

Part 3
Determinantal Processes
and Tracy–Widom Distribution

中央大学工学部 香取眞理(かとりまこと)

集中講義: 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
「物理学特別講義 BXI: 非平衡統計力学の最近の展開」

2010年11月29日-12月1日, 東京大学本郷キャンパス

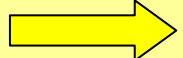
1. INTRODUCTION : 1次元ブラウン運動(1粒子)

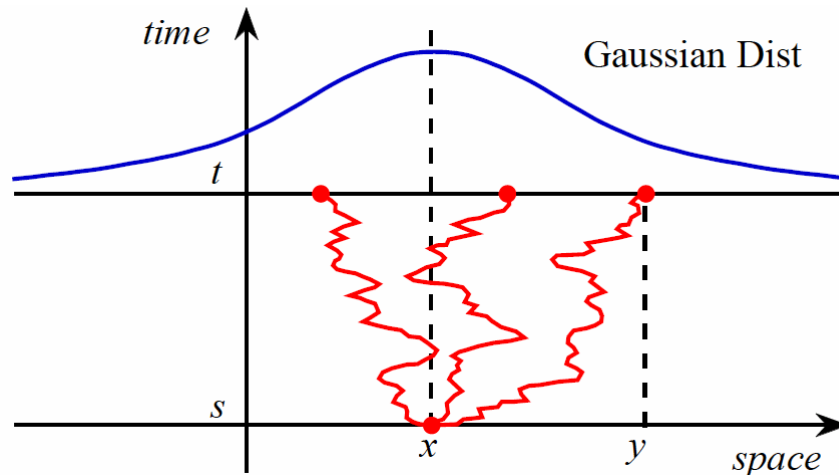
1次元上の(標準)ブラウン運動

$B(t)$ = ブラウン粒子の時刻 t での位置

- 位置の変位 $dB(t)$ は ランダム で、次の特性を持つ

$$\langle dB(t) \rangle = 0, \quad \langle (dB(t))^2 \rangle = dt.$$

- 時刻 s で位置 x にあったとしても、それから時間が経過すると位置は不確定になっていく。  位置は 分布する
- このようなプロセスを 確率過程 という。



$B(t) = ?$



$B(s) = x$

- 時刻 $s (>0)$ にブラウン粒子が位置 x にあったとする.
- 時刻 $t (>s)$ で区間 $[a,b]$ の中に、このブラウン粒子を見出す確率は

$$\text{Prob}(B(t) \in [a,b] \mid B(s) = x) = \int_a^b G(t-s; y \mid x) dy$$

で与えられる. ただしここで、積分核

$$G(t; y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}$$

は、**遷移確率密度**とよばれる.

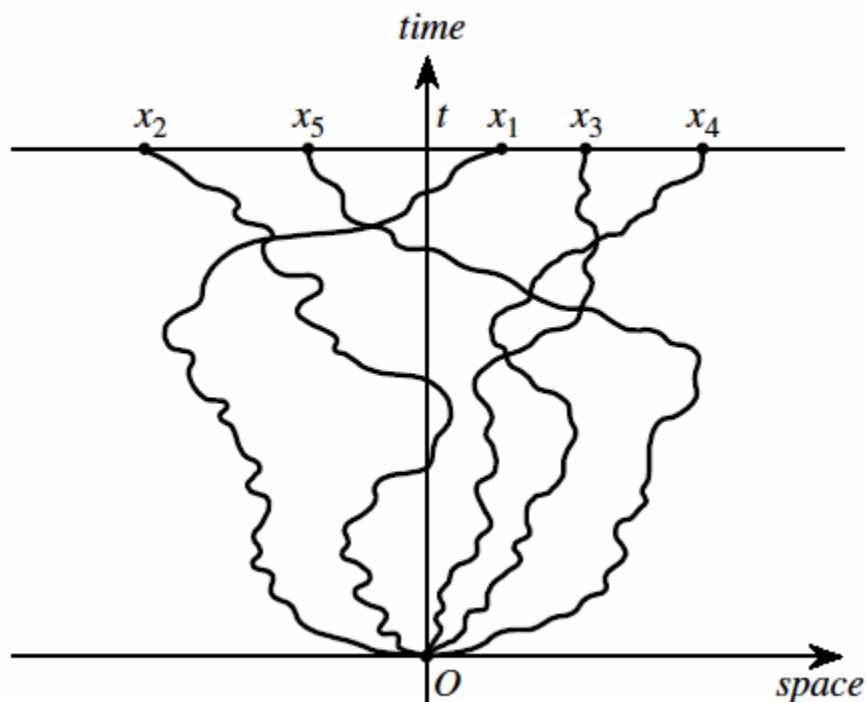
この遷移確率密度(積分核)は、**熱方程式(拡散方程式)**

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t; y \mid x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(t; y \mid x), \quad \text{with } \lim_{t \rightarrow 0} G(t; y \mid x) = \delta(x-y)$$

を満たすものであり、特に**熱核**とよばれる. (**グリーン関数**)

2. 独立なブラウン粒子系に見られる Gumbel 分布

- 1次元上に、互いに独立な N 個のブラウン粒子が運動している状況を考える.
- いずれも $t = 0$ で原点 O からスタートするものとする.



- 互いに独立なので、 N 粒子の遷移確率密度は、1 粒子のもの積で与えられる。

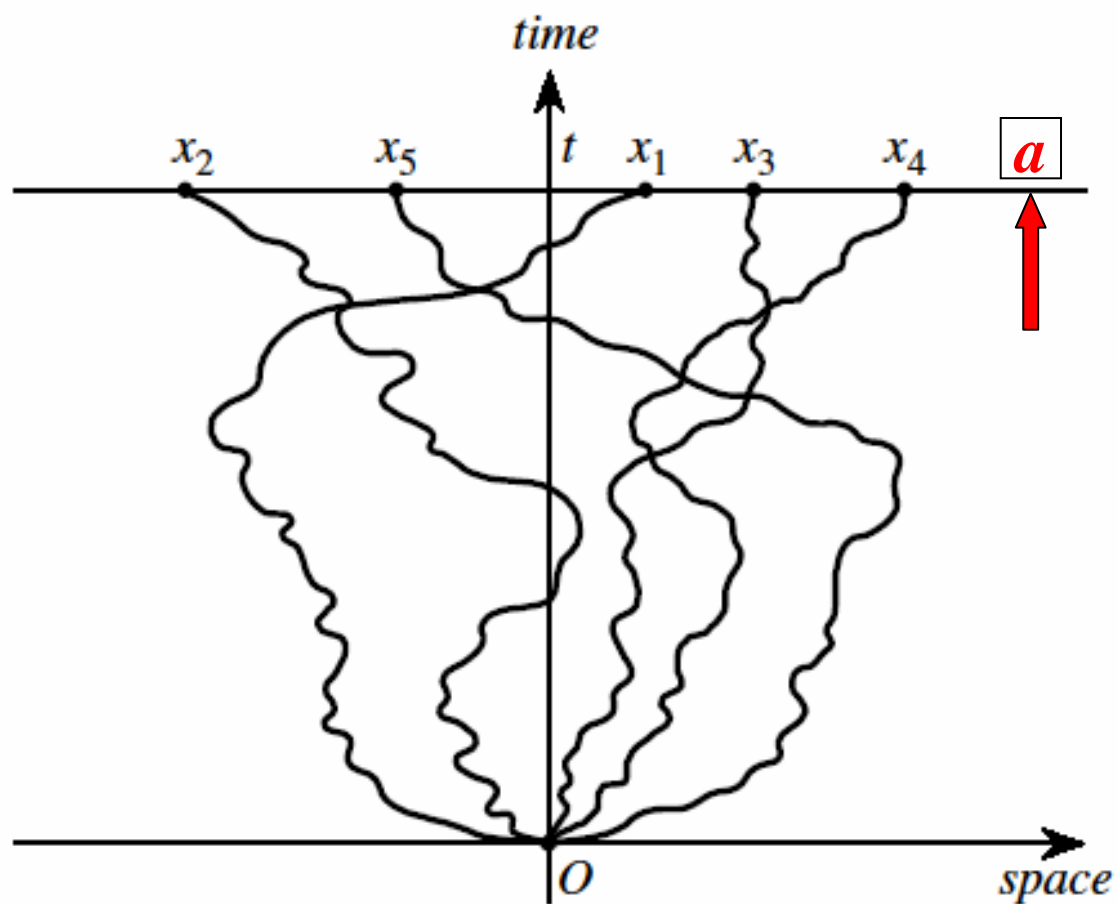
$$G(t, \mathbf{x} | \mathbf{0}) = \prod_{j=1}^N G(t, x_j | 0) \quad \text{for } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

ただし

$$G(t; y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}$$

- 以下では $B_j(0)=0, j=1,2,\dots,N$ とする。
- 時刻 t で最右端の粒子が、位置 a より左である確率(つまり、 N 粒子すべての位置が a 以下である確率)は

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) \leq a\right) &= \text{Prob}\left(B_j(t) \leq a, 1 \leq j \leq N\right) \\ &= \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^a G(t, x_j | 0) dx_j \end{aligned}$$



- これを次のように計算する.

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) \leq a\right) &= \prod_{j=1}^N \left[1 - \int_a^{\infty} G(t, x_j | 0) dx_j \right] = \left[1 - \int_a^{\infty} G(t, x | 0) dx \right]^N \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} (-1)^n \left(\int_a^{\infty} G(t, x | 0) dx \right)^n \end{aligned}$$

ここで粒子数 $N \gg 1$ として、**Stirling の公式**

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

を用いると

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$$

なので

$$\text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) \leq a\right) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} (-1)^n \left(\int_a^{\infty} G(t, x | 0) dx \right)^n = \exp \left\{ -N \int_a^{\infty} G(t, x | 0) dx \right\}$$

- $X_N(t) = \max_{1 \leq j \leq N} B_j(t)$

として、これの確率過程を考えることにする.

$N \gg 1$ において、次が知られている.

- **平均値** $m_N^t = \langle X_N(t) \rangle \approx \sqrt{2t \log N} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{2 \log N}} \log(4\pi \log N)$

- **標準偏差** $\sigma_N^t = \sqrt{\langle (X_N(t) - \langle X_N(t) \rangle)^2 \rangle} \approx \sqrt{\frac{t}{2 \log N}}$

そこで

$$X_N(t) = m_N^t + \sigma_N^t Y_N(t)$$

とおき、以下では $Y_N(t)$ の分布を調べることにする.

$$X_N(t) = m_N^t + \sigma_N^t Y_N(t) \leq a \Leftrightarrow Y_N(t) = \frac{X_N(t) - m_N^t}{\sigma_N^t} \leq \frac{a - m_N^t}{\sigma_N^t}$$

なので

$$\text{Prob}(X_N(t) \leq a) = \exp \left\{ - \int_{(a - m_N^t) / \sigma_N^t}^{\infty} R_N^t(s) ds \right\}$$

where

$$R_N^t(s) \equiv N \sigma_N^t G(t, x | 0) \Big|_{x = m_N^t + \sigma_N^t s} = N \sigma_N^t \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ - \frac{1}{2t} (m_N^t + \sigma_N^t s)^2 \right\}$$

これに $m_N^t = \langle X_N(t) \rangle \approx \sqrt{2t \log N} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{2 \log N}} \log(4\pi \log N)$

$$\sigma_N^t = \sqrt{\langle (X_N(t) - \langle X_N(t) \rangle)^2 \rangle} \approx \sqrt{\frac{t}{2 \log N}}$$

を代入して丁寧に計算すると、

$$R(s) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^t(s) = e^{-s}$$

であることが分かる.

改めて $x = (a - m_N^t) / \sigma_N^t$ と置くと

$$X_N(t) \leq a = m_N^t + \sigma_N^t x \Leftrightarrow \frac{X_N(t) - m_N^t}{\sigma_N^t} \leq x \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) - m_N^t}{\sigma_N^t} \leq x \right) &= \exp \left\{ - \int_x^{\infty} R(s) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_x^{\infty} e^{-s} ds \right\} = \exp \left\{ -e^{-x} \right\} \equiv p(\cdot \leq x) \end{aligned}$$

これは、 x 以下の **累積確率分布** であり、**確率密度** は次で与えられる。

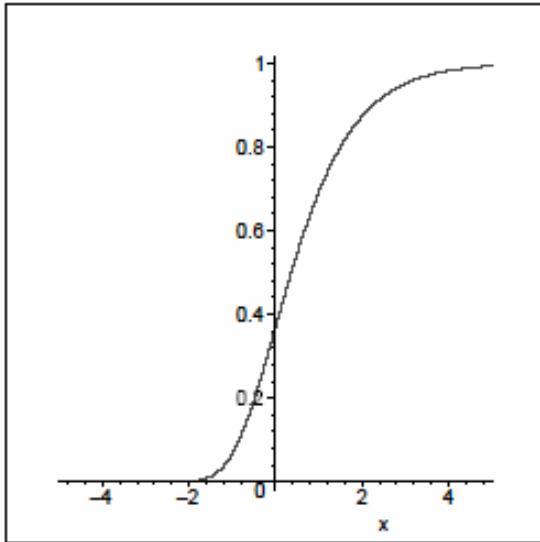
$$p(x) = \frac{d}{dx} p(\cdot \leq x) = e^{-x} \exp \left\{ -e^{-x} \right\}$$

これは **Gumbel 分布** とよばれる。

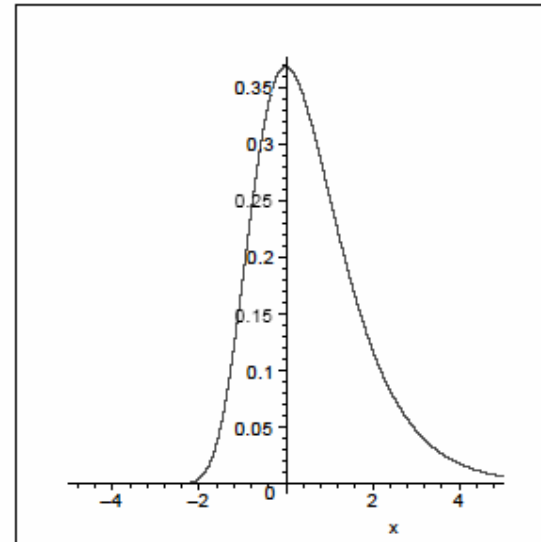
(**極値分布 Extreme Value Distribution** のうち **Type I** とよばれるもの)

E. J. Gumbel: *Statistics of Extremes*, Columbia Univ. Press, (1958)

Gumbel 分布の累積確率分布と確率密度関数



$$p(\bullet \leq x)$$



$$p(x)$$

- 先ほどの $R(s)$ は次のようにも導出できる.

まず熱核 $G(t, x|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ は次の微分方程式に従う.

$$\frac{d}{dx} G(t, x|0) = -\frac{x}{t} G(t, x|0)$$

- ここで変数変換

$$x = m_N^t + \sigma_N^t s, \quad \frac{d}{dx} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sigma_N^t} \frac{d}{ds}, \quad N\sigma_N^t G(t, x|0) = R_N^t(s)$$

を施すと
$$\frac{1}{\sigma_N^t} \frac{d}{ds} R_N^t(s) = -\frac{1}{t} (m_N^t + \sigma_N^t s) R_N^t(s)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds} R_N^t(s) = -\frac{1}{t} (\sigma_N^t m_N^t + (\sigma_N^t)^2 s) R_N^t(s)$$

- ここで

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^t m_N^t = t, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\sigma_N^t)^2 = 0$$

なので、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$R(s) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^t(s), \quad \frac{d}{ds} R(s) = -R(s)$$

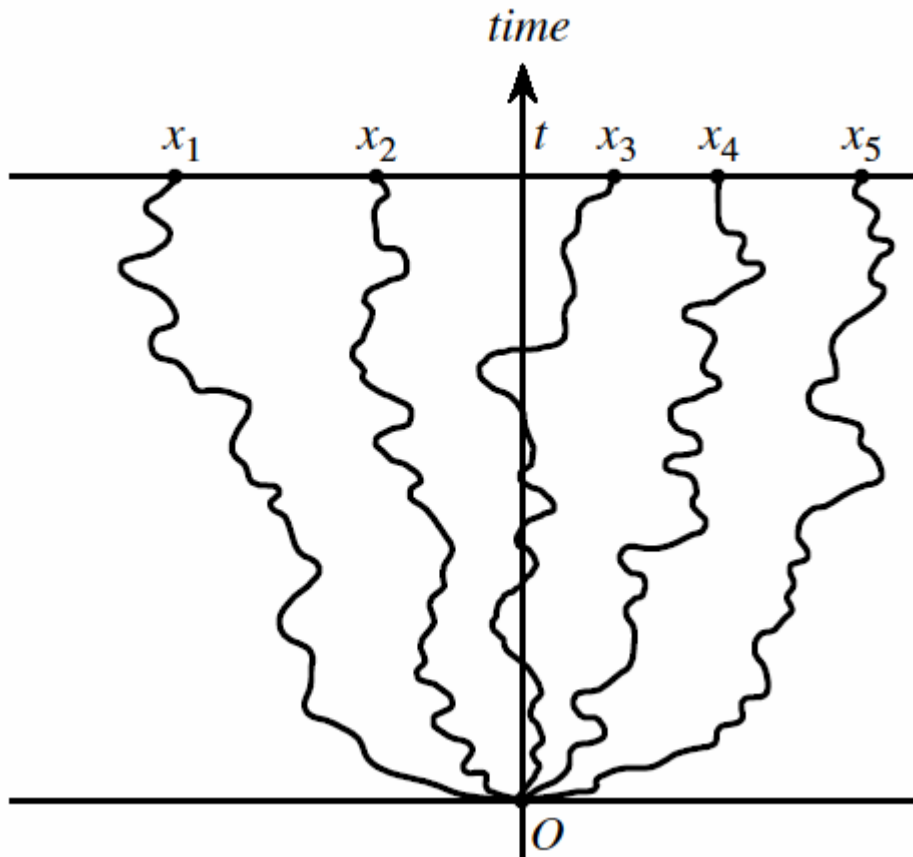
- この解

$$R(s) = \text{const.} e^{-s}$$

で $\text{const.}=1$ としたのが先の答である.

3. 非衝突ブラウン粒子系

いずれも原点からスタートした N 個のブラウン粒子の運動に対して、
今回は**非衝突**という条件を課すことにする。



この N 個の非衝突ブラウン粒子系に対する遷移確率密度は

$$p_N(t, \mathbf{x} | 0) = c \prod_{j=1}^N G(t, x_j | 0) \prod_{1 \leq k < \ell \leq N} (x_\ell - x_k)^2, \quad c = \frac{t^{-N(N-1)/2}}{\prod_{n=1}^{N-1} n!}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}_{<}^N \equiv \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \right\}$$

で与えられる.

ここに現れる **差積の2乗**

$$\prod_{1 \leq k < \ell \leq N} (x_\ell - x_k)^2$$

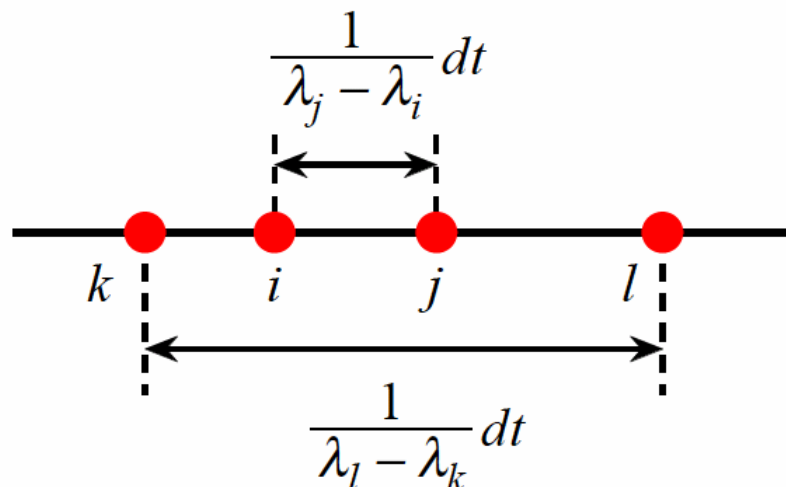
は、**非衝突条件に起因する強い斥力**の効果を表わしている.

非衝突ブラウン運動を $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$

と表わすことにすると、このプロセスの満たす確率微分方程式は

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j:1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt \quad 1 \leq i \leq N, t \in [0, \infty)$$

これは、**Dyson のブラウン運動模型** である。



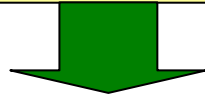
すべての粒子対の間に距離に反比例した斥力が働く(エントロピー力)

条件 w の指示関数

$$\mathbf{1}_{\{w\}} = \begin{cases} 1 & \text{(if the condition } w \text{ is satisfied)} \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

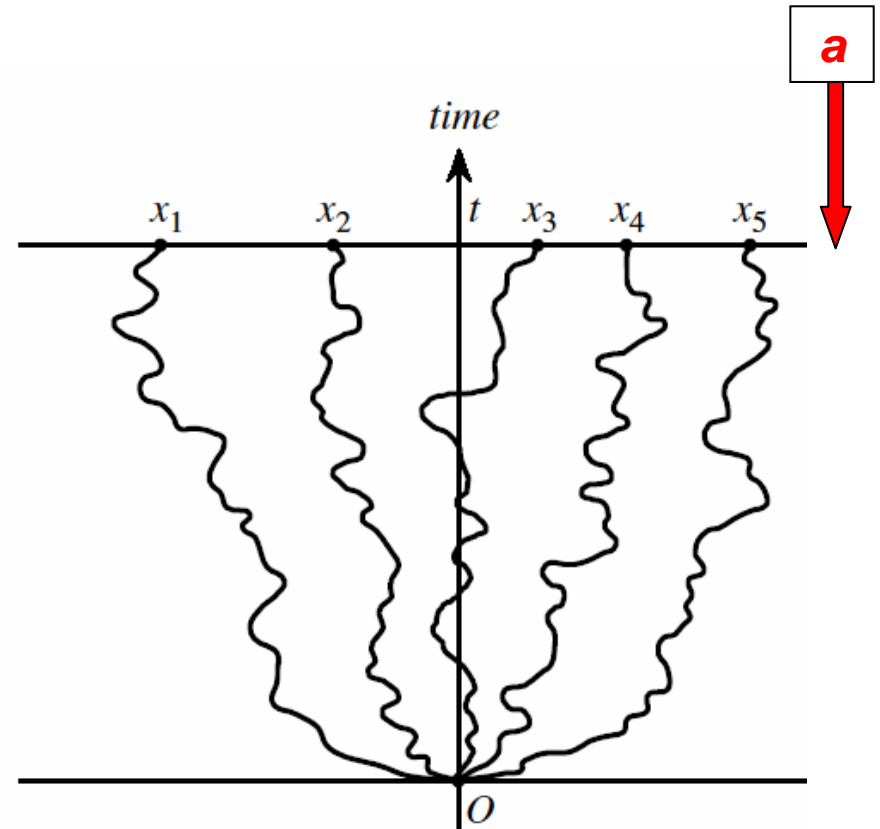
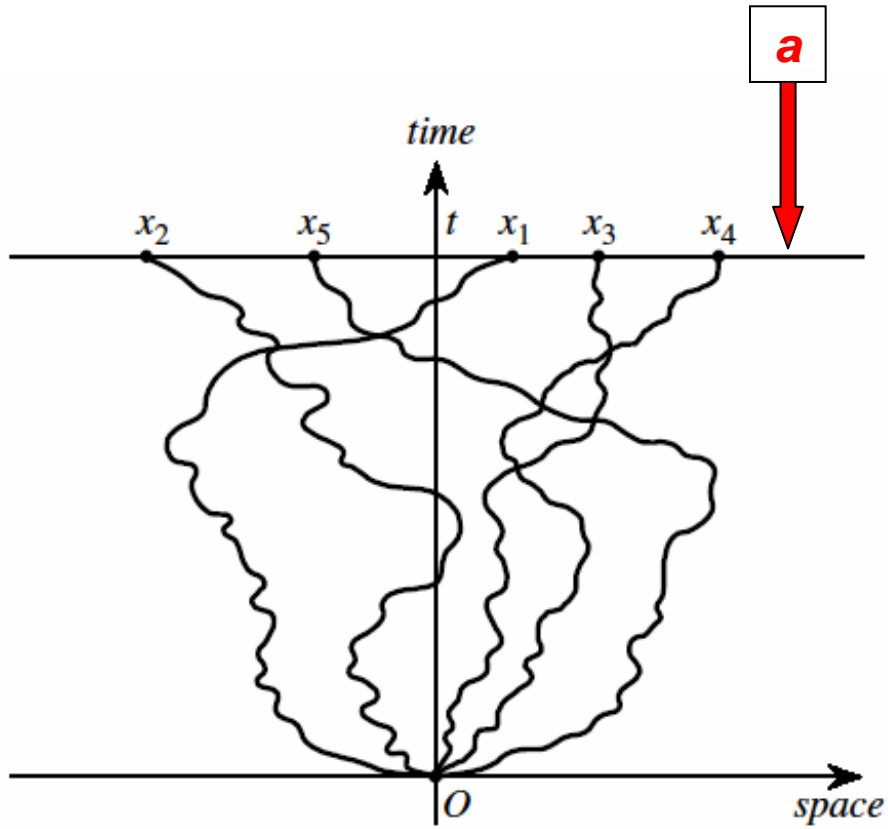
独立なブラウン運動の場合

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) \leq a\right) &= \prod_{j=1}^N \left[1 - \int_a^{\infty} G(t, x_j | 0) dx_j \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \prod_{j=1}^N G(t, x_j | 0) \prod_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{x_k \leq a\}} \end{aligned}$$



非衝突ブラウン運動の場合

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} \lambda_j(t) \leq a\right) \\ &= \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N p_N(t, \mathbf{x} | 0) \prod_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{x_k \leq a\}} \end{aligned}$$



独立なブラウン運動の場合

$$\text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} B_j(t) \leq a\right) \approx \exp\left\{-N \int_a^{\infty} G(t, x | 0) dx\right\}$$



非衝突ブラウン運動の場合

$$\text{Prob}\left(\max_{1 \leq j \leq N} \lambda_j(t) \leq a\right) \approx \exp\left\{-\int_a^{\infty} [(1 - K_N^t(a))^{-1} K_N^t](x, x) dx\right\}$$

$$K_N^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{1}{x-y} \left\{ \varphi_N\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \varphi_{N-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right) - \varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \varphi_N\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right) \right\}$$

$$\varphi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^j j! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} H_j(\xi) \quad (\text{Hermite orthogonal function})$$

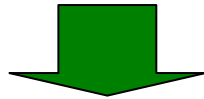
$$[K_N^t(a)](x, y) = K_N^t(x, y) \mathbf{1}_{\{y \geq a\}}$$

4. パンルヴェ II 方程式と Tracy–Widom 分布

独立なブラウン運動の場合 $X_N(t) = \max_{1 \leq j \leq N} B_j(t)$

$$m_N^t \approx \sqrt{2t \log N} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{2 \log N}} \log(4\pi \log N)$$

$$\sigma_N^t \approx \sqrt{\frac{t}{2 \log N}}$$



非衝突ブラウン運動の場合 $\hat{X}_N(t) = \max_{1 \leq j \leq N} \lambda_j(t)$

$$\hat{m}_N^t \approx 2\sqrt{Nt}$$

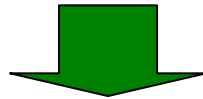
$$\hat{\sigma}_N^t \approx \sqrt{t} N^{-1/6}$$

独立なブラウン運動の場合

$$X_N(t) = m_N^t + \sigma_N^t Y_N(t)$$

$$\text{Prob}(X_N(t) \leq a) = \exp \left\{ - \int_{(a-m_N^t)/\sigma_N^t}^{\infty} R_N^t(s) ds \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Prob}(Y_N(t) \leq x) = \exp \left\{ - \int_x^{\infty} R_N^t(s) ds \right\}$$



非衝突ブラウン運動の場合

$$\hat{X}_N(t) = \hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t \hat{Y}_N(t)$$

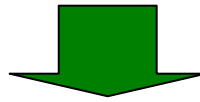
$$\text{Prob}(\hat{X}_N(t) \leq a) = \exp \left\{ - \int_{(a-\hat{m}_N^t)/\hat{\sigma}_N^t}^{\infty} \hat{R}_N^t(s) ds \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Prob}(\hat{Y}_N(t) \leq x) = \exp \left\{ - \int_x^{\infty} \hat{R}_N^t(s) ds \right\}$$

独立なブラウン運動の場合

$$R_N^t(s) \equiv N\sigma_N^t G(t, x | 0) \Big|_{x=m_N^t + \sigma_N^t s} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_N^t} \frac{d}{ds} R_N^t(s) = -\frac{1}{t} (m_N^t + \sigma_N^t s) R_N^t(s)$$

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{d}{ds} R(s) = -R(s)$$



非衝突ブラウン運動の場合

$$\hat{R}_N^t(s) = \hat{\sigma}_N^t [(1 - K_N^t(x))^{-1} K_N^t](x, x) \Big|_{x=\hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\hat{\sigma}_N^t)^3} \frac{d^3}{ds^3} \hat{R}_N^t(s) - \left(\frac{(\hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t s)^2}{t^2} - \frac{4N}{t} \right) \frac{1}{\hat{\sigma}_N^t} \frac{d}{ds} \hat{R}_N^t(s)$$

$$+ \frac{\hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t s}{t} \hat{R}_N^t(s) + \frac{6}{(\hat{\sigma}_N^t)^3} (\hat{R}_N^t(s))^2 = 0$$

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{d^3}{ds^3} \hat{R}(s) - 4s \frac{d}{ds} \hat{R}(s) + 2\hat{R}(s) + 6 \left(\frac{d}{ds} \hat{R}(s) \right)^2 = 0$$

$$\hat{R}(s) = \int_s^{\infty} (q(x))^2 dx \quad \text{とおくと、}$$

パルヴェ II 方程式 $\frac{d^2}{dx^2} q = x q + 2q^3$

が得られる. この解で、次の境界条件を満たすものを用いれば良いことが示せる.

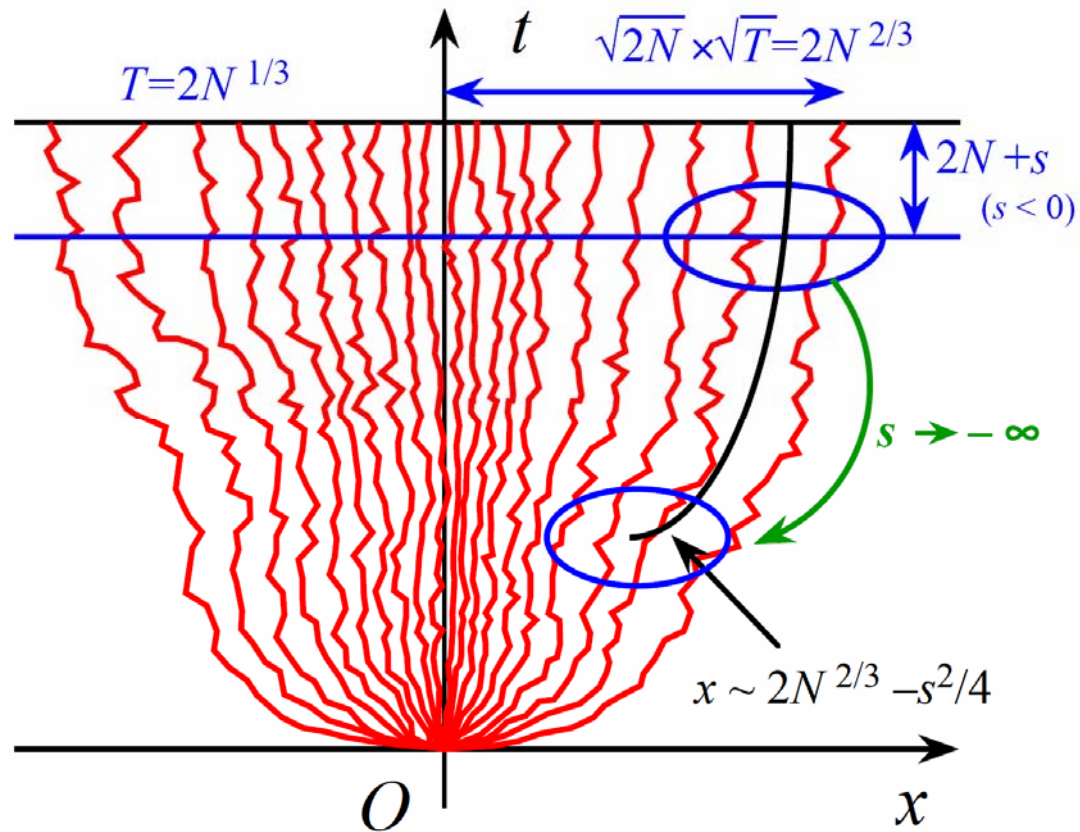
$$q(x) \approx \text{Ai}(x) \quad x \rightarrow \infty$$

$\text{Ai}(x)$ は**エアリー関数**.

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{Ai} = x \text{Ai}$$

$$\text{Ai}(x) \approx \pi^{-1/2} |x|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} - \frac{1}{4} \pi\right) \quad \text{as } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2} \pi^{-1/2} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$



soft-edge scaling limit \Rightarrow Airy kernel

定理 (Hastings, McLeod, 1980)

1. パンルヴェ II 方程式
$$\frac{d^2 q}{dx^2} = xq + 2q^3, \quad -\infty < x < \infty$$

は、任意の定数 k に対して、

$$q(x) \approx k \operatorname{Ai}(x)$$

$$\approx k \left\{ \frac{1}{2} \pi^{-1/2} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \right\} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

という $x \rightarrow +\infty$ での境界条件を満たす解を、それぞれ唯一つだけ持つ。

2. さらに $x \rightarrow -\infty$ での境界条件

$$q(x) \approx \left(-\frac{1}{2}x\right)^{1/2} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty$$

をも満たす解を持つのは、 $k=1$ の場合に限る。

S. P. Hastings and J. B. McLeod, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*,
73 (1980) 31-51.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq N} \lambda_j(t) - m_N^t}{\sigma_N^t} \leq x \right)$$

$$= \exp \left\{ - \int_x^{\infty} (y - x)(q(y))^2 dy \right\} \equiv p(\cdot \leq x)$$

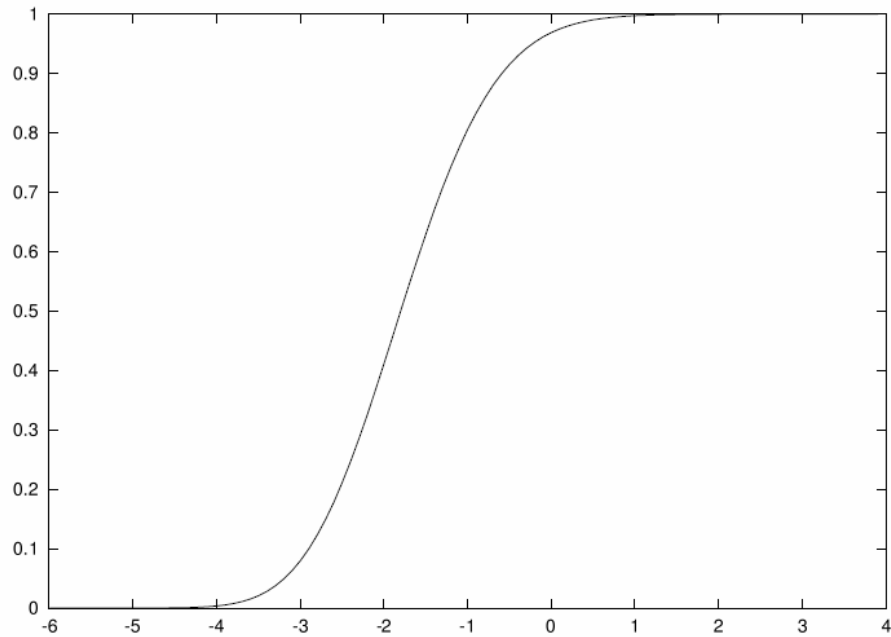
これは、 x 以下の**累積確率分布**であり、**確率密度**は次で与えられる。

$$p(x) = \frac{d}{dx} p(\cdot \leq x) = \int_x^{\infty} (q(y))^2 dy \exp \left\{ - \int_x^{\infty} (y - x)(q(y))^2 dy \right\}$$

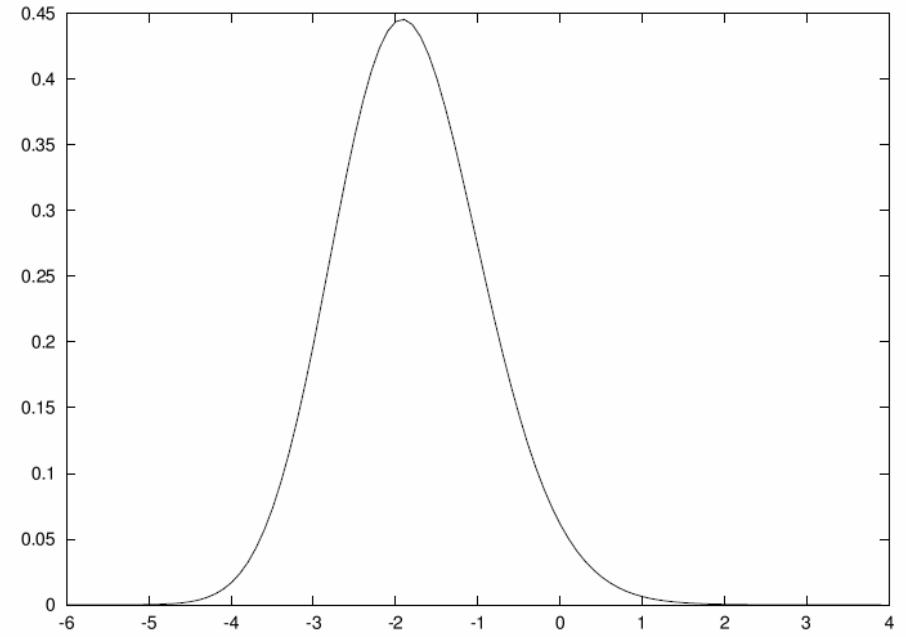
これが **Tracy-Widom 分布**である。

(C.A.Tracy and H. Widom: Commun. Math. Phys. 159 (1994) 151-174.)

Tracy-Widom 分布の累積確率分布と確率密度関数



$p(\bullet \leq x)$



$p(x)$

ソフト・エッジ スケーリング極限

$$\hat{m}_N^t = 2\sqrt{Nt}, \quad \hat{\sigma}_N^t = \sqrt{t} N^{-1/6}$$

$$a \Rightarrow \hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t s$$

パルルヴェII

$$\frac{d^3 R}{da^3} - \left(\frac{a^2}{t^2} - \frac{4N}{t} \right) \frac{dR}{da} + \frac{a}{t^2} R + 6 \left(\frac{dR}{da} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^3}{ds^3} \hat{R}(s) - 4s \frac{d}{ds} \hat{R}(s) + 2\hat{R}(s) + 6 \left(\frac{d}{ds} \hat{R}(s) \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} q(s) = sq(s) + 2(q(s))^3 \quad (\text{if we set } \frac{d}{ds} \hat{R}(s) = -(q(s))^2)$$

エアリー核

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^t K_N^t \left(\hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t x, \hat{m}_N^t + \hat{\sigma}_N^t y \right) \\ &= \frac{\text{Ai}(x) \left\{ \frac{d}{dx} \text{Ai}(y) \right\} - \left\{ \frac{d}{dx} \text{Ai}(x) \right\} \text{Ai}(y)}{x - y} \equiv K^{\text{Airy}}(x, y) \end{aligned}$$

from which we can see $q(x) \cong \text{Ai}(x)$ in $x \rightarrow \infty$

エアリー核

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^t K_N^t \left(m_N^t + \sigma_N^t x, m_N^t + \sigma_N^t y \right) \\ &= \frac{\text{Ai}(x) \left\{ \frac{d}{dx} \text{Ai}(y) \right\} - \left\{ \frac{d}{dx} \text{Ai}(x) \right\} \text{Ai}(y)}{x - y} \\ &\equiv K^{\text{Airy}}(x, y) \end{aligned}$$

フレドホルム行列式

$$\begin{aligned} p(\bullet \leq x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq N} \lambda_j(t) - m_N^t}{\sigma_N^t} \leq x \right) \\ &= \exp \left\{ - \int_x^\infty (y - x) (q(y))^2 dy \right\} \\ &= \text{Det}_{a, b \in \mathbf{R}} \left[\delta(a - b) - K^{\text{Airy}}(a, b) \mathbf{1}_{\{b \geq x\}} \right] \end{aligned}$$

5. 数値計算による研究

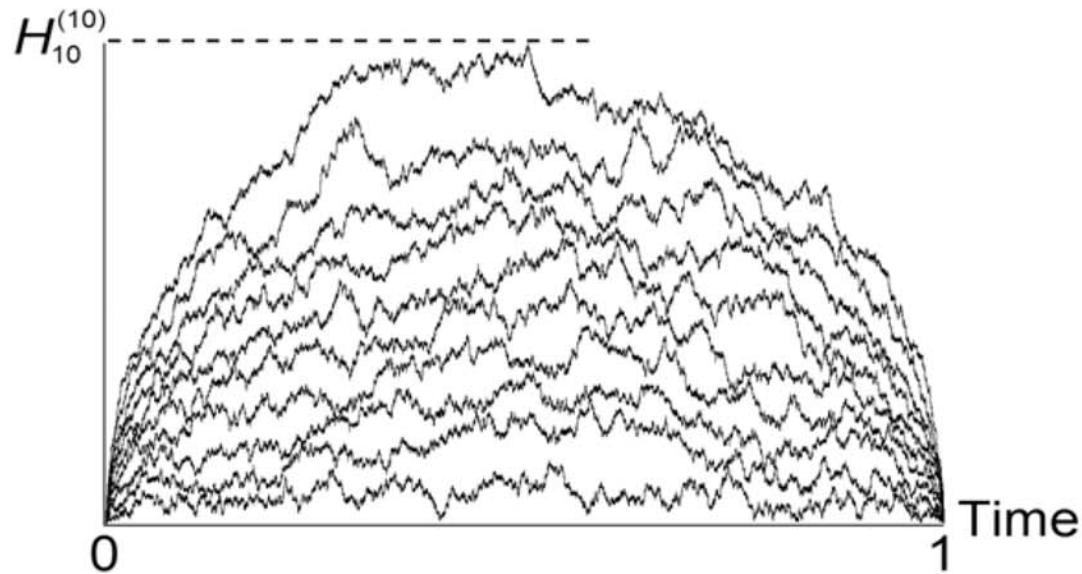
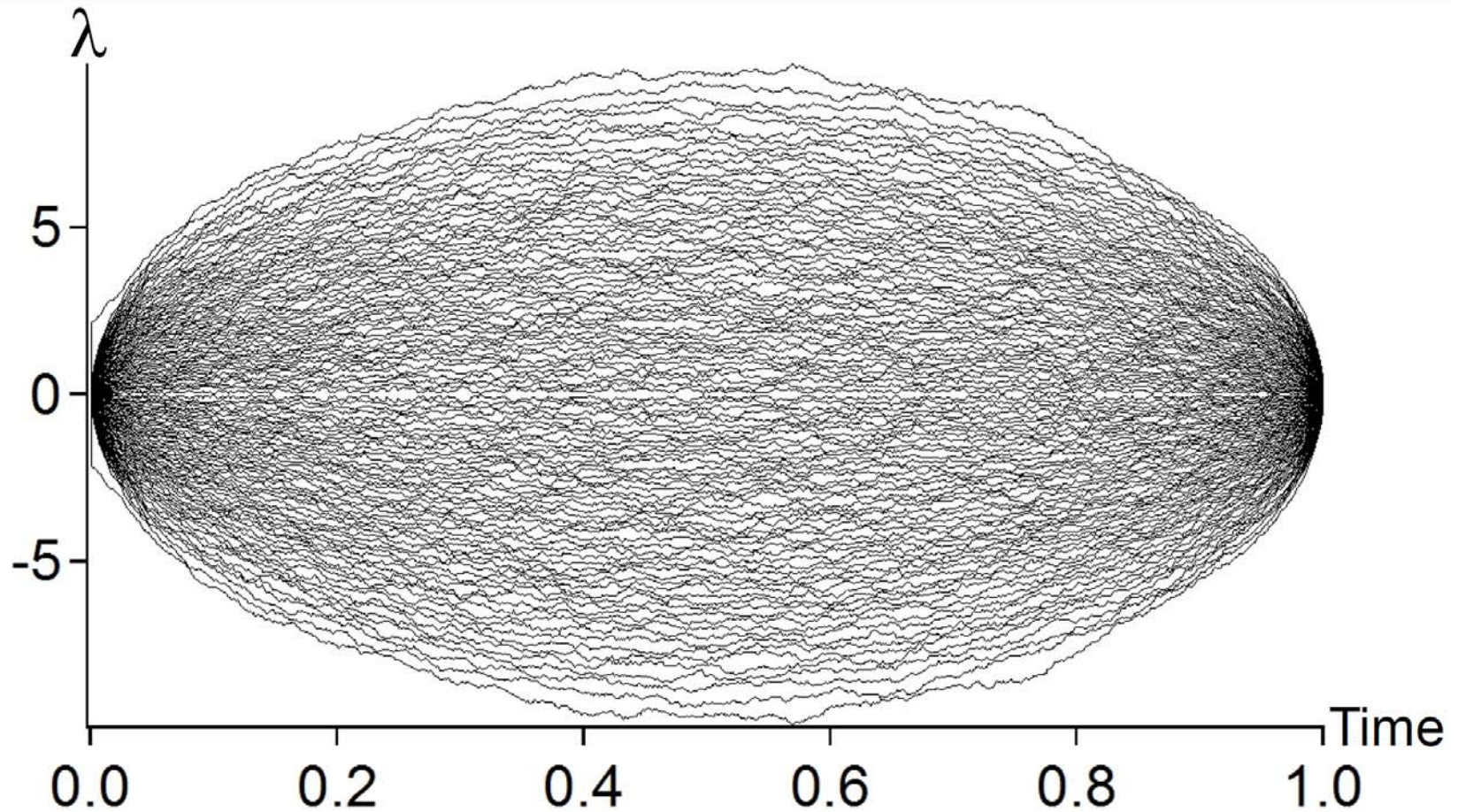


FIG. 2: A sample of paths of $N = 10$ noncolliding Bessel bridges with duration 1, all starting from 0 and returning to 0, realized by the eigenvalue process.



We use $50 \times (2 \times 50 + 1) = 5050$ independent Brownian bridges.