Dyson 模型の複素ブラウン運動表現と行列式型相関関数

香取眞理（中央大学理工学部)

$\mathbb{I}$ を有限な添字集合とする．Dyson のブラウン運動 (BM) 模型 $\boldsymbol{X}(t)=(X_i(t))_{i\in\mathbb{I}}$ は, 径数 $\beta>0$ としたときの，次の確率微分方程式系である；

$$dX_i(t)=dB_i(t)+\frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{I},j\neq i}\frac{dt}{X_i(t)-X_j(t)},\quad i\in\mathbb{I},\quad t\in[0,\infty). \tag{1}$$

ただし, $\{B_i(t)\}_{i\in\mathbb{I}}$ は独立な 1 次元標準 BM である．これは，すべての粒子間に粒子間距離に反比例する斥力が働く (係数が $\beta/2$)，$\mathbb{R}$ 上の相互作用粒子系を表す．特に $\beta=2$ の場合，次の 3 つの系と等価である．(粒子数を $n=\sharp\mathbb{I}\in\mathbb{N}$ とする.) (i) $n\times n$ エルミート行列に値をとる BM の固有値の従う確率過程．(零行列からスタートした場合は，各時刻 $t>0$ で，分散 t のガウス型ユニタリ集団 (GUE) の統計に従う.) (ii) 非衝突条件を課した 1 次元 n 粒子 BM 系．(iii) A_{n-1} 型ワイル領域 $\mathbb{W}_n^{\mathrm{A}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:x_1<x_2<\cdots<x_n\}$ 内での吸収壁 BM の, 調和関数 $h(\boldsymbol{x})=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\det_{1\le i,j\le n}[x_i^{j-1}]$ (差積，Vandermonde 行列式) による調和変換．この $\beta=2$ の場合を, ここでは Dyson 模型と略称することにする．

$\mathfrak{M}$ を $\mathbb{R}$ 上の非負整数値ラドン測度の空間とする．$\{X_i(t)\}_{i\in\mathbb{I}}$ を (1) 式の解として，我々は Dyson 模型を $\mathfrak{M}$ に値をとる拡散過程 $\Xi(t)=\sum_{i\in\mathbb{I}}\delta_{X_i(t)}\in\mathfrak{M}$ と考える．初期配置が $\xi=\sum_{i\in\mathbb{I}}\delta_{x_i}\in\mathfrak{M}$ で与えられるとき，この拡散過程を $(\Xi(t),\mathbb{P}_\xi)$ と記し，この下での期待値を $\mathbb{E}_\xi$ で表す．また，$\mathfrak{M}_0=\{\xi\in\mathfrak{M}:\xi(\{x\})\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\}$ (多重点なし) とする．

$\xi(\mathbb{R})\in\mathbb{N}$ である $\xi\in\mathfrak{M}$ に対して，$u\in\mathbb{C}$ で径数付けされる整関数の族 $\{\Phi_\xi^u(z),z\in\mathbb{C}:u\in\mathbb{C}\}$ を導入する；
$\Phi_\xi^u(z)=\prod_{x\in\mathrm{supp}\ \xi\cap\{u\}^{\mathrm{c}}}\left(1-\frac{z-u}{x-u}\right)^{\xi(\{x\})}$. ただし，$\mathrm{supp}\ \xi=\{x\in\mathbb{R}:\xi(\{x\})>0\}$．また，$\boldsymbol{v}=(v_i)_{i\in\mathbb{I}},v_i\in\mathbb{R}$ に対して，$Z_i(t),t\ge 0,i\in\mathbb{I}$ を，$Z_i(0)=v_i,i\in\mathbb{I}$ である確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}_{\boldsymbol{v}})$ での独立な複素標準 BM とする．$\mathbf{P}_{\boldsymbol{v}}$ の下での期待値を $\mathbf{E}_{\boldsymbol{v}}$ で表す．実部と虚部を, それぞれ $V_i(t)=\mathrm{Re}Z_i(t),W_i(t)=\mathrm{Im}Z_i(t),i\in\mathbb{I}$ と書くと, これらは独立な 1 次元標準 BM である．

本講演では次の等式を証明する．$\xi=\sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})}\delta_{u_i}\in\mathfrak{M}_0$, ただし $\xi(\mathbb{R})\in\mathbb{N}$ とし，$0<t<T<\infty$ とする．このとき，$\mathcal{F}(t)$-可測である任意の関数 F に対して，

$$\mathbb{E}_\xi\left[F\big(\Xi(\cdot)\big)\right]=\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}\left[F\left(\sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})}\delta_{V_i(\cdot)}\right)\det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})}\left[\Phi_\xi^{u_i}(Z_j(T))\right]\right]. \tag{2}$$

我々はこの結果を，Dyson 模型に対する複素 BM 表現 (CBM 表現) と呼ぶことにする．

CBM 表現は次の 2 つの事実から導かれる．(a)　$\Phi_\xi^x(Z_i(\cdot))$, $i\in\mathbb{I}$ は独立な共形局所マルチンゲールである．(b)　任意の $\xi=\sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})}\delta_{u_i}$, $\xi(\mathbb{R})\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_{\xi(\mathbb{R})})\in\mathbb{W}_{\xi(\mathbb{R})}^{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_{\xi(\mathbb{R})})\in\mathbb{C}^{\xi(\mathbb{R})}$ に対して，次の等号が成り立つ：$\det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})}\left[\Phi_\xi^{u_i}(z_j)\right]=\det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})}\left[\prod_{1\le k\le\xi(\mathbb{R}),k\neq i}\frac{u_k-z_j}{u_k-u_i}\right]=\frac{h(\boldsymbol{z})}{h(\boldsymbol{u})}$.

CBM 表現 (2) より，Dyson 模型が行列式過程であり，その行列式型の時間相関関数を決定する Eynard-Mehta タイプの相関核を導くことが出来る．従来のランダム行列理論の方法では，この導出には直交多項式を用いた計算が必要であったが，調和変換の複素拡張の結果として導くことが出来るのである．

本講演は，種村秀紀氏 (千葉大) との共同研究に基づく．

[1]　香取眞理，種村秀紀：非衝突過程・行列値過程・行列式過程,「数学」**61**(3), 225-247 (2009).

[2]　M. Katori and H. Tanemura : Complex Brownian motion representation of the Dyson model, arXiv: math.PR/1008.2821.