$$\mathbb{P} \left[\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\text{osc}(B, \delta, 1)}{\sqrt{2\delta \log(1/\delta)}} = 1 \right] = 1 \quad (3.3)$$

より，確率 1 で成立する．

(3.1) には，注 2.3 および Borel-Cantelli の補題より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{2j}-1} \mathbb{P} \left[|h'_{k2^{-2j},-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] < \infty \quad (3.4)$$

を示せばよい．ここで，系 2.4 において， $r = a + 1/4 < 2a + 1$ とおくと，

$$\beta = a + 1 + \frac{3}{16a} > 0, \quad a\beta - r = a^2 - \frac{1}{16} = \left(a - \frac{1}{4}\right) \left(a + \frac{1}{4}\right) \quad (3.5)$$

となる．(2.42) で $z_0 = i2^{-j}/\sqrt{\kappa}$, $\lambda = 2^{j-\varepsilon}$ とおくと， $|z_0| = y_0 = 2^{-j}/\sqrt{\kappa}$ なので

$$\mathbb{P} \left[|h'_{t,-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] \leq c2^{-\beta(j-\varepsilon)} \delta(2^{-j}/\sqrt{\kappa}, 2^{j-\varepsilon}).$$

$a = 2/\kappa > 1/4$, つまり $\kappa < 8$ とすると，(3.5) より $r < a\beta$ であるので，(2.43) の 1 行目が使えて，

$$\mathbb{P} \left[|h'_{t,-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] \leq c2^{-(j-\varepsilon)[2\beta-(r/a)]}$$

を得る．他方， $a < 1/4$, つまり $\kappa > 8$ とすると， $r > a\beta$ なので (2.43) の 3 行目より

$$\mathbb{P} \left[|h'_{t,-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] \leq c\kappa^{-[\beta-(r/a)]/2} 2^{-j[2\beta-(r/a)]+\beta\varepsilon}$$

を得る． $a \neq 1/4$ ($\kappa \neq 8$) ならば

$$2\beta - \frac{r}{a} = 2a + 1 + \frac{1}{8a} > 2$$

であるから，いずれの場合も

$$\mathbb{P} \left[|h'_{t,-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] \leq c2^{-(2+\varepsilon)j}$$

となるように $c > 0, \varepsilon > 0$ をとることができる．この上限は t には依存しないので

$$\sum_{k=0}^{2^{2j}-1} \mathbb{P} \left[|h'_{t,-}(i2^{-j}/\sqrt{\kappa})| \geq 2^{j-\varepsilon} \right] \leq 2^{2j} \times c2^{-(2+\varepsilon)j} = c2^{-\varepsilon j}, \quad \varepsilon > 0$$

であり，よって (3.4) が保証される．■

3.2 SLE 曲線のフラクタル次元

SLE $_{\kappa}$ 曲線 $\gamma[0, \infty)$ のフラクタル次元の κ 依存性を定めたい．ここでは，ボックス次元 (box dimension) を評価する．ボックス次元とは，各 $0 < R < \infty$ に対して， $\gamma[0, \infty) \cap \mathcal{B}(0, R)$ を被覆するのに必要な半径 ε の円板の個数の最小値が $\varepsilon \downarrow 0$ で $\varepsilon^{-\dim_b}$ と冪乗則に従って増大するとき，その指数 \dim_b の値のことをいう．この定義より

$$\mathbb{P}[\gamma[0, \infty) \cap \mathcal{B}(z, \varepsilon) \neq \emptyset] \asymp \varepsilon^{2-\dim_b}, \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad z \in \mathbb{H} \quad (3.6)$$

となる．以下では，

$$\dim_b = \dim_b(\kappa) = \begin{cases} 1 + \kappa/8, & 0 < \kappa < 8 \\ 2, & \kappa \geq 8 \end{cases} \quad (3.7)$$

であることを示す．

そのために， $x \in \mathbb{R}$ に対して，確率変数

$$\Delta_x = \text{dist}[x + i, \gamma[0, \infty) \cup \mathbb{R}]$$

を考える．SLE のスケールリング性 (命題 2.1 (i)) より

$$\text{dist}[x + iy, \gamma[0, \infty) \cup \mathbb{R}] \stackrel{d}{=} y\Delta_{x/y}, \quad y > 0$$

である．事象 $\{\gamma[0, \infty) \cap \mathcal{B}(x + i, \epsilon) \neq \emptyset\}$ と事象 $\{\Delta_x \leq \epsilon\}$ とは等価なので，(3.7) の主張は，(3.6) より，次の形の定理として与えることができる．

定理 3.2 (i) $\kappa \geq 8$ のとき，確率 1 ですべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\Delta_x = 0$ である．

(ii) $0 < \kappa < 8$ のとき，各 $M \geq 0$ に対して，次が成り立つような正の定数 $c = c(\kappa)$, $c'_{|x|} = c'_{|x|}(\kappa)$, $0 \leq |x| \leq M$ が存在する：

$$c'_{|x|}\epsilon^{1-(\kappa/8)} \leq \mathbb{P}[\Delta_x \leq \epsilon] \leq c\epsilon^{1-(\kappa/8)}, \quad 0 \leq |x| \leq M. \quad (3.8)$$

以下しばらく，この定理を証明するための準備をする．(2.9) で与えられた h_t は $D = H_t \rightarrow D' = \mathbb{H}$ の共形変換であるので，系 1.12 を $f = h_t$, $z = x + i$ として適用すると， $d = \text{dist}(x + i, \partial H_t)$, $d' = \text{dist}(h_t(x + i), \partial \mathbb{H}) = \text{dist}(h_t(x + i), \mathbb{R}) = \text{Im}(h_t(x + i))$ であるから，

$$\frac{\text{Im}(h_t(x + i))}{4\text{dist}(x + i, \partial H_t)} \leq |h'_t(x + i)| \leq \frac{4\text{Im}(h_t(x + i))}{\text{dist}(x + i, \partial H_t)}$$

が得られる．そこで

$$D_t(x) = \log \frac{|h'_t(x + i)|}{\text{Im}(h_t(x + i))} = \log |h'_t(x + i)| - \log \text{Im}(h_t(x + i)) \quad (3.9)$$

と定義すると，

$$\frac{1}{4} \text{dist}(x + i, \partial H_t) \leq e^{-D_t(x)} \leq 4 \text{dist}(x + i, \partial H_t) \quad (3.10)$$

が成り立つことになる． $Z_t = h_t(x + i) + W_t = X_t + iY_t$ とおくと， $Z_0 = X_0 + iY_0 = x + i$ であり，(2.21) より

$$\frac{d}{dt} \log |h'_t(x + i)| = -a \frac{X_t^2 - Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2},$$

であり，また (2.14) より

$$\frac{d}{dt} \log \text{Im}(h_t(x + i)) = \frac{d}{dt} \log Y_t = -a \frac{1}{X_t^2 + Y_t^2}$$

なので，

$$\frac{d}{dt}D_t(x) = -a \frac{X_t^2 - Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} + a \frac{1}{X_t^2 + Y_t^2} = \frac{2aY_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^2} \geq 0 \quad (3.11)$$

である．つまり， $D_t(x)$ は t の単調増加関数である．そこで $D(x) \equiv \lim_{t \uparrow T_{x+i}} D_t(x)$ とおくと， $\Delta_x = \inf_{t < T_{x+i}} \text{dist}(x+i, \partial H_t)$ であるから，(3.10) の $t \uparrow T_{x+i}$ の極限として

$$\frac{1}{4}\Delta_x \leq e^{-D(x)} \leq 4\Delta_x \quad (3.12)$$

が得られる．(3.12) より， $D(x) \geq r \implies \Delta_x \leq 4e^{-r}$ なので， $D(x) = \infty$ ならば $\Delta_x = 0$ であり，また，次が成り立つような定数 c, c'_M が得られれば，(3.8) が成立することになる：

$$c'_{|x|} e^{-r(4a-1)/(4a)} \leq \mathbb{P}[D(x) \geq r] \leq c e^{-r(4a-1)/(4a)}. \quad (3.13)$$

ただしここで， $a = 2/\kappa$ であることを用いた．(3.11) より

$$D(x) = 2a \int_0^{T_{x+i}} \frac{Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} ds \quad (3.14)$$

である．

定理 3.2(i) の証明. (3.14) において，2.4 節で行った時間変更 (2.23): $t \rightarrow \sigma(t)$ を施す．また， $\tilde{D}_t(x) = D_{\sigma(t)}(x)$ と書く．

$$\tilde{C}_t = \log \tilde{K}_t \iff \tilde{K}_t = e^{\tilde{C}_t}$$

とおくと， $\tilde{K}_t = \tilde{X}_t/\tilde{Y}_t = X_{\sigma(t)}/Y_{\sigma(t)}$ に対する方程式 (2.27) より，伊藤の公式に従って計算すると

$$d\tilde{C}_t = \left[2 \left(a - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} e^{-2\tilde{C}_t} \right] dt + \sqrt{1 + e^{-2\tilde{C}_t}} d\tilde{W}_t \quad (3.15)$$

が得られる．この \tilde{C}_t を用いると，

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}_t(x) = \frac{2a}{1 + e^{2\tilde{C}_t}}$$

と書けるので，(3.14) は

$$D(x) = 2a \int_0^\infty \frac{ds}{1 + e^{2\tilde{C}_s}} \quad (3.16)$$

と表せる． $a \leq 1/4 \iff \kappa \geq 8$ のときは，(3.15) のドリフト項は負なので，各 $T > 0$ に対して， $T^* \leq s \leq T^* + 1$ では $\tilde{C}_s \leq 0$ となるような $T^* > T$ が確率 1 で存在することになる．よって， $\kappa \geq 8$ では，確率 1 で $D(x) = \infty$ である．■

定理 3.2 (ii) の証明のために，次式に従って，さらなる時間変更 $t \rightarrow \hat{\sigma}(t)$ を行う：

$$\frac{d\hat{\sigma}(t)}{dt} = \frac{1}{\tilde{K}_{\hat{\sigma}(t)}^2 + 1}.$$

そして, $\widehat{K}_t = \widetilde{K}_{\widehat{\sigma}(t)}$ と書くことにすると,

$$d\widehat{K}_t = \frac{2a\widehat{K}_t}{1 + \widehat{K}_t^2} dt + d\widehat{W}_t \quad (3.17)$$

となる. ここで, \widehat{W}_t は時間変更後の 1 次元標準 Brown 運動であり,

$$\widehat{W}_t = \int_0^{\widehat{\sigma}(t)} \sqrt{\widetilde{K}_s^2 + 1} d\widetilde{W}_s$$

で与えられる. この 2 度目の時間変更後の変数を用いると, (3.16) は

$$D(x) = \int_0^\infty \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_t^2)^2} dt \quad (3.18)$$

と表せる. $a > 1/4 \iff \kappa < 8$ では $D(x) < \infty$ である.

ここで ψ を $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ のある C^2 級連続関数とし, また $\theta \in \mathbb{R}$ として

$$M_t^L \equiv \psi(\widehat{K}_t) \exp \left\{ i\theta \int_0^t \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_s^2)^2} ds \right\} \quad (3.19)$$

とおく. 伊藤の公式より

$$\begin{aligned} dM_t^L &= \psi'(\widehat{K}_t) \exp \left\{ i\theta \int_0^t \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_s^2)^2} ds \right\} d\widehat{W}_t \\ &+ \left[\psi'(\widehat{K}_t) \frac{2a\widehat{K}_t}{1 + \widehat{K}_t^2} + \frac{1}{2} \psi''(\widehat{K}_t) + i\theta \psi'(\widehat{K}_t) \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_t^2)^2} \right] \exp \left\{ i\theta \int_0^t \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_s^2)^2} ds \right\} dt \end{aligned}$$

を得る. ただしここで, (3.17) を用いた. よって, ψ として

$$\frac{1}{2} \psi''(x) + \frac{2ax}{1 + x^2} \psi'(x) + \frac{2i\theta a}{(1 + x^2)^2} \psi(x) = 0 \quad (3.20)$$

の解を用いると, M_t^L は局所マルチンゲールであることになる. さらにいま, $x \rightarrow \infty$ で $\psi(x) \rightarrow 1$ となる解を選ぶものと仮定する.

マルチンゲール収束定理より

$$\mathbb{E}[M_0^L] = \mathbb{E}[M_t^L] = \mathbb{E}[M_\infty^L], \quad 0 \leq \forall t \leq \infty$$

が成り立つが, $\widehat{K}_0 = \widehat{X}_0/\widehat{Y}_0 = x/1 = x$ なので

$$\mathbb{E}[M_0^L] = \mathbb{E}[\psi(\widehat{K}_t)] = \psi(x)$$

であり, また, $t \rightarrow \infty$ で $\widehat{K}_t \rightarrow \widehat{K}_\infty = \infty$ となるので,

$$\mathbb{E}[M_\infty^L] = \mathbb{E} \left[\psi(\widehat{K}_\infty) \exp \left\{ i\theta \int_0^\infty \frac{2a}{(1 + \widehat{K}_t^2)^2} dt \right\} \right] = \mathbb{E}[e^{i\theta D(x)}]$$

であるから, 確率変数 $D(x)$ の特性関数

$$\Psi_{D(x)}(\theta) \equiv \mathbb{E}[e^{i\theta D(x)}] \quad (3.21)$$

は $\psi(x)$ で与えられることになる.

補題 3.3 $\kappa < 8$ のとき，確率 1 で $D(x) < \infty$ であり，その特性関数 (3.21) は

$$\begin{aligned} \Psi_{D(x)}(\theta) &= \frac{\Gamma(a + \sqrt{(a-1/2)^2 - ia\theta})\Gamma(a - \sqrt{(a-1/2)^2 - ia\theta})}{\sqrt{\pi}\Gamma(2(a-1/4))} \\ &\quad \times F\left(\alpha_+(\theta), \alpha_-(\theta), \frac{1}{2}; \frac{x^2}{1+x^2}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

で与えられる．ただしここで， $\Gamma(z)$ はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}ds, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (3.23)$$

であり， $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ は Gauss の超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (c)_k \equiv \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)} = c(c+1)\cdots(c+k-1), \quad (c)_0 \equiv 1 \quad (3.24)$$

である．また，

$$\alpha_{\pm}(\theta) = \frac{1}{2} - a \pm \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - ia\theta} \quad (3.25)$$

である．

証明. (3.20) において $\psi(x) = f(u)$, $u = x^2/(1+x^2)$ とおくと，

$$u(1-u)f''(u) + \left[\frac{1}{2} + 2(a-1)u\right]f'(u) + ia\theta f(u) = 0$$

となる．これは Gauss の超幾何方程式

$$u(1-u)F'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)u\}F' - \alpha\beta F = 0 \quad (3.26)$$

で特に， $\alpha\beta = -ia\theta$, $\alpha + \beta = -2a + 1$, $\gamma = 1/2$ とした場合に他ならない．よって，(3.25) とおくと，解は

$$f(u) = cF\left(\alpha_+, \alpha_-; \frac{1}{2}; u\right)$$

と求められる． $x \rightarrow \infty$ で $u = x^2/(1+x^2) \rightarrow 1$ なので，条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 1$ は $f(1) = 1$ に等しい．Gauss の超幾何関数 (3.24) は

$$\lim_{x \uparrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

という性質を持つので，

$$c = \frac{1}{F(\alpha_+, \alpha_-, 1/2; 1)} = \frac{\Gamma(1/2 - \alpha_+)\Gamma(1/2 - \alpha_-)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2 - \alpha_+ - \alpha_-)}$$

と定まる． $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ であるから，(3.22) が得られる．■

定理 3.2(i) の証明．まず， $x = 0$ の場合を考えることにする．このときには $F(\alpha_+, \alpha_-, \gamma; 0) = 1$ である．ガンマ関数 (3.23) は

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-s} s^{z-1} ds$$

と展開できるので， $|z| < a+1$ で解析的である関数 $A(z)$ を用いて， $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\Gamma(a+z)\Gamma(a-z) = \frac{1}{a^2 - z^2} + A(z)$$

と表せる．ここで， $z = \sqrt{(a-1/2)^2 - ia\theta}$ とすると， $a^2 - z^2 = a\{(4a-1)/(4a) + i\theta\}$ なので，

$$\Psi_{D(0)}(\theta) = \frac{c(a)}{\lambda + i\theta} + \tilde{A}(\theta), \quad \lambda = \frac{4a-1}{4a}, \quad c(a) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}\Gamma(2(a-1/4))} \quad (3.27)$$

と表せる．ただし， $\tilde{A}(\theta)$ は $\{|\theta| < \lambda + \varepsilon\}$, $\exists \varepsilon > 0$ で解析的な関数である．特性関数を逆フーリエ変換すると分布関数になるので，(3.27) から，

$$\mathbb{P}[D(0) \geq r] = \text{const.} e^{-\lambda r} + o(e^{-(\lambda+\varepsilon)r}), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

であることが導かれる．よって，(3.13) が成り立つような定数 c, c'_0 を与えることができる． $x \neq 0$ の場合も同様である．したがって，(3.8) の成立が結論される．■

一般に，フラクタル図形のボックス次元 \dim_b は，Hausdorff 次元 \dim_H より小さくなることはないので，(3.7) の結果は，SLE $_{\kappa}$ 曲線 $\gamma[0, \infty)$ の Hausdorff 次元 \dim_H の上限を与えたことになる．上では

$$\mathbb{P}\left[\text{dist}[z_1, \gamma[0, \infty) \cup \mathbb{R}] \leq \epsilon\right] \asymp \epsilon^{2-d}, \quad \epsilon \downarrow 0 \quad (3.29)$$

という評価を， $z_1 = x + i \in \mathbb{H}$ に対して行ったが，2点 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ に対して

$$\mathbb{P}\left[\text{dist}[z_1, \gamma[0, \infty) \cup \mathbb{R}] \leq \epsilon, \text{dist}[z_2, \gamma[0, \infty) \cup \mathbb{R}] \leq \epsilon\right] \asymp \epsilon^{2-d} \left(\frac{|z_1 - z_2|}{\epsilon}\right)^{-(2-d)} \quad (3.30)$$

という評価が得られれば， \dim_H の下限を与えることができる．Beffara [2] はこれを行い，次の定理を証明している．また，Lawler [7] は Frostman の補題（例えば [3] を参照）を用いた別証明を与えている．

定理 3.4 SLE $_{\kappa}$ 曲線 $\gamma[0, \infty)$ の Hausdorff 次元 $\dim_H(\kappa)$ は

$$\dim_H(\kappa) = \begin{cases} 1 + \kappa/8, & 0 < \kappa < 8 \\ 2, & \kappa \geq 8 \end{cases} \quad \text{a.s.} \quad (3.31)$$

である．

4 SLE 曲線の 3 つの相

4.1 Bessel 過程との対応関係

SLE flow の方程式 (2.11) で $z_0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$ とすると, これは D 次元 Bessel 過程 BES_D に対する確率微分方程式 (付録 A.2 を参照)

$$dX_t^x = \frac{D-1}{2} \frac{1}{X_t^x} dt + dW_t, \quad X_0^x = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.1)$$

で

$$\frac{D-1}{2} = a \iff \kappa = \frac{4}{D-1} \iff D = \frac{4}{\kappa} + 1 \quad (4.2)$$

とおいたものに等しい. 各 x に対して同じ 1 次元標準 Brown 運動 W_t をとり, $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}$ の初期値 x 依存性を考える (Bessel flow). $x < y$ なら $X_t^x < X_t^y, \forall t \leq T_x$ なので, 一般に $T_x \leq T_y$ である. 次が成立する (付録 A.2 を参照).

- (1) $D \geq 2$ のとき, 確率 1 で $T_x = \infty, \forall x > 0$.
- (2) $1 \leq D < 2$ のとき, 確率 1 で $T_x < \infty, \forall x > 0$.
 - (2a) $\frac{3}{2} < D < 2$ のとき, $0 < x < y$ に対して, $\mathbb{P}[T_x = T_y] > 0$.
 - (2b) $1 \leq D \leq \frac{3}{2}$ のとき, $0 < x < y$ ならば確率 1 で $T_x < T_y$.

4.2 SLE の 3 つの相

これに対応して, SLE_κ で生成される曲線 γ には, 径数 κ の値に応じて, 次のような 3 つの相があることが導かれる (図 4 参照).

定理 4.1 (i) $0 < \kappa \leq 4$ のとき, γ は単純曲線であり, $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ である. また, このとき確率 1 で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty. \quad (4.3)$$

- (ii) $4 < \kappa < 8$ のとき, γ は自分自身や実軸と接することがあるが, 確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \quad (4.4)$$

である. よって, $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$ である. しかし

$$\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \quad (4.5)$$

である. つまり, \mathbb{H} 全体を埋めつくすことはない.

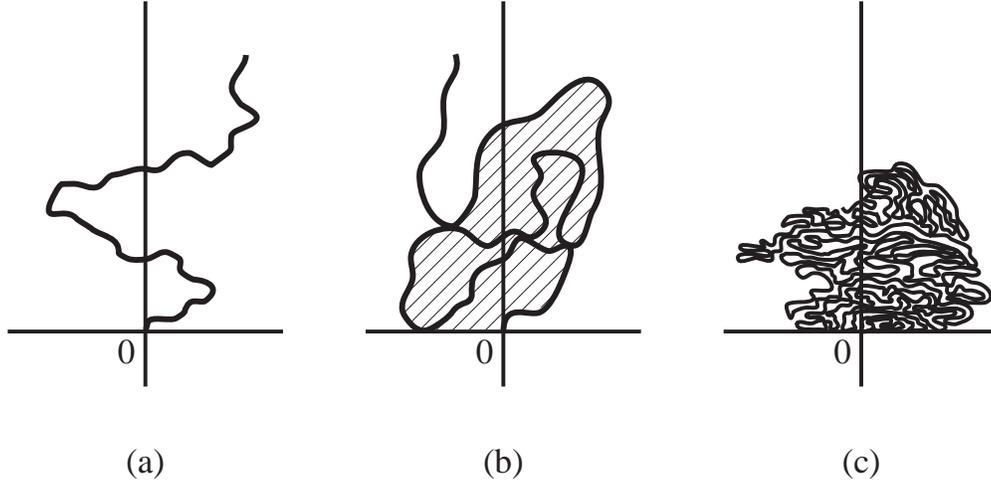


図 4: (a) $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子: 実軸に接することのない単純曲線. (b) $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子: 自分自身や実軸に接するが十文字に交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面 \mathbb{H} を覆いつくしていき, 曲線自身で \mathbb{H} が埋めつくされることはない. (c) $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子: 上半平面 \mathbb{H} を埋めつくしていく曲線.

(iii) $\kappa \geq 8$ のとき, γ は $\overline{\mathbb{H}}$ のすべての点を埋めつくす:

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}. \quad (4.6)$$

いずれの場合も, SLE_κ 曲線 γ は $\gamma(0) = 0$ から $\lim_{t \uparrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至り, $\gamma[0, \infty) \subset \overline{\mathbb{H}}$ であるランダムな曲線である. 以下では, SLE_κ 曲線 γ の確率測度を $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$ と記すことにする.

5 局所性と制限性

5.1 局所性 ($\kappa = 6$)

\mathbb{H} -hull $B \in \mathcal{Q}$ のうち, $0 \notin \overline{B}$ であるもの全体の集合を \mathcal{Q}_\pm と書くことにする. $B \in \mathcal{Q}_\pm$ に対して, $\mathbb{H} \setminus B \rightarrow \mathbb{H}$ の共形変換で次の条件を満たすものを Φ_B と書くことにする (これは, 一意的に定まる):

$$\Phi_B(z) = z + \frac{c}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

ここで, 係数 $c = \text{hcap}(B)$ である. SLE_κ 曲線 γ に対して

$$\tau_B = \inf \left\{ t \geq 0 : \gamma(t) \in B \right\}$$

とする. $t < \tau_B$ の間は, γ は \mathbb{H} 内の非有界な部分領域 $D \equiv \mathbb{H} \setminus B$ 内に制限されていることになる (図 5 参照).

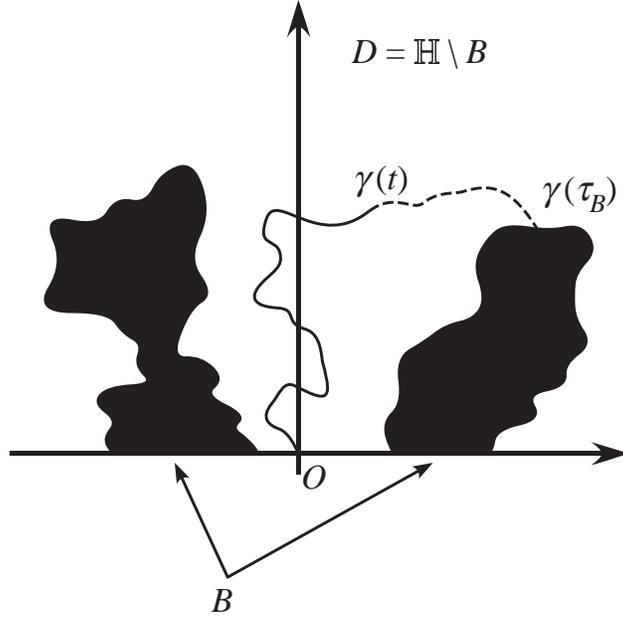


図 5: \mathbb{H} から $B \in \mathcal{Q}_{\pm}$ を除いた非有界領域 $D = \mathbb{H} \setminus B$ を考える . $t < \tau_B$ の間は , 曲線 γ は \mathbb{H} の部分領域 D 内に制限されていることになる .

以下 , $t < \tau_B$ とする . SLE 曲線 $\gamma(0, t]$ の Φ_B による像を

$$\gamma_B(0, t] = \Phi_B(\gamma(0, t]), \quad t < \tau_B$$

と書くと , これは $\overline{\mathbb{H}}$ 内の曲線となる . この変換を図 6 の [左上 \Rightarrow 右上] で表した . この変換後の曲線 $\gamma_B(0, t]$ に対する \mathbb{H} -hull を $K_{t,B}$ と書き , $H_{t,B} = \mathbb{H} \setminus K_{t,B}$ とする . γ の確率測度 $\mu_{(\mathbb{H}, 0, \infty)}^{\kappa}$ の共形不変性より , これに対応して

$$\text{SLE } g_{t,B} : H_{t,B} \rightarrow \mathbb{H}$$

が一意的に定まる . これが図 6 の [右上 \Rightarrow 右下] に図示した変換である . 曲線 γ_B は共形変換 Φ_B により変換されているので , 元の SLE 曲線 γ とはその径数付けに差が生じる . そのため , γ_B の従う方程式は (2.7) に変更を加えたものになる . 注 1.2 で述べたように , Loewner 方程式 (2.7) では , $\text{hcap}(\gamma(0, t]) = 2t$ となるように曲線の径数付けをしたからである .

$g_{t,B}$ に対する方程式を求めるために , 図 6 の [左上 \Rightarrow 左下] に図示したように , 変換前の SLE g_t を考えることにする . 変換 g_t により , H_t は \mathbb{H} に共形変換され , 先端点 $\gamma(t)$ の像として実軸上に $U_t = g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ が得られる . それに伴い , $B \in \mathcal{Q}_{\pm}$ は $g_t(B) \in \mathcal{Q}_{\pm}$ に変換される . 図 6 の右下に描いた $g_{t,B}$ の像は , 図の左下に描いた g_t の像に次の共形変換を施すことによって得られるはずである :

$$\Phi_{t,B}(\cdot) \equiv \Phi_{g_t(B)}(\cdot). \quad (5.1)$$

ここで , 補題 1.6 を $A = \gamma(t, t + dt]$, $\varphi = \Phi_{t,B}$, $x_0 = U_t = \sqrt{\kappa}B_t$ として適用すると ,

$$\frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma_B(0, t]) = \frac{d}{dt} \text{hcap}(\Phi_{t,B}(\gamma(0, t])) = (\Phi'_{t,B}(U_t))^2 \frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma(0, t]) = 2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2$$

が得られる．よって， $g_{t,B}$ の従う方程式は

$$\frac{d}{dt}g_{t,B}(z) = \frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2}{g_{t,B}(z) - U_{t,B}} \quad (5.2)$$

であることが分かる．ただしここで， $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$ に対して，

$$U_{t,B} = \Phi_{t,B}(U_t) = g_{t,B}(\gamma_B(t)) \quad (5.3)$$

である．

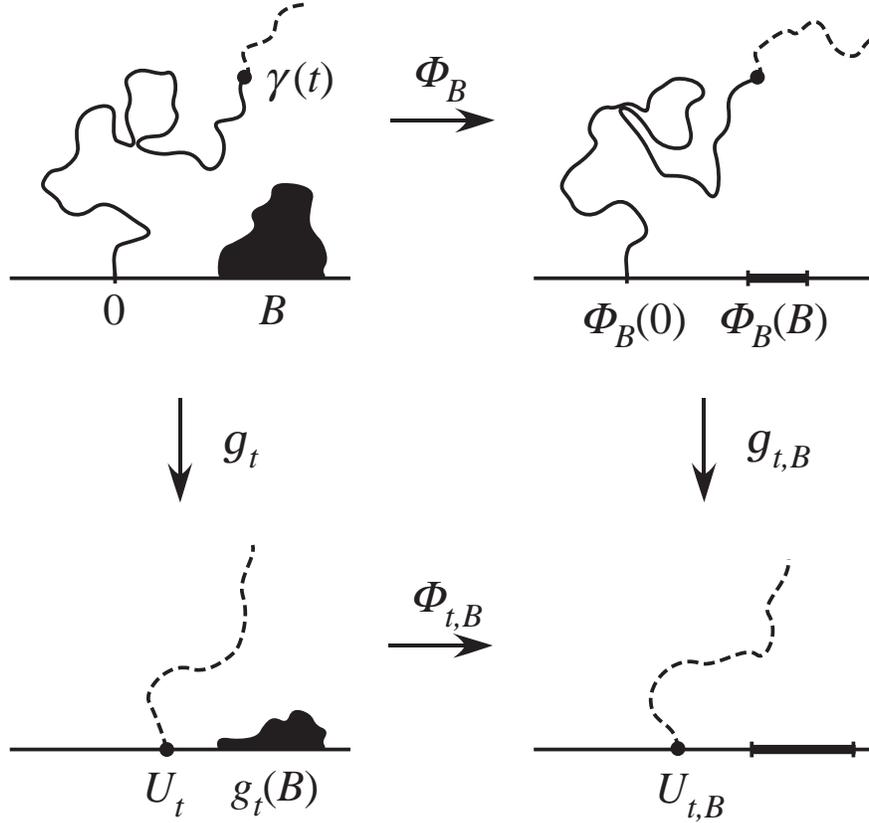


図 6: [左上 \Rightarrow 右上] Φ_B : B を消去し， $D = \mathbb{H} \setminus B$ を \mathbb{H} 全体に写す共形変換． SLE_κ 曲線 $\gamma(0, t]$, $t < \tau_B$ は，曲線 $\gamma_B(0, t] = \Phi_B(\gamma(0, t])$ に変換される．[左上 \Rightarrow 左下] g_t : SLE_κ 曲線 $\gamma(0, t]$ を消去する共形変換．[右上 \Rightarrow 右下] $g_{t,B}$: 曲線 $\gamma_B(0, t]$ を消去する共形変換．[左下 \Rightarrow 右下] これが $\Phi_{t,B} \equiv \Phi_{g_t(B)}$ であるが，この可換図から，この変換は $g_{t,B} \circ \Phi_B \circ g_t^{-1}$ に等しいことが分かる．

$U_{t,B}$ に対して伊藤の公式を用いると， $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$ なので

$$dU_{t,B} = \left[\dot{\Phi}_{t,B}(U_t) + \frac{\kappa}{2}\Phi''_{t,B}(U_t) \right] dt + \sqrt{\kappa}\Phi'_{t,B}(U_t)dB_t$$

を得る．

$$\dot{\Phi}_{t,B}(U_t) \equiv \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z), \quad \Phi'_{t,B}(U_t) \equiv \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{\partial}{\partial z}\Phi_{t,B}(z), \quad \Phi''_{t,B}(U_t) \equiv \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_{t,B}(z)$$

と書くと，付録 A.3 の (A.52) より

$$\dot{\Phi}_{t,B}(U_t) = -3\Phi_{t,B}''(U_t)$$

なので，この式は

$$dU_{t,B} = \left[\frac{\kappa}{2} - 3 \right] \Phi_{t,B}''(U_t) dt + \sqrt{\kappa} \Phi_{t,B}'(U_t) dB_t \quad (5.4)$$

と書き直せる．ランダムな時間変更 $t \mapsto r(t)$ を

$$t = \int_0^{r(t)} \Phi'_{s,B}(U_s)^2 ds$$

に従って行い， $\tilde{U}_{t,B} \equiv U_{r(t),B}$ とおくと，(5.4) は

$$d\tilde{U}_{t,B} = -b(\kappa) \frac{\Phi''_{r(t),B}(U_{r(t)})}{\Phi'_{r(t),B}(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t \quad (5.5)$$

と変換される．ただし，

$$b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (5.6)$$

であり，

$$\tilde{B}_t \equiv \int_0^{r(t)} \Phi'_{s,B}(U_s) dB_s$$

は 1 次元標準 Brown 運動である． $\tilde{g}_{t,B}(z) \equiv g_{r(t),B}(z)$ とすると，(5.2) は

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}_{t,B}(z) = \frac{2}{\tilde{g}_{t,B}(z) - \tilde{U}_{t,B}}$$

と変換される．

$\kappa = 6$ のときに限り $b(\kappa) = 0$ となり，(5.5) は $d\tilde{U}_{t,B} = \sqrt{6} d\tilde{B}_t$ となる．このときは，任意の $A \in \mathcal{Q}_\pm$ に対して， $g_t(z)$ も $\tilde{g}_{t,B}(z)$ もともに， $U_t \stackrel{d}{=} \sqrt{6} B_t$ で駆動される SLE_6 ，つまり (2.7) で $\kappa = 6$ とした式を満たす．言い換えると，部分領域 $D = \mathbb{H} \setminus B, B \in \mathcal{Q}_\pm$ に制限された γ を Φ_B で共形変換した像 $\gamma_B(0, t] = \Phi_B(\gamma(0, t])$ ， $t < \tau_B$ は，制限のない SLE_6 の時間変更と分布が等しいということである．このような不変性を局所性 (locality property) という．

定理 5.1 SLE_κ 曲線の確率測度 $\mu_{(\mathbb{H}, 0, \infty)}^\kappa$ は $\kappa = 6$ のときに限り局所性を持つ．

注 5.1 2次元格子上的臨界パーコレーション模型に対して定義される浸透探索過程 (percolation exploration process) の連続極限は局所性を持つ．三角格子上的臨界サイト・パーコレーション模型に対しては，その連続極限の確率測度が共形不変を持つことが Smirnov [10] によって証明された．このことから，臨界点での浸透探索過程の連続極限は SLE_6 に収束することが結論される．

5.2 制限性 ($\kappa = 8/3$)

$\kappa \neq 6$ のときは (5.5) にはドリフト項があるので, $\tilde{U}_{t,B}$ はマルチンゲールではない. しかし, 次のようにして別の局所マルチンゲール $M_{t,B}^{\text{rest}}$ を得ることができる.

b を未定定数として $(\Phi'_{t,B}(U_t))^b$ という量を考える. 伊藤の公式を用いると, 付録 A.3 に示した計算の結果, 次の確率微分方程式を導くことができる:

$$d(\Phi'_{t,B}(U_t))^b = b(\Phi'_{t,B}(U_t))^b \left[\sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{(\Phi'_{t,B}(U_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\Phi'''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} \right\} dt \right]. \quad (5.7)$$

ここで b を (5.6) で定義された $b(\kappa)$ とする. すると (5.7) は

$$d(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} = b(\kappa)(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} \left[\sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} dB_t - \frac{8-3\kappa}{6} \mathcal{S}\Phi_{t,B}(U_t) dt \right] \quad (5.8)$$

となる. ただしここで, $\mathcal{S}f$ は関数 f の Schwarz 微分 (1.20) である.

新たにパラメータ c を導入して

$$M_{t,B}^{\text{rest}} = (\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_{s,B}(U_s) ds \right\}$$

とおくと,

$$dM_{t,B}^{\text{rest}} = d(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_{s,B}(U_s) ds \right\} - (\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_{s,B}(U_s) ds \right\} \frac{c}{6} \mathcal{S}\Phi_{t,B}(U_t) dt$$

なので, (5.8) を代入すると

$$dM_{t,B}^{\text{rest}} = b(\kappa) \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} M_{t,B}^{\text{rest}} \sqrt{\kappa} dB_t - \frac{1}{6} \left\{ c + (8-3\kappa)b(\kappa) \right\} \mathcal{S}\Phi_{t,B}(U_t) M_{t,B}^{\text{rest}} dt$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} c = c(\kappa) &= (3\kappa - 8)b(\kappa) \\ &= \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} \end{aligned} \quad (5.9)$$

とおくと,

$$dM_{t,B}^{\text{rest}} = b(\kappa) \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} M_{t,B}^{\text{rest}} \sqrt{\kappa} dB_t$$

となるので ,

$$M_{t,B}^{\text{rest}} = (\Phi'_{t,B}(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_{s,B}(U_s) ds \right\} \quad (5.10)$$

は局所マルチンゲールであることになる .

$\Phi_{t,B}(z)$ は共形変換 : $\mathbb{H} \setminus g_t(B) \rightarrow \mathbb{H}$ であるので ,

$$f(z) \equiv \frac{\Phi_{t,B}(U_t + z) - \Phi_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} \quad (5.11)$$

を考えると , これは共形変換 : $\mathbb{H} \setminus (g_t(B) - U_t) \rightarrow \mathbb{H}$ であって $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たすものである . よって , 補題 1.7 より , $\mathcal{S}f(0) = -6 \text{hcap}(A), A = \varpi(g_t(B) - U_t)$ が成り立つ . 線形変換 (5.11) で Schwarz 微分は $\mathcal{S}f(z) = \mathcal{S}\Phi_{t,B}(U_t + z)$ となるだけなので , 結局

$$\mathcal{S}\Phi_{t,B}(U_t) = -6 \text{hcap}(A) \leq 0, \quad A = \varpi(g_t(B) - U_t) \quad (5.12)$$

が結論される . また , \mathbb{H} -excursion を用いた表式 (1.26) が示唆するように , $\Phi'_{t,B}(U_t)$ は \mathbb{H} -excursion の軌跡とある有界領域との非交差確率を表すので , $0 < \Phi'_{t,B}(U_t) \leq 1$ である . $\kappa \leq 8/3$ のときは $c(\kappa) \leq 0$ であり , また (5.6) より , このときは $b(\kappa) > 0$ なので ($\kappa \leq 6$ で $b(\kappa) \geq 0$) , $M_{t,B}^{\text{rest}} \leq 1$ である . したがって $M_{t,B}^{\text{rest}}$ はマルチンゲールである .

特に , $\kappa = 8/3$ の場合を考えることにする . このときは , (5.6) より $b = 5/8$ であり , また (5.9) より $c = 0$ なので , $M_{r,B}^{\text{rest}} = (\Phi'_{t,B}(U_t))^{5/8}$ である . いま , 各 $\varepsilon > 0$ に対して , $\tau_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \text{dist}[\gamma(t), B] \leq \varepsilon\}$ として , $M_{t,B}^{\text{rest}}(\varepsilon) \equiv (\Phi'_{t \wedge \tau_\varepsilon, B}(U_{t \wedge \tau_\varepsilon}))^{5/8}$ とすると , これは一様有界マルチンゲールである . よって ,

$$\mathbb{E}[M_{0,B}^{\text{rest}}(\varepsilon)] = \mathbb{E}[M_{t,B}^{\text{rest}}(\varepsilon)] = \mathbb{E}[M_{\infty,B}^{\text{rest}}(\varepsilon)], \quad 0 \leq \forall t \leq \infty \quad (5.13)$$

が成り立つ . ここで $\mathbb{E}[M_{0,B}^{\text{rest}}(\varepsilon)] = (\Phi'_B(0))^{5/8}$ であり , また

$$\mathbb{E}[M_{\infty,B}^{\text{rest}}(\varepsilon)] = \mathbb{E}[M_{\infty,B}^{\text{rest}}; \tau_\varepsilon = \infty] + \mathbb{E}[M_{\tau_\varepsilon, B}^{\text{rest}}; \tau_\varepsilon < \infty]$$

である . Girsanov の定理を用いると , 部分領域 $\mathbb{H} \setminus B$ 内の制限された $\text{SLE}_{8/3}$ 曲線にマルチンゲール $M_{\infty \wedge \tau_\varepsilon, B}^{\text{rest}}$ の重みを付けた曲線が従う確率法則は , 元の (制限なしの) \mathbb{H} 内の $\text{SLE}_{8/3}$ 曲線を Φ_B^{-1} で共形変換した (図 6 の右上 \implies 左上) 像が従う確率法則に等しいことになる . $\kappa = 8/3 \leq 4$ なので , 定理 4.1 (i) より , 元の $\text{SLE}_{8/3}$ 曲線は確率 1 で $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ であるから , $\Phi_B^{-1}(\gamma(0, \infty)) \subset \mathbb{H} \setminus B$ であり , よって

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}[M_{\tau_\varepsilon, B}^{\text{rest}}; \tau_\varepsilon < \infty] = 0$$

である . また , $t \rightarrow \infty$ で $\gamma(t) \rightarrow \infty$ であり , かつ $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B$ ならば , $\Phi'_{t,B}(U_t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$ であることを示すことができる . 以上より , (5.13) で $\varepsilon \downarrow 0$ の極限をとると ,

$$\begin{aligned} (\Phi'_B(0))^{5/8} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}[M_{\infty, B}^{\text{rest}}; \tau_\varepsilon = \infty] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B\}] = \mathbb{P}[\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B] \end{aligned}$$

という等式が得られる . 以上の結果をまとめると次のようになる .

定理 5.2 $\kappa = 8/3$ のとき , 任意の $B \in \mathcal{Q}_\pm$ に対して

$$\mathbb{P}[\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B] = (\Phi'_B(0))^{5/8} \quad (5.14)$$

である . そして ,

$$\frac{d\mu_{(\mathbb{H} \setminus B; 0, \infty)}}{d\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}}(\gamma) = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B\} \quad (5.15)$$

が成り立つ .

(5.15) の性質を制限性 (restriction property) という . また , (5.14) の右辺に現れた指数 $b(8/3) = 5/8$ を制限指数とよぶ . よって , 次のようにいうことができる .

定理 5.3 SLE $_{\kappa}$ 曲線の確率測度 $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^{\kappa}$ は $\kappa = \frac{8}{3}$ のときに限り制限性を持つ . そのときの制限指数は $b(8/3) = 5/8$ である .

(5.15) の関係式は , 次のように拡張することができる [6] : $\kappa \leq 4, B \in \mathcal{Q}_\pm$ に対して

$$\frac{d\mu_{(\mathbb{H} \setminus B; 0, \infty)}}{d\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}}(\gamma) = M_{\infty, B}^{\text{rest}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H} \setminus B\} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^\infty \mathcal{S}\Phi_{s, B}(U_s) ds \right\}. \quad (5.16)$$

注 5.2 平面格子上の自己回避ウォーク (self-avoiding walk, SAW) の連続極限として得られるランダムな曲線の確率測度は共形共変性を持つことが予想されているが , まだ証明されていない . SAW の確率測度は制限性を持つので , その連続極限の共形共変性が証明されれば , SAW の連続極限が SLE $_{8/3}$ 曲線であることが結論される .

A 付録

A.1 Poisson 核の計算について

命題 1.3 の設定を考える . $z \in D$ に対して , ∂D 上の確率測度 $\text{hm}(z, D; \cdot)$ を

$$\text{hm}(z, D; V) = \mathbf{P}^z[\mathbf{B}_{\tau_D} \in V], \quad V \subset \partial D \quad (A.1)$$

で定義する . これは調和測度とよばれる . これを用いると , (1.7) は

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) \text{hm}(z, D; dw) \quad (A.2)$$

と書き直せる . さらにこれが , 境界 ∂D に沿った線積分によって

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) H_D(z, w) |dw| \quad (A.3)$$

と書けるとき , 積分核 $H_D(z, w)$ を Poisson 核 (Poisson kernel) という . この Poisson 核は次の性質を持つ .

- 各 $w \in \partial D$ に対して, $H_D(z, w)$ は z に関して D 内で調和関数である.
- 境界の任意の点 $w_0 \in \partial D$ に対して, $z \in D$ を $w_0 \in \partial D$ に近づけていくと, $H_D(z, w)$ はデルタ関数 $\delta(w - w_0)$ になる:

$$\lim_{z \rightarrow w_0} H_D(z, w) = \delta(w - w_0), \quad w_0, w \in \partial D.$$

複素 Brown 運動は共形変換不変性を持つ. このことより, 調和測度に対して次のことが成り立つ.

命題 A.1 $f: D \rightarrow D'$ が共形変換であるとする. さらにこれが $\bar{D} = D \cup \partial D$ で連続かつ 1 対 1 であるものとする. $z \in D, V \subset \partial D$ であるとき,

$$\text{hm}(f(z), D'; f(V)) = \text{hm}(z, D; V) \quad (\text{A.4})$$

が成り立つ.

このことより, Poisson 核の定義 (A.3) から直ちに, 次が導かれる.

$$H_{D'}(f(z), f(w)) = |f'(w)|^{-1} H_D(z, w), \quad z \in D, w \in \partial D. \quad (\text{A.5})$$

まず, 半無限帯領域 (half-infinite strip)

$$D = \{z = x + iy : x > 0, 0 < y < \pi\} \quad (\text{A.6})$$

を考え, Poisson 核 $H_D(z, w)$ の w が $\{iq : q \in (0, \pi)\} \subset \partial D$ の上にある場合を計算したい.

まず, 各 $q \in (0, \pi)$ に対して, $H_D(z, iq)$ は $z \in D$ に関して調和関数であるので, Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_D(x + iy, iq) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_D(x + iy, iq) = 0, \quad x + iy \in D$$

を解く必要がある. これは変数分離法で解くことができる. (q は固定して)

$$H_D(x + iy, iq) = X(x)Y(y)$$

と置くと, $c =$ 定数として, $X(x) \neq 0, Y(y) \neq 0$ のとき

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c$$

となるので,

$$X''(x) = cX(x), \quad (\text{A.7})$$

$$Y''(y) = -cY(y) \quad (\text{A.8})$$

という二つの常微分方程式に分離できる. (A.8) の一般解は

$$Y(y) = a \sin(\sqrt{c}y) + b \cos(\sqrt{c}y)$$

の形であるが, $y = 0, \pi$ で $Y(y) = 0$ という境界条件を課すと, $b = 0, \sqrt{c} = n, n \in \mathbb{N}$ と定まる. つまり $Y(y) = a \sin(ny), n \in \mathbb{N}$ となる. したがって (A.7) は

$$X''(x) = n^2 X(x)$$

となるが, この解のうち $x \rightarrow \infty$ で発散しないものを選び, $X(x) = (\text{定数}) \times e^{-nx}$ とする. 以上より

$$H_D(x + iy, iq) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(q) e^{-nx} \sin(ny)$$

となる. ここで $a_n(q)$ は q の関数であり, これは

$$\lim_{x \rightarrow 0} H_D(x + iy, iq) = \delta(y - q) \quad (\text{A.9})$$

という条件より $a_n(q) = \frac{2}{\pi} \sin(nq)$ と定まる. 実際こうすると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} H_D(x + iy, iq) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq) \sin(ny) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(q+y)} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(q-y)} \end{aligned}$$

となるが, デルタ関数に対する

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

という Fourier 級数表示と, $q, y > 0$ という条件より, (A.9) が成り立つことが確かめられる. つまり

$$H_D(x + iy, iq) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin(ny) \sin(nq), \quad x + iy \in D, q \in (0, \pi) \quad (\text{A.10})$$

という結果が得られた.

ここで, $r \in \mathbb{R}, R > 0$ として, 次の変換を考えることにする.

$$z = x + iy \mapsto \zeta = \alpha + i\beta \quad : \quad \zeta = f(z) = r + Re^z. \quad (\text{A.11})$$

この変換は, 半無限帯領域 D を

$$\begin{aligned} D' &= \{\zeta = \alpha + i\beta : |\zeta - r| > R, \beta > 0\} \\ &= \mathbb{H} \cap \mathcal{B}(r, R)^c \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

に写す共形変換である. 境界は

$$\begin{aligned} \{x : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha > r + R\} \\ \{x + i\pi : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha < r - R\} \\ \{iq : q \in (0, \pi)\} &\mapsto \{r + Re^{iq} : q \in (0, \pi)\} \end{aligned}$$

と変換される．
変換 (A.11) より

$$e^{x+iy} = \frac{\zeta - r}{R}, \quad e^x = \frac{|\zeta - r|}{R}, \quad e^{iy} = \frac{\zeta - r}{|\zeta - r|}$$

なので，

$$e^{-x}e^{iy} = \frac{R}{\bar{\zeta} - r}$$

という関係式が得られる．この両辺を n 乗すると $e^{-nx}e^{iny} = (R/(\bar{\zeta} - r))^n$ となるが，この両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned} e^{-nx} \sin(ny) &= \text{Im} \left[\left(\frac{R}{\bar{\zeta} - r} \right)^n \right] \\ &= -R^n \text{Im} \left[\frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \end{aligned}$$

が得られる．また， $q \in (0, \pi)$ に対して， $f(iq) = r + Re^{iq}$ なので， $f'(iq) = \frac{d}{dq}f(iq) = iRe^{iq}$ であり，したがって $|f'(iq)| = R$ である．以上を (A.5) に代入すると，

$$\begin{aligned} H_{D'}(\zeta, r + Re^{iq}) &= \frac{1}{R} \times \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -R^n \text{Im} \left[\frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \right\} \sin(nq) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq) R^{n-1} \text{Im} \left[\frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

という結果が得られる．

A.2 Bessel 過程と Bessel flow の次元性

D-次元 Bessel 過程 (BES_D) の定義

$D = 1, 2, 3, \dots$ として， D 次元 Brown 運動 $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^D)$ を考える．ここで， $B_t^j, 1 \leq j \leq D$ は互いに独立な 1 次元標準 Brown 運動であり，

$$dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell} dt, \quad 1 \leq k, \ell \leq D \quad (\text{A.14})$$

が成り立つ． B_t は \mathbb{R}^D 内のベクトル値確率過程と見なせるが，このベクトルの大きさ (B_t の動径成分 $|B_t|$)

$$X_t = \sqrt{\sum_{j=1}^D (B_t^j)^2} \quad (\text{A.15})$$

を考えると、これは 1 次元拡散過程となる。ただし、 $X_t \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ とする。伊藤の公式と、 B_t^1, \dots, B_t^D の独立性 (A.14) より $dX_t = \frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^D B_t^k dB_t^k + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t}$ が得られる。ここで、マルチンゲール部分の二次変分をとると、再び (A.14) より

$$\left(\frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^D B_t^k dB_t^k \right)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^D (B_t^k)^2 (dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^D (B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから、これは、上の $\{B_t^j\}_{j=1}^D$ とは別の独立な 1 次元標準 Brown 運動 B_t によって dB_t と与えられるものとしてよい。以上より、 X_t が満たす確率微分方程式は

$$dX_t = dB_t + \frac{D-1}{2} \frac{1}{X_t} dt \quad (\text{A.16})$$

で与えられることが分かった。

以下では $D \geq 1$ として、一般に (A.16) の確率微分方程式に従う 1 次元拡散過程を考えることにする。 $(D = 1$ のときは原点に反射壁を置くものとする: $X_t = |B_t|)$ これを D -次元 Bessel 過程 とよび、以下では BES_D と略記することにする。(A.16) の右辺の第 1 項はマルチンゲール部分、第 2 項が有界変動部分 (ドリフト項) であるので、 BES_D は半マルチンゲールであることが分かる。

注 A.1. Bessel 過程という呼び名は、 X_t の推移 (確率) 密度が、以下に示すように変形 Bessel 関数 I_ν で表されることによる。確率微分方程式 (A.16) に対応して、Kolmogorov 後進方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t; x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t; x, y) + \frac{D-1}{2x} \frac{\partial}{\partial x} u(t; x, y), \quad u(0, x, y) = \delta(x - y) \quad (\text{A.17})$$

が得られる。 $D \in \{2, 3, \dots\}$, および $D = 1$ で原点に反射条件を課した場合、 BES_D の対称な推移密度 ($u(t; x, y) = u(t; y, x)$ とする) は (A.17) の解

$$u(t; x, y) = \frac{1}{2t} (xy)^{-\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (\text{A.18})$$

で与えられる。ただし、

$$\nu = \frac{D-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \quad \iff \quad D = 2(\nu + 1) \geq 1 \quad (\text{A.19})$$

であり、 $I_\nu(z)$ は変形 Bessel 関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である。ここで、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数 (3.23) である。スピード測度は

$$m_\nu(dy) = 2y^{2\nu+1} dy \quad (\text{A.20})$$

で与えられ, (A.18) に $m_\nu(dy)/dy = 2y^{2\nu+1}$ をかけることによって, BES_D に対して, 時間 $t \geq 0$ の間に $x > 0$ から $y \geq 0$ へ推移する推移確率密度関数が

$$p^{(D)}(t, y|x) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x > 0, y \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

と与えられる.

注 A.2. (A.21) は $\nu > -1$ なる実数 ν に対して well-defined である. (A.19) として, $D > 0$ なる実数 D に対して D 次元 Bessel 仮定 BES_D を, その推移確率密度が (A.21) で与えられるものとして定義する. D 次元 Bessel 過程の定義としては, 次の Lamperti の関係式によるものも考えられる.

Lamperti の関係式 $x \in \mathbb{R}$ を出発点とする 1 次元標準 Brown 運動を B_t とする. (A.19) として, 時刻 $t \geq 0$ に対してそのランダムな時間変更

$$\tilde{t}(t) = \int_0^t e^{2(B_s + \nu s)} ds \quad (\text{A.22})$$

を考える. このとき, $x > 0$ から出発した BES_D の時刻 $\tilde{t}(t)$ での値は

$$X_{\tilde{t}(t)} = e^{B(t) + \nu t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.23})$$

で与えられる. ここで, (A.23) の右辺は, ドリフト項 νt 付きの幾何 Brown 運動 (geometric Brownian motion) とよばれる. $D \geq 2$ のときは正のドリフト $\nu t > 0$, $0 < D < 2$ のときは負のドリフト $\nu t < 0$ が働くことになる.

BES_D の次元性

以下では, 初期値を上付き添字で表し, $x > 0$ から出発した BES_D を X_t^x と書くことにする:

$$dX_t^x = \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \quad X_0^x = x > 0. \quad (\text{A.24})$$

命題 A.2 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{d}{=} X_t^1 \quad (\text{A.25})$$

が成り立つ. これを, Bessel 過程のスケーリング性と言う.

証明. これは Brown 運動のスケーリング性が遺伝したものである. $Y_t = \frac{1}{x} X_{x^2 t}^x$ とおくと,

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{x} \left(dB_{x^2 t} + \frac{D-1}{2} \frac{d(x^2 t)}{X_{x^2 t}^x} \right) \\ &= \frac{1}{x} dB_{x^2 t} + \frac{D-1}{2} \frac{x}{X_{x^2 t}^x} dt \\ &= d\tilde{B}_t + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{Y_t}. \end{aligned}$$

ここで, $\tilde{B}_t = B_{x^2 t}/x \stackrel{d}{=} B_t$ である. また, 初期値は $Y_0 = X_0^x/x = x/x = 1$ である. ■

$x > 0$ から出発した BES_D が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す:

$$T_x = \inf \left\{ t > 0 : X_t^x = 0 \right\}. \quad (\text{A.26})$$

確率微分方程式 (A.24) は $t \leq T_x$ までは解を持つ. 次の定理が成り立つ.

定理 A.3 (i) $D \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

(ii) $D > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ. つまり, $D > 2$ のとき BES_D は推移的 (transient) である.

(iii) $D = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.
つまり, $x > 0$ から出発した BES_2 は原点に戻らないが, 原点に無限に近づくことができる.

(iv) $1 \leq D < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ. つまり, $D < 2$ のとき BES_D は再帰的 (recurrent) である.

以下では, $1 \leq D < 2$ の場合を考えることにする. $x \in \mathbb{R}_+$ に対して, 同一の Brown 運動 B_t を用いて

$$X_t^x = x + B_t + \frac{D-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \leq T_x \quad (\text{A.27})$$

で与えられる BES_D の族 $\{X_t^x\}_{x>0}$ を考えることにする. これを Bessel flow とよぶ. この定義より

$$x < y \implies X_t^x < X_t^y, \forall t < T_x \implies T_x \leq T_y$$

であることは明らかである. $x < y$ だが, $T_x = T_y$ となることはあり得るであろうか. そこで, $x \leq y$ に対して

$$q(x, y) = \mathbb{P}(T_x = T_y)$$

とおくことにする. まず, スケーリング性 (命題 A.2) より, 空間スケールが違っていても, 時間スケールを適当に変えれば分布としては同一視できるので, 比だけが重要であることが分かる. つまり

$$q(x, y) = q(1, y/x)$$

である. また, 任意の $t > 0$ に対して $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_r < t) = 0$ であるから

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, r) = 0 \quad (\text{A.28})$$

である. 次の補題を用いる.

補題 A.4 $0 < x < y$ に対して, 事象 $\{T_x = T_y\}$ と次の事象とは, 確率 0 の部分を除いて等しい:

$$\sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \quad (\text{A.29})$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{事象 (A.29)} &\iff \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \leq \exists c < \infty, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y - X_t^x \leq \exists c X_t^x, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y \leq (1 + \exists c) X_t^x, \quad 0 < t < T_x \end{aligned}$$

なので, $X_t^x = 0 \implies X_t^y = 0$, つまり (A.29) $\implies T_x = T_y$. よって, 二つの事象の同値性を示すには, $T_x = T_y$ だが (A.29) が成り立たない状況は, 確率 0 であることを言えばよい. そのために

$$p_r = \mathbb{P} \left[T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \geq r \right]$$

という確率を考える. $\tau_r = \inf_{t < T_x} \{(X_t^y - X_t^x)/X_t^x = r\}$ なる時刻があったとすると, この時刻 τ_r では $X_{\tau_r}^y/X_{\tau_r}^x = 1+r$ となる. そこで, この時刻から再出発したプロセスを考えると, BES_D の強 Markov 性から

$$p_r \leq q(1, 1+r)$$

という評価が得られる. (A.28) より $\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, 1+r) = 0$ なので,

$$p_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = \mathbb{P} \left[T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sum_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty \right] = 0.$$

よって, 主張が証明されたことになる. ■

次の定理は, $x < y$ であっても, $T_x = T_y$ ということがあり得ることを主張するものである.

定理 A.5 (i) $\frac{3}{2} < D < 2 \implies x < y$ に対して $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \leq D \leq \frac{3}{2} \implies x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率 1 で成り立つ.

証明. $0 < x < y$ に対して, 次の確率過程を考える

$$Z_t = \log \left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \right), \quad t < T_x. \quad (\text{A.30})$$

ただし,

$$dX_t^x = \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad dX_t^y = \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} + dB_t$$

である．ここで，共通の Brown 運動 B_t を用いていることに注意せよ． $f(x, y) = \log\{(x - y)/x\}$ とすると，伊藤の公式より

$$\begin{aligned} dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y) \left[dB_t + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} \right] + f_y(X_t^x, X_t^y) \left[dB_t + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y) \right] dt \\ &= -\frac{1}{X_t^x} dB_t + \left[\left(\frac{3}{2} - D \right) \frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{D-1}{2} \frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

が得られる．ここで，次の関係を満たすように，ランダムな時間変更 $t \rightarrow r$ を行う：

$$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t. \quad (\text{A.32})$$

つまり， $dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$ である．(A.31) を変更された後の時刻 $r(t)$ で考えると，

$$dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x} dB_{r(t)} + \left[\left(\frac{3}{2} - D \right) + \frac{D-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}$$

となるが，ここで $\tilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$ とおくと，

$$(d\tilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2} (dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので， \tilde{B}_t は Brown 運動である．そこで $\tilde{Z}_t = Z_{r(t)}$ と書くことにすると

$$d\tilde{Z}_t = d\tilde{B}_t + \left[\left(\frac{3}{2} - D \right) + \frac{D-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] dt \quad (\text{A.33})$$

という確率微分方程式が得られる．

(i) $\frac{3}{2} < D < 2$ のとき， $D' \in (3/2, D)$ を選び， $\varepsilon = \frac{2(D-D')}{D-1}$ とおく． $y = (1 + \varepsilon/2)x$ の場合を考えることにする．

$$\sigma = \inf \left\{ t > 0 : X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x = \varepsilon X_{r(t)}^y \right\}$$

とする．すると $0 \leq t < T_x \wedge \sigma$ では， $(X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x)/X_{r(t)}^y \leq \varepsilon$ なので，(A.33) のドリフト項の係数は

$$\left(\frac{3}{2} - D \right) + \frac{D-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \leq \left(\frac{3}{2} - D \right) + \frac{D-1}{2} \times \frac{2(D-D')}{D-1} = \frac{3}{2} - D'$$

と上からおさえられる．そこで

$$d\tilde{Z}_t^* = d\tilde{B}_t + \left(\frac{3}{2} - D' \right) dt, \quad \tilde{Z}_0^* = \tilde{Z}_0 = \log \frac{\varepsilon}{2}$$

に従う確率過程 \tilde{Z}_t^* を考えると, $\tilde{Z}_t \leq \tilde{Z}_t^*, 0 \leq t < T_{x \wedge \sigma}$ である. ところが $D' > 3/2$ としたので, \tilde{Z}_t^* のドリフト項の係数は負である. したがって, \tilde{Z}_t^* は $\log(\varepsilon/2)$ から出発したものの, 永久に $\log \varepsilon$ の値に到達できないという確率が正であることになる. よって \tilde{Z}_t も $\log \varepsilon$ に到達できない確率も正である. よって, 正の確率で

$$\log \left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \right) < \log \varepsilon \iff \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \varepsilon$$

となり, 事象 (A.29) が成立することになる. このことから補題 A.4 より,

$$\mathbb{P}(T_x = T_y) = q \left(x, \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) x \right) = q \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0$$

であることが結論される.

(ii) $1 \leq D \leq \frac{3}{2}$ のときは, $3/2 - D \geq 0$ であり, また

$$\frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} > 0, \quad 0 \leq t < T_x$$

なので, ドリフト項の係数は正である. よって

$$\sup_{t < T_x} \tilde{Z}_t = \infty \iff \sup_{t < T_x} e^{\tilde{Z}_t} = \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty$$

なので, 補題 A.4 より $\mathbb{P}(T_x = T_y) = 0$ である. ■

マルチンゲールと超幾何方程式

$\frac{3}{2} < D < 2$ のときは, $x \geq 0$ に対して $\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$ であることを証明したが, この確率の x 依存性は Gauss の超幾何関数 (3.24) を用いて, 正確に表すことができる.

命題 A.6 $\frac{3}{2} < D < 2$ のとき, $x \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(D-1)}{\Gamma(2(D-1))\Gamma(2-D)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{2D-3} F \left(2D-3, D-1, 2(D-1); \frac{x}{1+x} \right). \quad (\text{A.34})$$

証明. 確率過程

$$R_t = \frac{X_t^{1+x} - X_t^1}{X_t^1}, \quad x > 0 \quad (\text{A.35})$$

を考える. 伊藤の公式より

$$dR_t = -\frac{R_t}{X_t^1} dB_t + \left[\frac{3-D}{2} \frac{1}{R_t} - \frac{D-1}{2} \frac{1}{R_t(1+R_t)} \right] \left(\frac{R_t}{X_t^1} \right)^2 dt \quad (\text{A.36})$$

が得られる．ここで，次の時間変更 $t \rightarrow \bar{r}(t)$ を行う：

$$\int_0^{\bar{r}(t)} \left(\frac{R_t}{X_t^1} \right)^2 ds = t. \quad (\text{A.37})$$

また

$$\bar{B}_t = - \int_0^{\bar{r}(t)} \frac{R_s}{X_s^1} dB_s \quad (\text{A.38})$$

とすると， \bar{B}_t は 1 次元標準 Brown 運動であり， $\tilde{R}_t = R_{\bar{r}(t)}$ とおくと

$$\begin{aligned} d\tilde{R}_t &= \left[\frac{3-D}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t} - \frac{D-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t(\tilde{R}_t+1)} \right] dt + d\bar{B}_t \\ &= \left[\frac{2-D}{\tilde{R}_t} + \frac{D-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + d\bar{B}_t \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

が得られる．

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = q(1, 1+x) \quad (\text{A.40})$$

として，

$$M_t^C = \psi(\tilde{R}_t) \quad (\text{A.41})$$

とおくと， BES_D のスケーリング性 (A.25) より， M_t^C はマルチンゲールである：

$$\mathbb{E}[M_t^C | \mathcal{F}_s] = M_s^C, \quad 0 \leq s < t. \quad (\text{A.42})$$

他方，伊藤の公式と (A.39) より

$$dM_t^C = \psi'(\tilde{R}_t) d\bar{B}_t + \psi'(\tilde{R}_t) \left[\frac{2-D}{\tilde{R}_t} + \frac{D-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + \frac{1}{2} \psi''(\tilde{R}_t) dt. \quad (\text{A.43})$$

ドリフト項 = 0 であるはずなので， $\psi(x)$ に対して，次の微分方程式が得られる：

$$\frac{1}{2} \psi''(x) + \left[\frac{2-D}{x} + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x+1} \right] \psi'(x) = 0. \quad (\text{A.44})$$

ここで

$$x = \frac{u}{1-u} \iff u = \frac{x}{1+x}$$

という変数変換 $x \rightarrow u$ を行い， $\tilde{\psi}(u) = \psi(x)$ とおくと，(A.44) 式は

$$u(1-u)\tilde{\psi}''(u) + \left\{ 2(2-D) - (3-D)u \right\} \tilde{\psi}'(u) = 0 \quad (\text{A.45})$$

となる．これは，超幾何方程式 (3.26) で特に

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2-D, \quad \gamma = 2(2-D) \quad (\text{A.46})$$

とした場合である。(3.26) の $u = 0$ における解の基本系として

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) \quad \text{と} \quad u^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; u)$$

をとる。(A.46) では, $\alpha = 0$ なので前者は 1 であり, 後者は $u^{2D-3}F(2D-3, D-1, 2(D-1); u)$ となる。よって, c_1, c_2 を積分定数として

$$\tilde{\psi}(u) = c_1 + c_2 u^{2D-3}F(2D-3, D-1, 2(D-1); u)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(0) &= \psi(0) = \mathbb{P}(T_1 = T_1) = 1 \\ \tilde{\psi}(1) &= \psi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

なので,

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -F(2D-3, D-1, 2(D-1); 1) = -\frac{\Gamma(D-1)}{\Gamma(2(D-1))\Gamma(2-D)} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

と定まる。■

A.3 $\Phi_{t,B}(z)$, $\Phi'_{t,B}(z)$ および $(\Phi'_{t,B}(U_t))^b$ の確率微分方程式の導出

$B \in \mathcal{Q}_+$ に対して, 定義 (5.1) および可換図である図 6 から, 次の等式が成り立つことになる:

$$\Phi_{t,B} = g_{t,B} \circ \Phi_B \circ f_t, \quad f_t = g_t^{-1}, \quad \Phi_{0,B} = \Phi_B. \quad (\text{A.49})$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z) &= \frac{d}{dt}g_{t,B}(\Phi_B(f_t(z))) \\ &= \dot{g}_{t,B}(\Phi_B(f_t(z))) + (g_{t,B})'(\Phi_B(f_t(z)))\Phi'_B(f_t(z))\dot{f}_t(z) \end{aligned}$$

となる。ここで (5.2) と (1.65) を代入すると

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z) = \frac{2(\Phi'_B(U_t))^2}{g_{t,B}(\Phi_B(f_t(z))) - U_{t,B}} + (g_{t,B})'(\Phi_B(f_t(z)))\Phi'_B(f_t(z)) \left[-f'_t(z) \frac{2}{z - U_t} \right]$$

を得る。この $\Phi_{t,B}$ に対する微分方程式は時間 t について斉次なので, $t = 0$ として考察しても一般性を失わない。 $t = 0$ とすると, $f_0(z) = z, f'_0(z) = 1, g_{0,B}(z) = z, (g_{0,B})'(z) = 1$ であり, また $U_{0,B} = \Phi_{0,B}(U_0) = \Phi_B(U_0)$ なので, 上式は

$$\left. \frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z) \right|_{t=0} = \frac{2(\Phi'_B(U_0))^2}{\Phi_B(z) - \Phi_B(U_0)} - \frac{2\Phi'_B(z - U_0)}{z}$$

となる．したがって一般の $t \geq 0$ に対しては

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z) = \frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2}{\Phi_{t,B}(z) - \Phi_{t,B}(U_t)} - \frac{2\Phi'_{t,B}(z)}{z - U_t} \quad (\text{A.50})$$

が得られる．この方程式の両辺を z で微分すると，

$$\frac{d}{dt}\Phi'_{t,B}(z) = -\frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2\Phi'_{t,B}(z)}{(\Phi_{t,B}(z) - \Phi_{t,B}(U_t))^2} + \frac{2\Phi'_{t,B}(z)}{(z - U_t)^2} - \frac{2\Phi''_{t,B}(z)}{z - U_t} \quad (\text{A.51})$$

が得られる．(A.50) と (A.51) で $z = U_t + \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$ とおくと，次のような評価が得られる．

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) \text{ of (A.50)} &= \frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2}{\Phi_{t,B}(U_t + \varepsilon) - \Phi_{t,B}(U_t)} - \frac{2\Phi'_{t,B}(U_t + \varepsilon)}{U_t + \varepsilon - U_t} \\ &= \frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2}{\Phi_{t,B}(U_t) + \Phi'_{t,B}(U_t)\varepsilon + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon^2/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) - \Phi_{t,B}(U_t)} \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon}\{\Phi'_{t,B}(U_t) + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\} \\ &= \frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2}{\Phi'_{t,B}(U_t)\varepsilon\{1 + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon/2\Phi'_{t,B}(U_t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\}} - \frac{2\Phi'_{t,B}(U_t)}{\varepsilon} - 2\Phi''_{t,B}(U_t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{2\Phi'_{t,B}(U_t)}{\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{2\Phi'_{t,B}(U_t)}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} - \frac{2\Phi'_{t,B}(U_t)}{\varepsilon} - 2\Phi''_{t,B}(U_t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -3\Phi''_{t,B}(U_t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) \text{ of (A.51)} &= -\frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2\Phi'_{t,B}(U_t + \varepsilon)}{(\Phi_{t,B}(U_t + \varepsilon) - \Phi_{t,B}(U_t))^2} + \frac{2\Phi'_{t,B}(U_t + \varepsilon)}{(U_t + \varepsilon - U_t)^2} - \frac{2\Phi''_{t,B}(U_t + \varepsilon)}{U_t + \varepsilon - U_t} \\ &= -\frac{2(\Phi'_{t,B}(U_t))^2\{\Phi'_{t,B}(U_t) + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \Phi_{t,B}(U_t)\varepsilon^2/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\}}{\{\Phi_{t,B}(U_t) + \Phi'_{t,B}(U_t)\varepsilon + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon^2/2 + \Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon^3/6 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) - \Phi_{t,B}(U_t)\}^2} \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \left\{ \Phi'_{t,B}(U_t) + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \frac{1}{2}\Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon}\{\Phi''_{t,B}(U_t) + \Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\} \\ &= -\frac{2}{\varepsilon^2} \left\{ \Phi'_{t,B}(U_t) + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \frac{1}{2}\Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)}\varepsilon - \frac{1}{3}\frac{\Phi'''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)}\varepsilon^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)}\right)^2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \left\{ \Phi'_{t,B}(U_t) + \Phi''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \frac{1}{2}\Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon}\{\Phi''_{t,B}(U_t) + \Phi'''_{t,B}(U_t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\} \\ &= \frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{2\Phi'_{t,B}(U_t)} - \frac{4}{3}\Phi'''_{t,B}(U_t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

この計算結果で $z \rightarrow U_t$ の極限をとると ,

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{d}{dt}\Phi_{t,B}(z) = -3\Phi''_{t,B}(U_t) \quad (\text{A.52})$$

および

$$\frac{d}{dt}\Phi'_{t,B}(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{d}{dt}\Phi'_{t,B}(z) = \frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{2\Phi'_{t,B}(U_t)} - \frac{4}{3}\Phi'''_{t,B}(U_t) \quad (\text{A.53})$$

が得られる .

任意の指数 b に対して , 伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d(\Phi'_{t,B}(U_t))^b &= b(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b-1}\Phi''_{t,B}(U_t)dU_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{b(b-1)(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b-2}(\Phi''_{t,B}(U_t))^2 + b(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b-1}\Phi'''_{t,B}(U_t)\right\}(dU_t)^2 \\ &\quad + b(\Phi'_{t,B}(U_t))^{b-1}\frac{d}{dt}\Phi'_{t,B}(U_t)dt \end{aligned}$$

が導かれる . 右辺の最後の項に (A.53) を代入する . $dU_t = \sqrt{\kappa}dB_t, (dU_t)^2 = \kappa dt$ なので

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) &= b(\Phi'_{t,B}(U_t))^b \left[\sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} dB_t \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(b-1)\kappa \frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{(\Phi'_{t,B}(U_t))^2} + \frac{1}{2}\kappa \frac{\Phi'''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} + \frac{1}{\Phi'_{t,B}(U_t)} \left(\frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{2\Phi'_{t,B}(U_t)} - \frac{4}{3}\Phi'''_{t,B}(U_t) \right) \right\} dt \right] \\ &= b(\Phi'_{t,B}(U_t))^b \left[\sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi''_{t,B}(U_t))^2}{(\Phi'_{t,B}(U_t))^2} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{4}{3} \right) \frac{\Phi'''_{t,B}(U_t)}{\Phi'_{t,B}(U_t)} \right\} dt \right] \end{aligned}$$

となるので , (5.7) が得られる .

謝辞: 本講義をする機会を与えて下さいました内山耕平先生に感謝いたします . また , 共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大理) に感謝いたします .

参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).
- [2] V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421-1452.
- [3] K. Falconer, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, 2nd ed., (Wiley, 2003).
- [4] 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀-SLEの発見-」, 日本物理学会誌, Vol.62, No.7 (2007) 527-531.

- [5] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).
- [6] G. F. Lawler, Schramm-Loewner Evolution (SLE), [arXiv: 0712.3256 \[math.PR\]](#).
- [7] G. F. Lawler, Multifractal analysis of the reverse flow for the Schramm-Loewner evolution, in *Fractal Geometry and Stochastics IV (Progress in Probability, Vol.61)*, edited by C. Babdt, P. Mörters, M. Zähle, (Birkhäuser, 2009), pp.73-107.
- [8] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004) 939-995.
- [9] S. Rohde and O. Schramm: Basic properties of SLE, *Ann. Math.* **161** (2005) 883-924.
- [10] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.
- [11] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limit, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001) 239-244.
- [12] S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, *Ann. Math.* **172** (2010) to appear; [arXiv:0708.0039](#)