

現代物理学序論

「確率モデルと統計物理学」

香取眞理(かとりまこと)

1号館5階1538室

統計物理(相転移・臨界現象)

数理物理(無限粒子系・ランダム行列理論)

1. Introduction

物理学の2つの方向

- **microscopic** (微視的)
分割、素粒子探求、素過程 …… 微視化
- **macroscopic** (巨視的)
集合体、多体問題、マクロな状態 …… 粗視化

「ミクロな素粒子の1つ1つが分かっても、
系全体の振る舞いは必ずしも理解できない」

典型例 …… 相転移現象

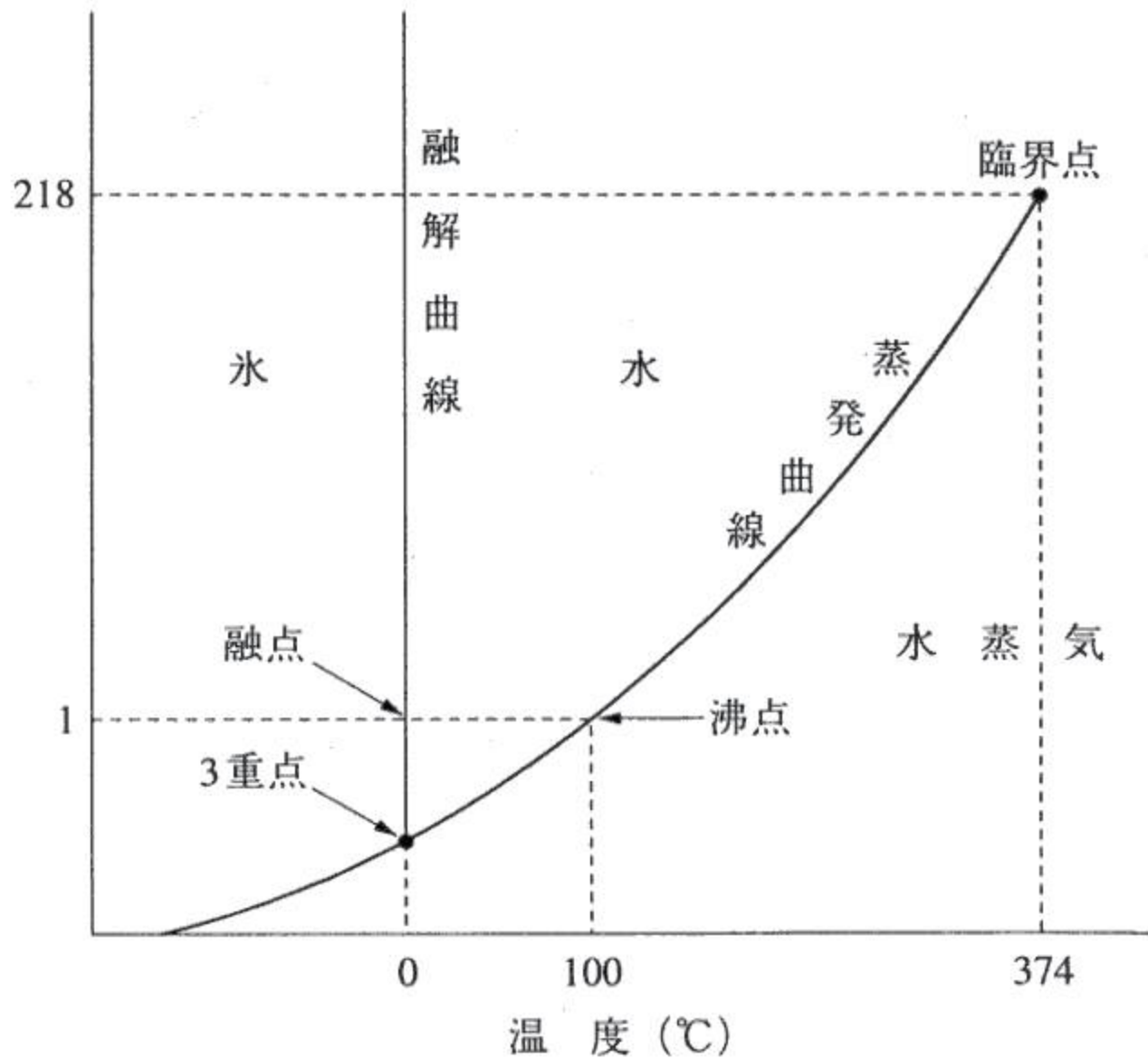


図1・1 水の相図

例1:水の3態(3相)

- 氷 固体 (固相)
- 水 液体 (液相)
- 水蒸気 ... 気体 (気相)

これらの振る舞いは全く異なる.

しかしすべて、ミクロには同一の H₂O 分子からなる.

系の様相の大局的な変化.....「相転移」

Phase Transitions

例2: 磁石の磁力

「磁石(鉄やニッケルなどの磁性体)は磁力を持つ」

実は、この文章は

「水(H₂O)は液体である」

というのと同じくらい、物理的には**ナンセンス!**

磁石が磁力を持つのは、我々の世界が(キュリー温度に比べて)低温だから。

磁石も温度を上げると(液体の水が沸騰して水蒸気になるように)相転移を起こして、磁力を失ってしまう。

磁石は T_c (キュリー温度) を超えると磁力を失う。
キュリー温度は鉄の場合 770°C くらい

強磁性体の相転移現象

第2章 磁石のモデルと森林生態系

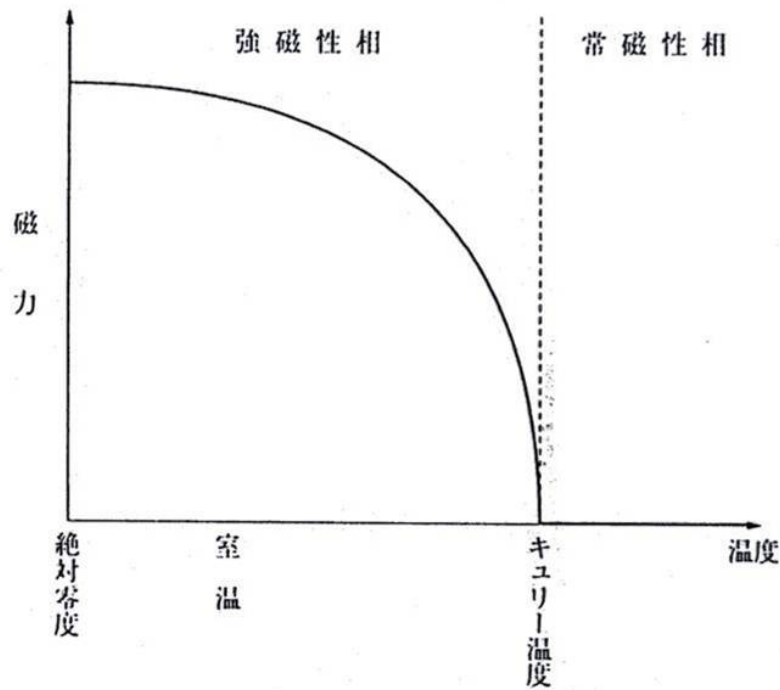


図2・1 磁石の磁力の温度による変化

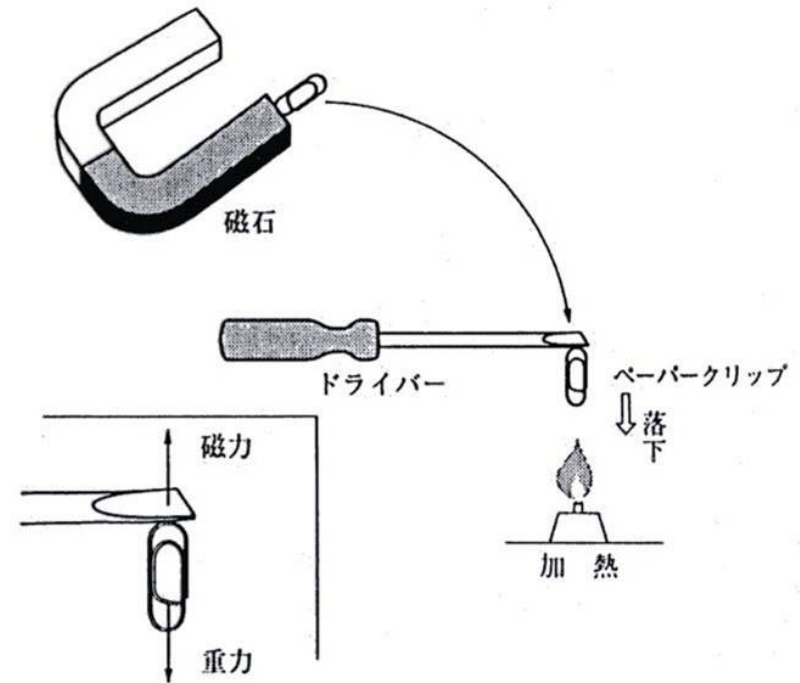


図2・2 簡単な実験

2: 磁石のモデル (イジング・モデル Ising model)

磁石の素

磁石の磁性の素は、
電子の持つ磁気モーメント(非常に小さな磁石である)

$$\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

(比較: 電流の素は、電子の流れであった。)

電子がなぜ磁力を持つのか？

(古典的なイメージ) 電子は電荷を持っているが、

実は自転している。(これを スピン spin という。)

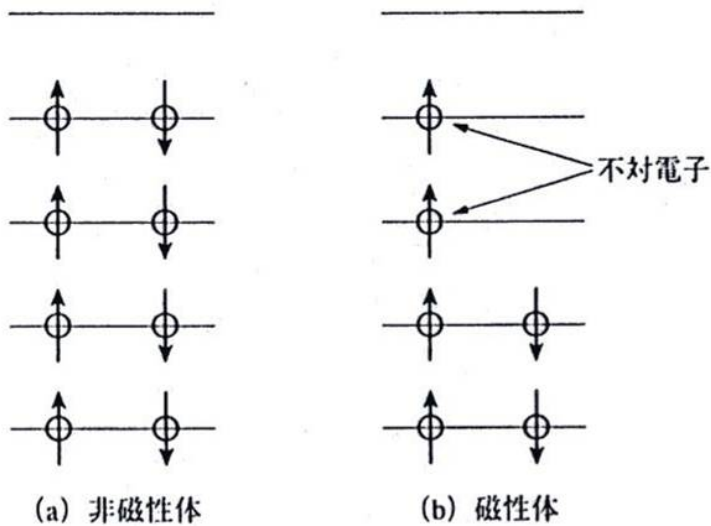
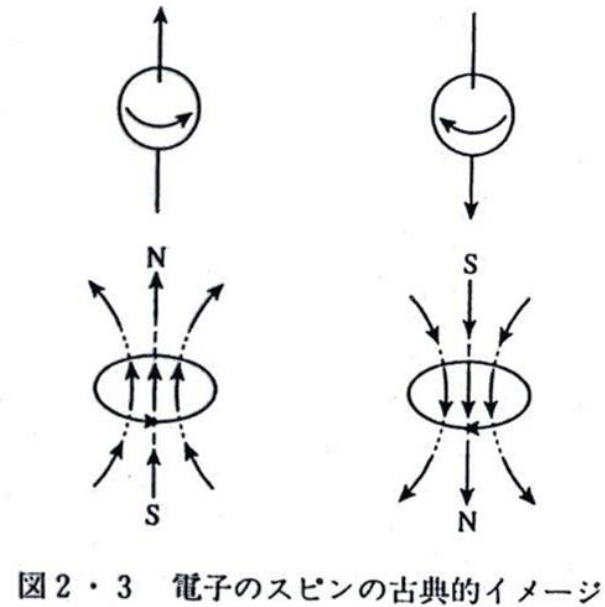


図2・4 磁性体と非磁性体

非磁性体: 磁石につかないもの
 (例) アルミニウム
 磁性体: 磁石のつくもの
 (例) 鉄, ニッケル



電荷 ($-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) を持つ電子は
自転 (spin) している。



微小磁力を持つ
 $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

パウリの排他律

電子などのフェルミ粒子では、
2つ以上の粒子が同時に
同じ状態になることは不可能

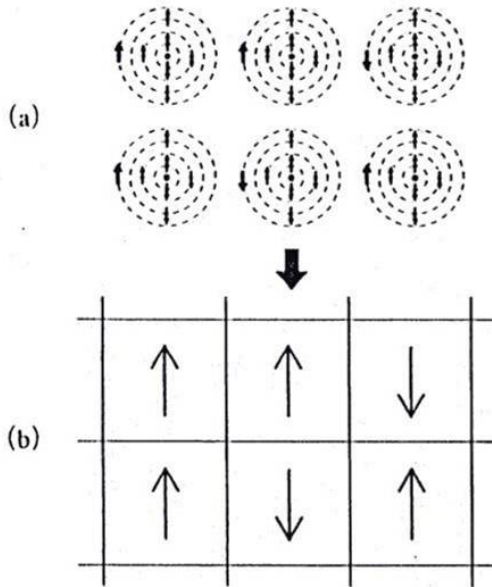


図2・5 粗視化して格子スピン・モデルにする

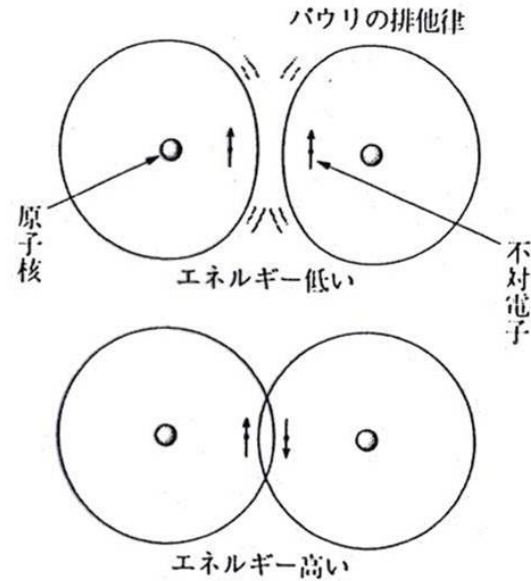


図2・6 パウリの排他律と交換相互作用

この場合の「同じ状態」とは、
スピン(自転)の向きが揃った状態が
近づく(空間的に同じ位置にある)ということ。

電子は全てマイナス電荷なので、近づくときクーロン反発力のため、電気ポテンシャル・エネルギーが高くなる。

エネルギーとエントロピー

相反する2つの自然法則

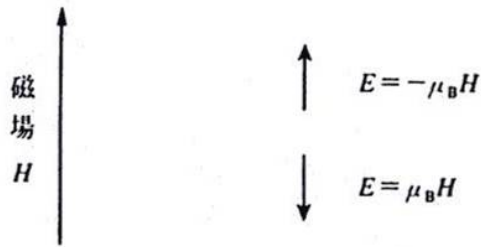
自然法則1: 自然はエネルギーが低い状態を好む。
 E が小さい方が良い(負の方が良い)。

自然法則2: 絶対零度以外では、自然は乱雑になりたがる。
この乱雑になりたがる傾向は、絶対温度 T
が上がるほど増す。
エントロピー S 増大則

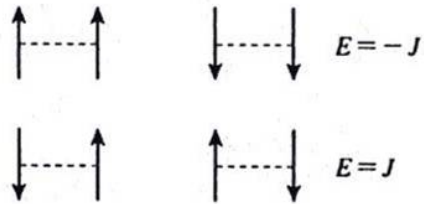
熱力学(統計力学): 上の2つの法則の統一理論

自由エネルギー最小の法則

$F = E - TS$ …… これが小さい(負の)方が良い



(a) ゼーマン・エネルギー



(b) 交換相互作用

図2・7 スピンの向きとエネルギー

エネルギー

$$E = -J \sum_{i,j} s_i s_j - \mu_B H \sum_i s_i$$

s_i = サイト i の電子のスピンの向き
 $= \begin{cases} 1 & \text{スピン上向き} \uparrow \\ -1 & \text{スピン下向き} \downarrow \end{cases}$

キュリー温度
(相転移温度) T_c

絶対零度 $T=0$

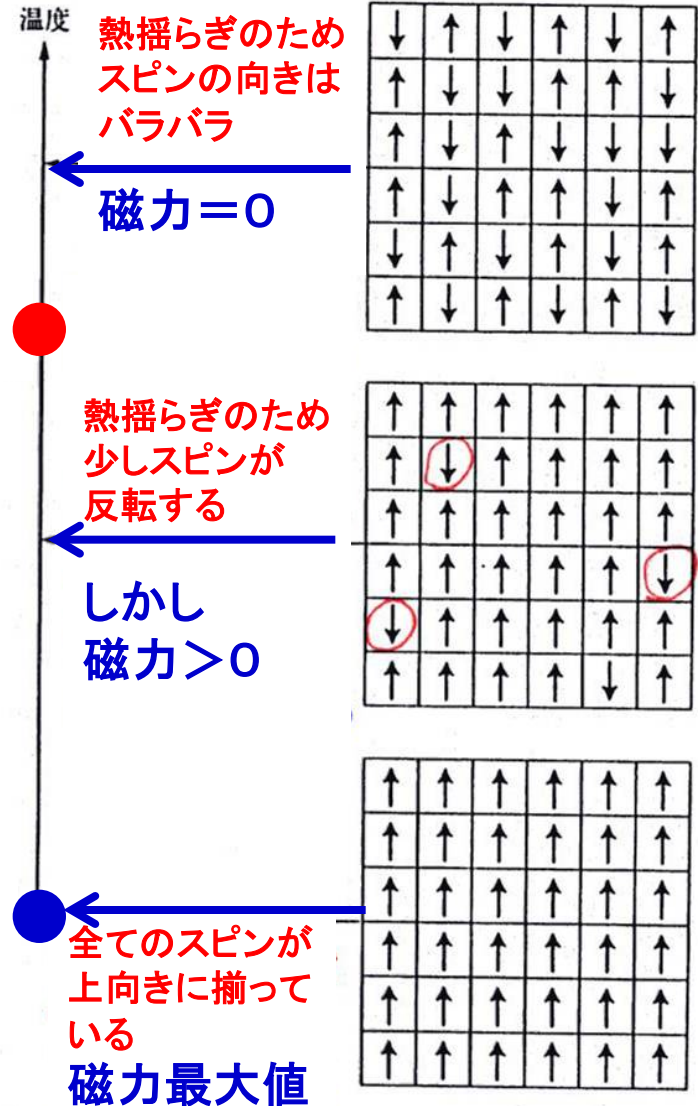


図2・8 スピン配置と温度

磁石は T_c (キュリー温度) を超えると磁力を失う。
キュリー温度は鉄の場合 770°C くらい

強磁性体の相転移現象

第2章 磁石のモデルと森林生態系

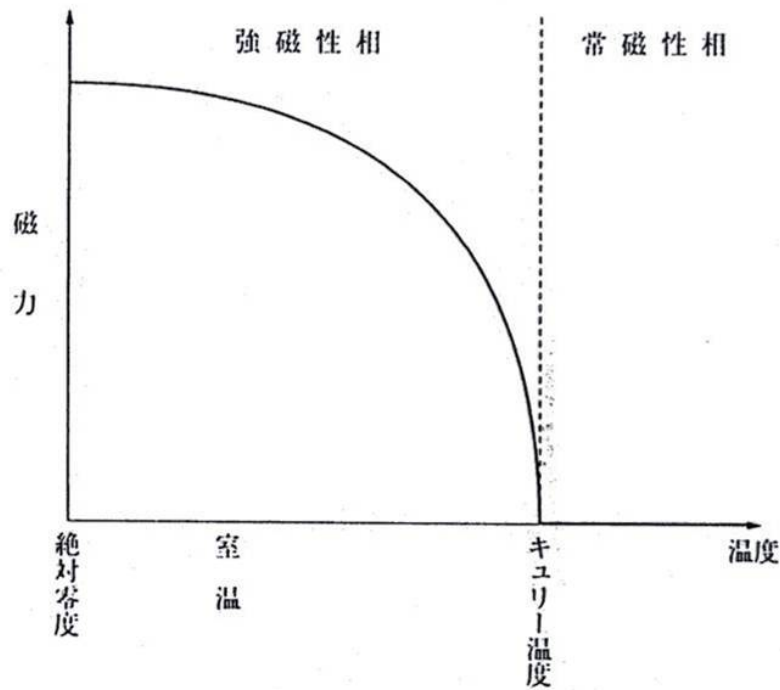


図2・1 磁石の磁力の温度による変化

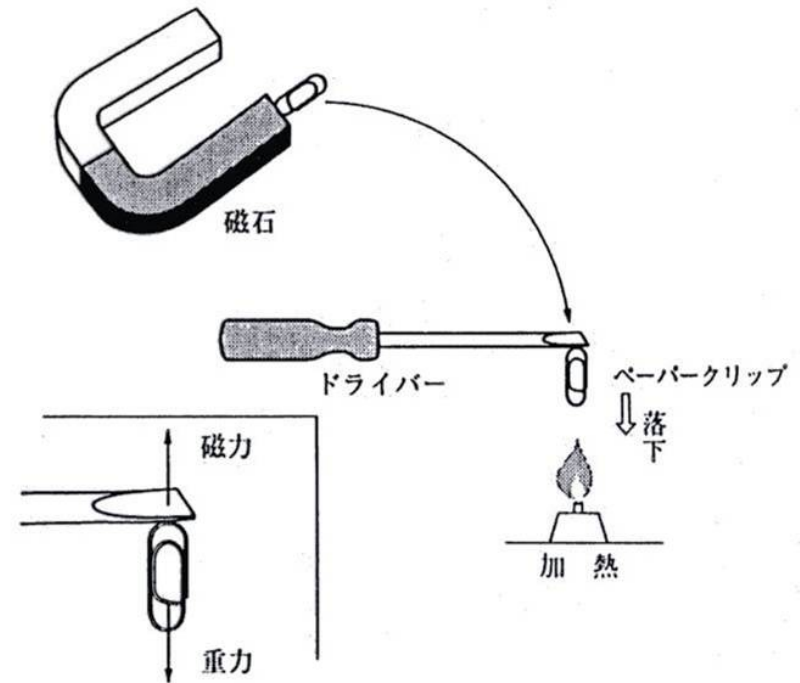
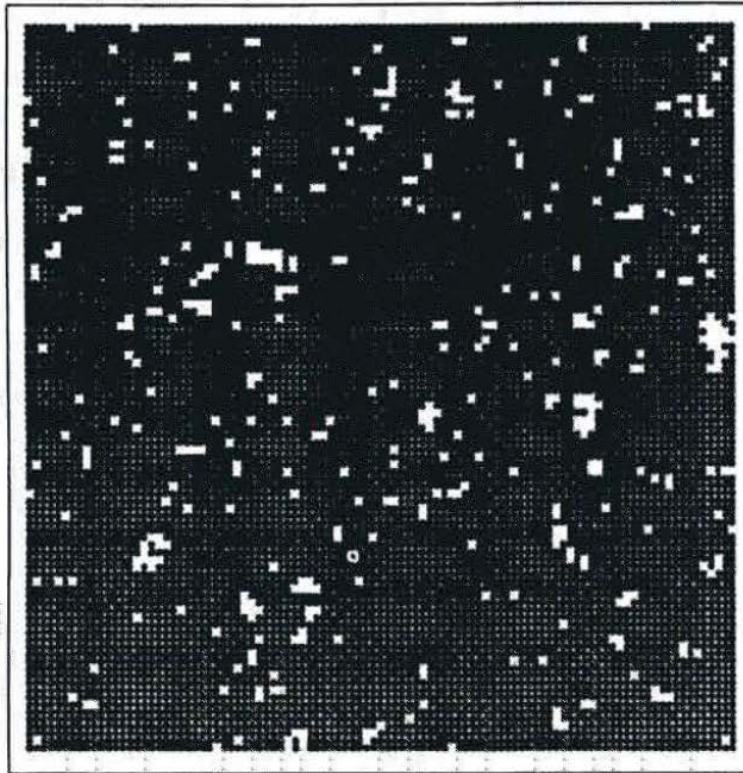


図2・2 簡単な実験

イジングモデル(磁性体のモデル)の計算機シミュレーション

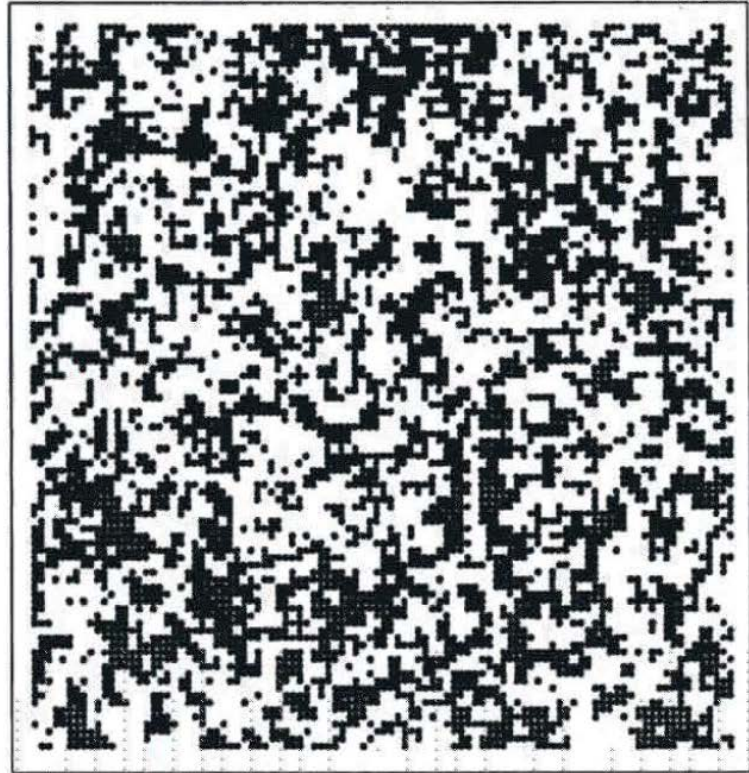
黒: up spin

白: down spin



$T < T_c$ (低温相)

スピンの揃ってエネルギー E が小



$T > T_c$ (高温相)

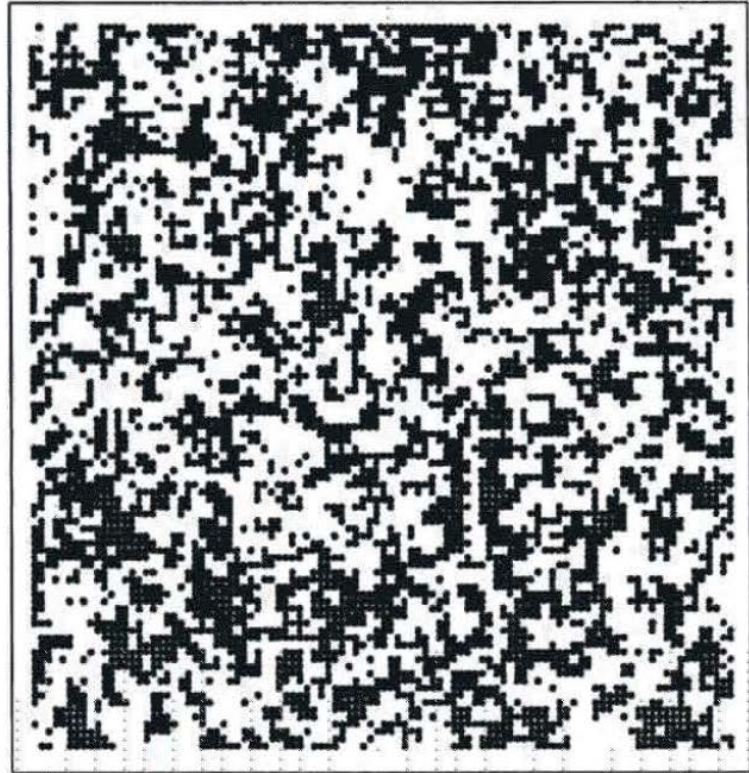
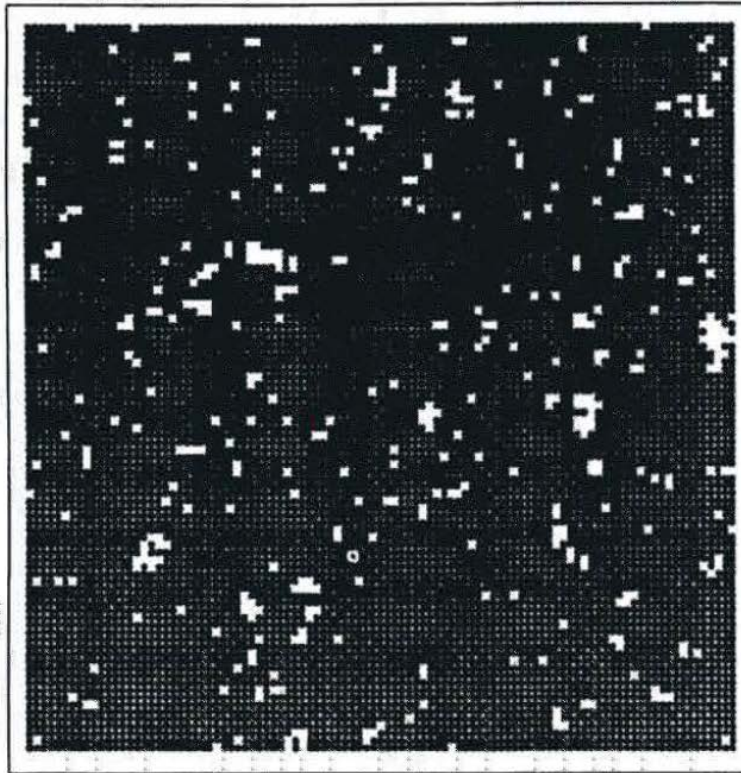
スピンの不揃いでエントロピー S が大

熱力学(統計力学)の大法則 E = エネルギー、 T = 絶対温度、 S = エントロピーとしたとき
「自由エネルギー最小の原理」 $F = E - TS$

イジングモデル(磁性体のモデル)の計算機シミュレーション

黒: up spin

白: down spin



$T < T_c$ (低温相)

スピンの揃ってエネルギー E が小

$T > T_c$ (高温相)

スピンの不揃いでエントロピー S が大

T_c = 相転移温度 (臨界温度, キュリー温度)

熱力学(統計力学)の大法則 E = エネルギー、 T = 絶対温度、 S = エントロピーとしたとき
「自由エネルギー最小の原理」 $F = E - TS$

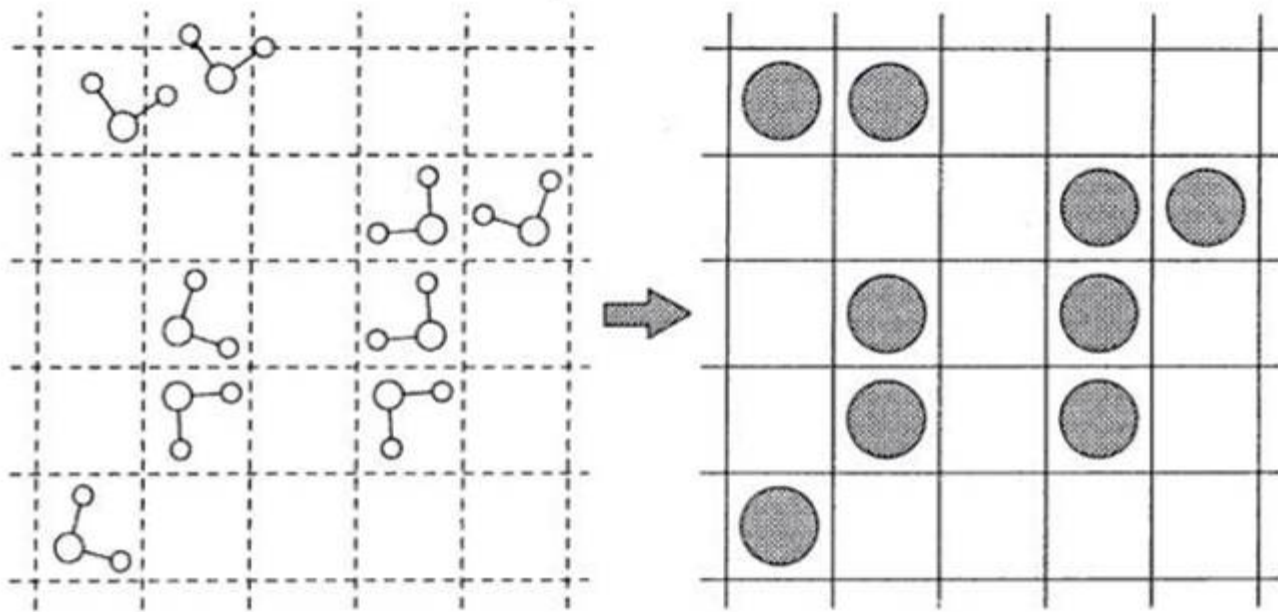


図 1・2 格子ガス・モデル

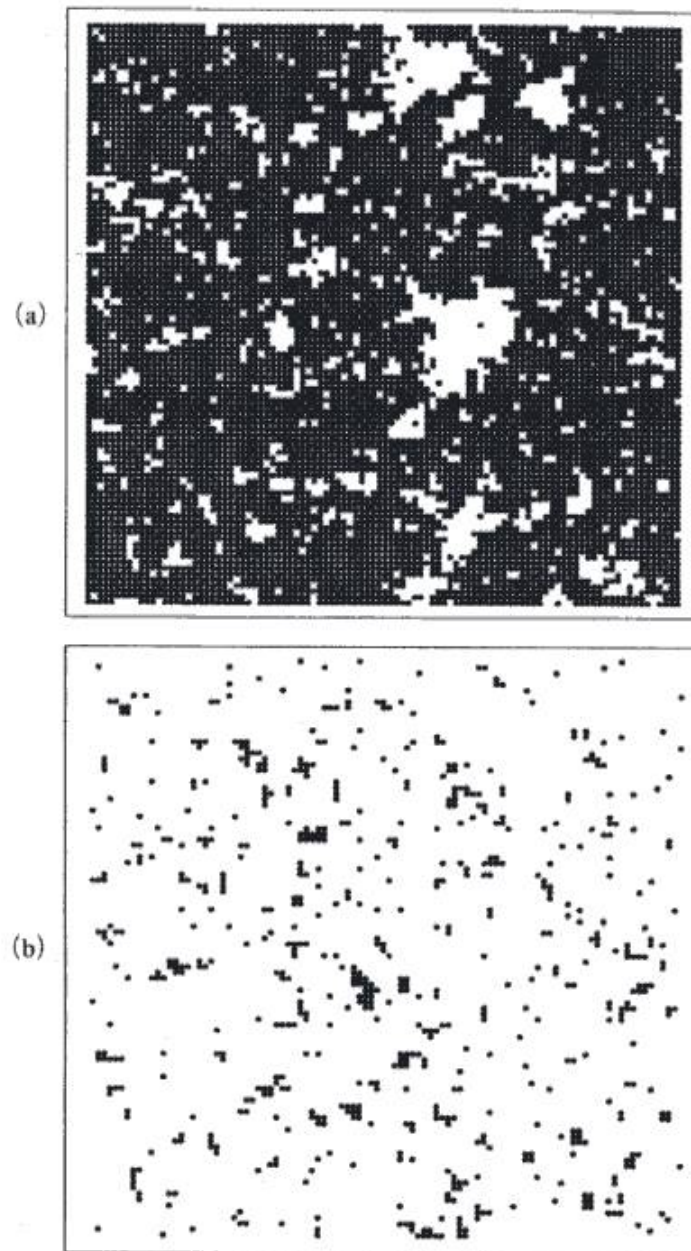


図1・3 格子ガス・モデルにおける(a)液相と(b)気相

3: 臨界点でのフラクタル性

T_c = Curie Temperature (キュリー温度)

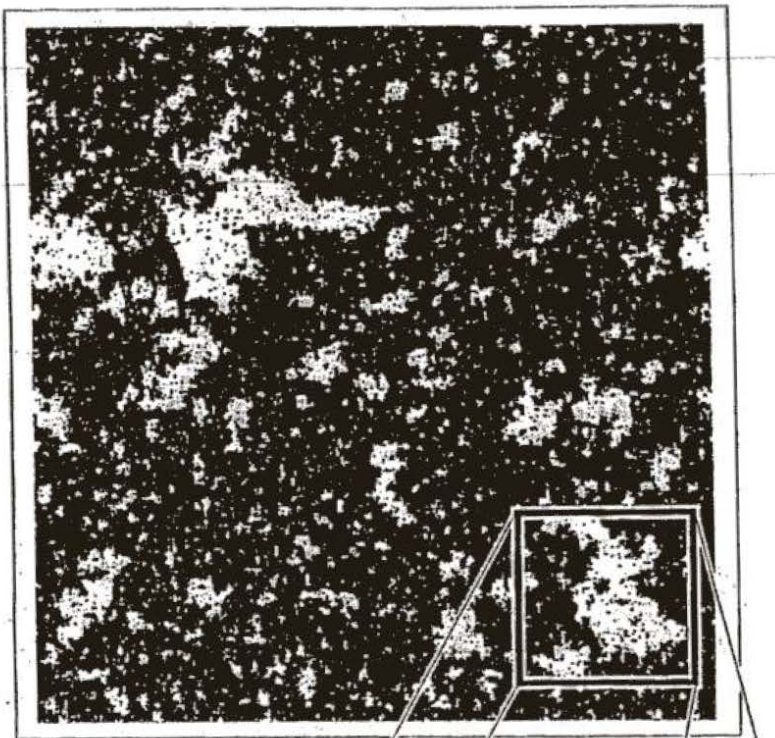
ピエール・キュリー(マリー・キュリーの旦那)

ちょうど $T=T_c$ のときのスピン配置は

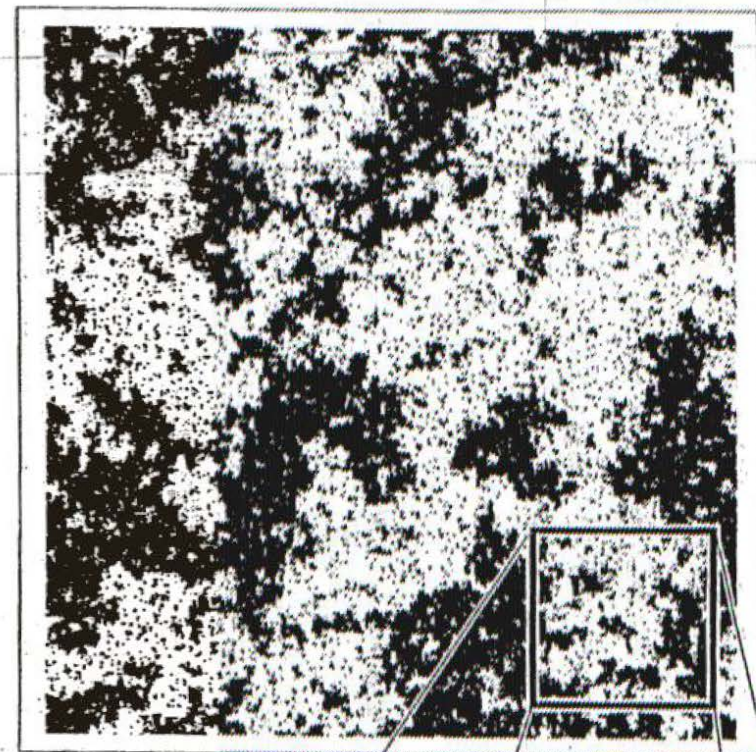
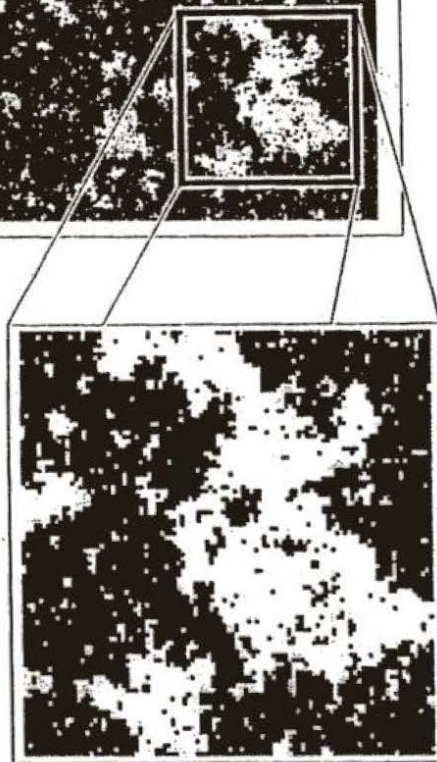
フラクタル的(自己相似性を持つ)になっている。

比較: フラクタル図形の例: Sierpinski の3角形

次元 $D=\log 3/\log 2=1.58\dots$



$T < T_c$, $T > T_c$
では
特徴的な
スケールを
もってしまう



$T = T_c$ では
スケール不変性
(フラクタル構造)



フラクタル図形

(自己相似性＝拡大・縮小しても同じように見える)

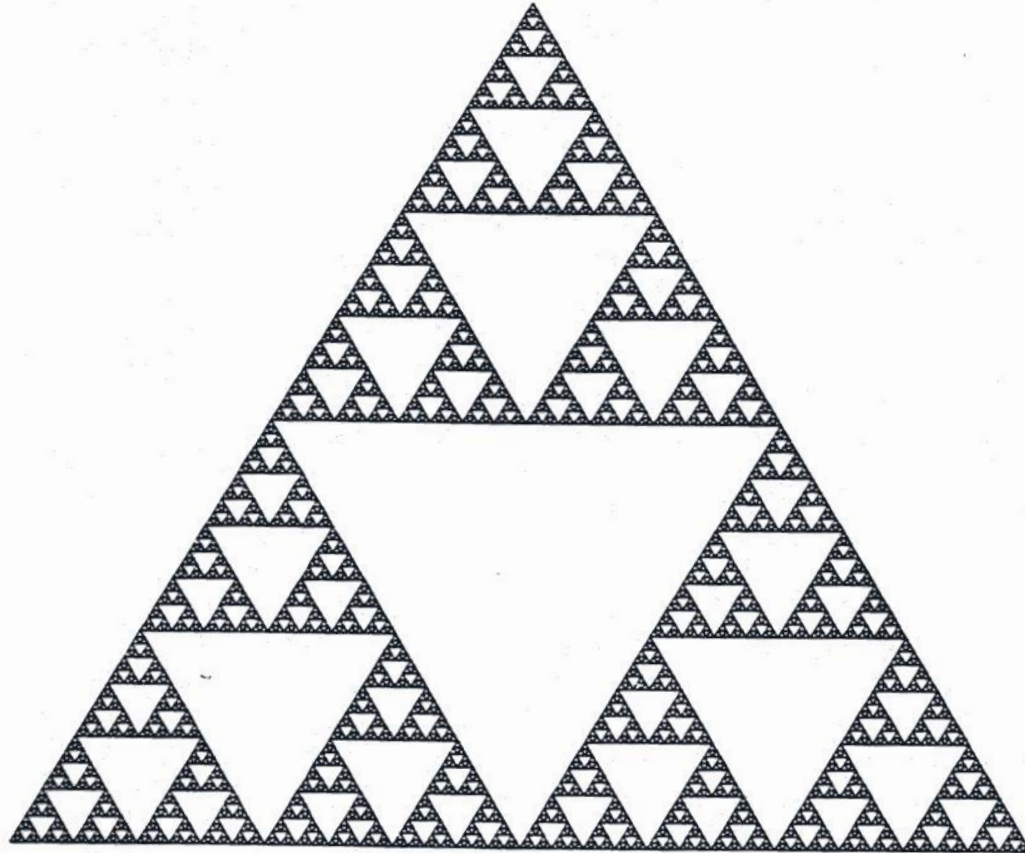
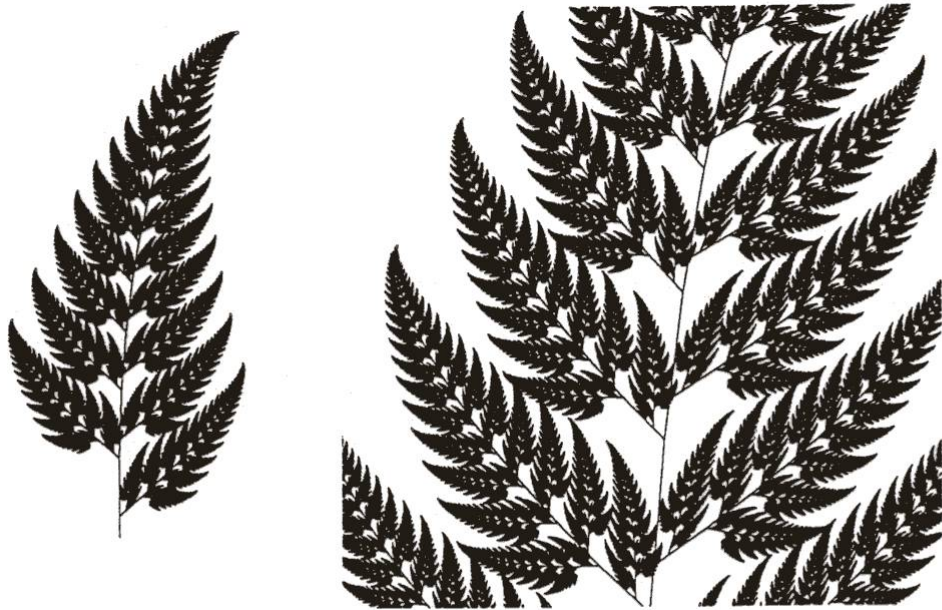
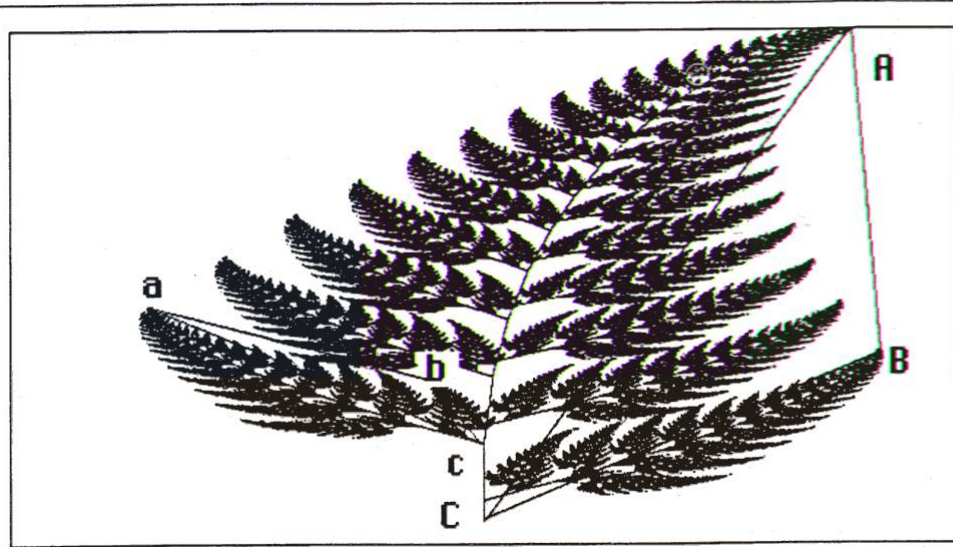
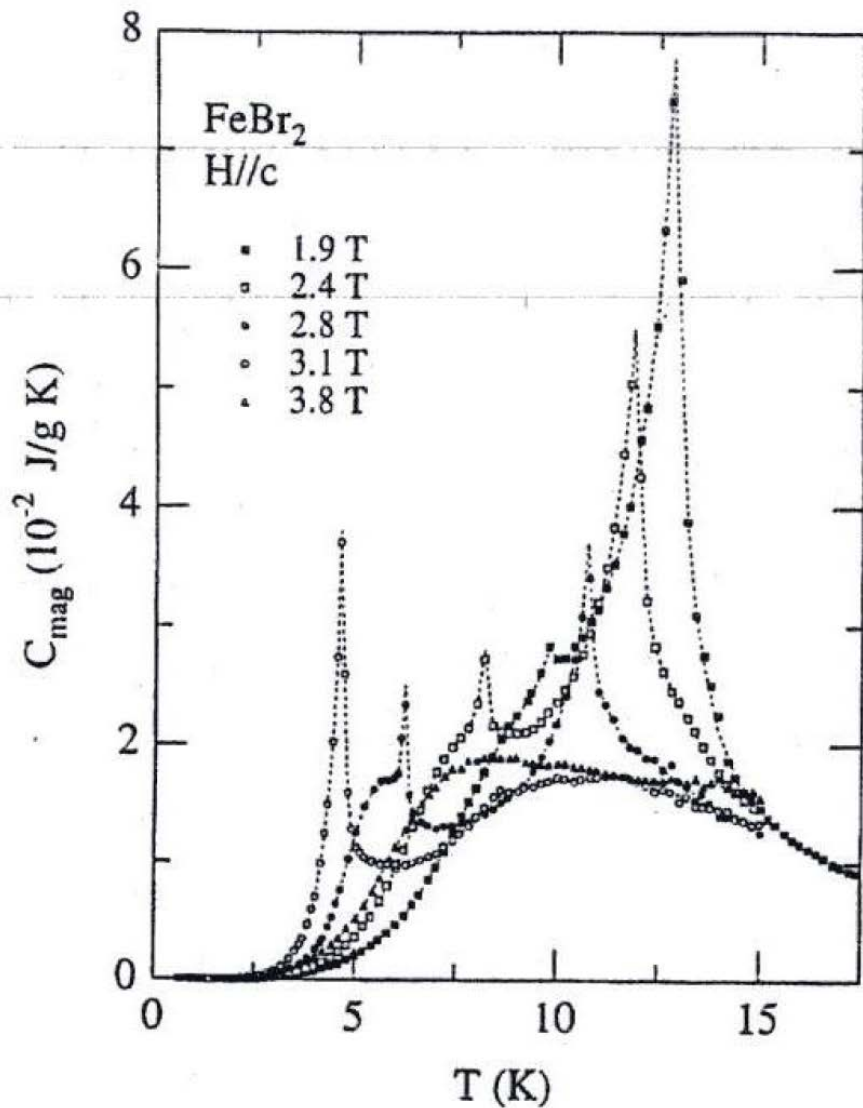


図1・5 シェルピンスキーの三角形





磁性体の相転移点(臨界点)では
帯磁率や比熱といった
応答関数が発散する。

異常応答 …… 臨界現象の一つ
critical phenomena

図 4: FeBr₂ の磁場中相転移. 横軸は温度, 縦軸は磁気比熱. いろいろな磁場の大きさ(テスラ T)での結果を重ねて描いてある. (Aruga Katori, Katori, Katsumata, *Phys.Rev.B* 54 (1996) R9620 より)

4:森林生態系とイジング・モデル

パナマ運河のバロコロラド島の熱帯林調査区の林冠ギャップの空間分布を、磁石のミクロなモデルであるイジング・モデルを使って解析することが出来る。

その結果、多くの原生林の樹木の分布は、やはり**フラクタル性を持つ**ことが分かった。

森林生態系とイジング模型

Neotropical forest

in Barro Colorado Island, Panama

50 ヘクタール (500 m × 1000 m) の熱帯季節林

Data: S.P. Hubbell and R. B. Foster, 1986 年発表

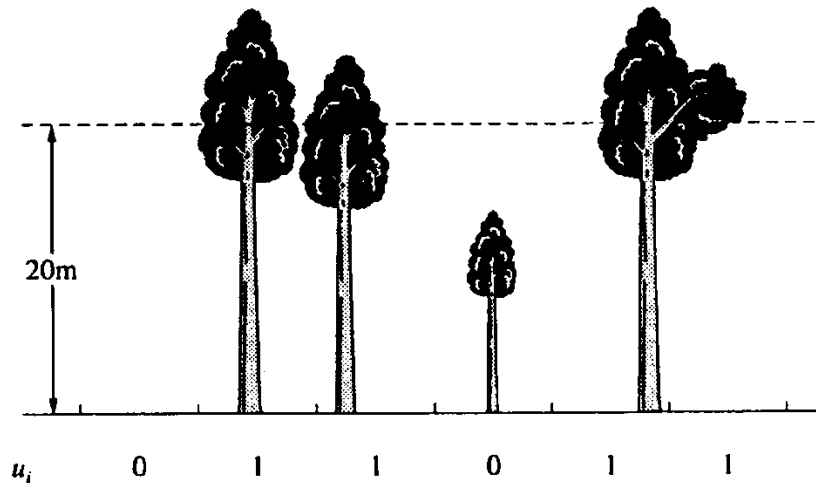


図 2・13 林冠サイトと林冠ギャップサイト

小調査区 (5 m × 5 m) に分割

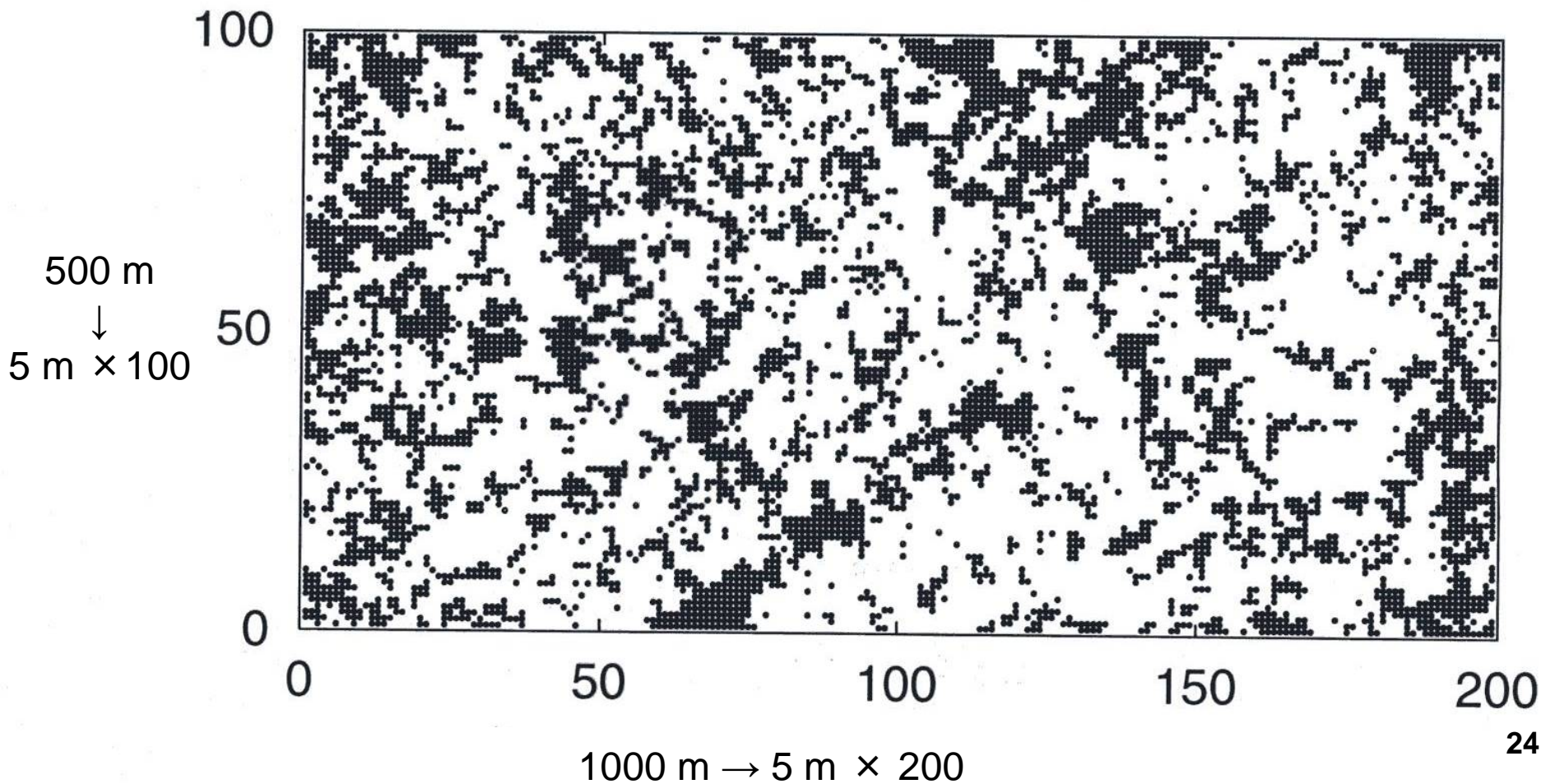
Canopy-gap (林冠ギャップ) サイト = 最高樹高 < 20 m の小調査区のこと 23

1983年 調査結果

黒 林冠ギャップサイト 樹高 < 20 m

白 林冠サイト 樹高 > 20 m

調査区 200 × 100 サイト



Barro Colorado Island (1983)

1999)

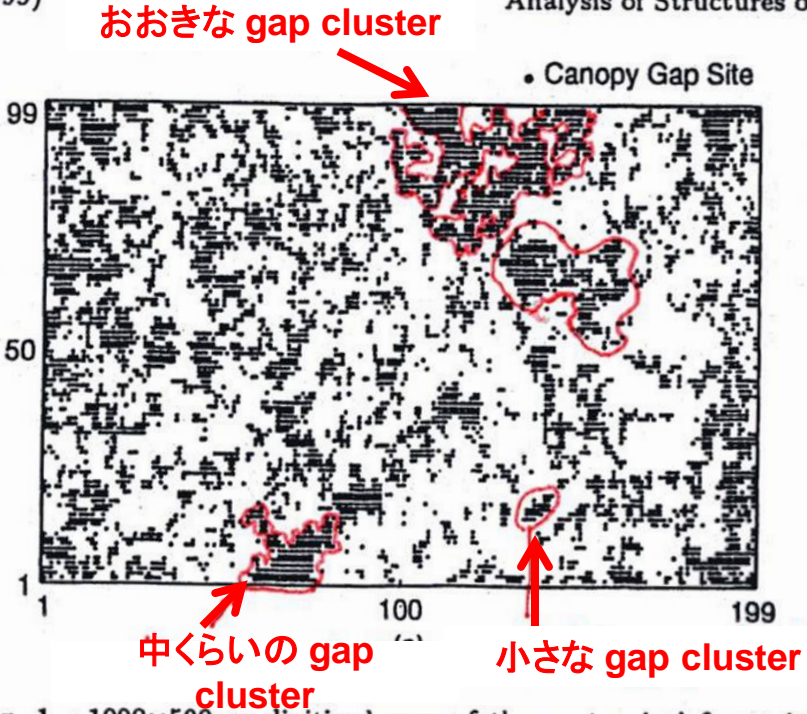


Fig. 1. 1000x500 m digitized map of the neotropical forest in Barro Colorado Island, Panama, in 1983.^{2,4)} Gap sites, 5x5 m subplots in which vegetation height is less than 20 m, are plotted by black dots.

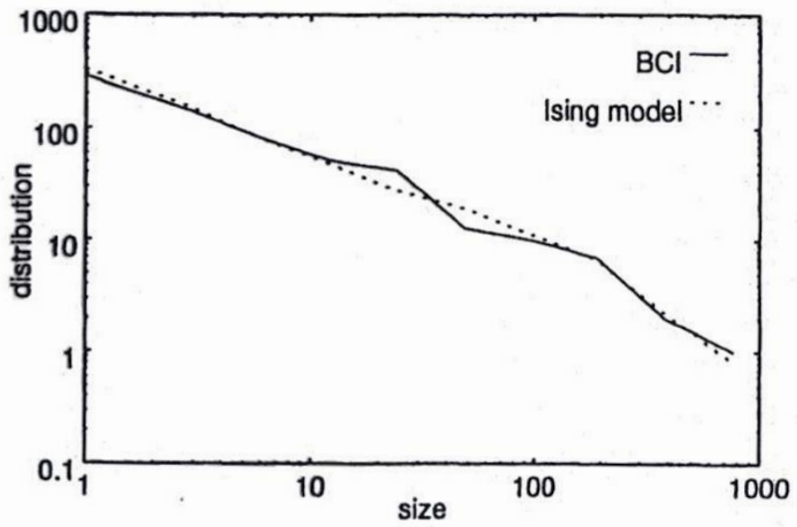


Fig. 2. Log-log plot of the gap-size distribution for BCI and the cluster-size distribution of down spins in the Ising-Gibbs state with $K = 0.37$ and $h = 0.016$.¹¹⁾ The size of the gap cluster (down-spin cluster) is determined with Neumann neighborhood. For the Ising-Gibbs state, we performed the Monte Carlo simulations on a 700×700 square lattice with the periodic boundary condition and averaged over 10 data, each of which is obtained after discarding 1500 Monte Carlo steps. Clusters contained in a 199×99 region on the lattice are counted and the points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

林冠ギャップのかたまり(クラスター、cluster)のサイズ S の分布
両対数グラフでほぼ一直線

Praise for **SIGNS OF LIFE**

ants and stockmarkets, cells and mass extinction. All
y told by two of the most brilliant and engaging
rapidly emerging science of complexity.

STUART PIMM

Author of *The Balance of Nature?*

theoretical biologists, Richard Solé and Brian
duced an outstanding book. Non-linear dynamics
of collective "higher" properties are central con-
g applications in biology and beyond. *Signs of Life*
ifted, readily understandable, and wise book.
s, physicists, and a wide audience will read it with
tual profit."

STUART KAUFFMAN

Author of *Investigations* and *At Home in the Universe*

s of systems where the whole is (far) greater than
ganisms seem to defy analysis using the traditional
of reductionism. A small—but growing—band of
scientists is forging a path to a new understanding
ive. In this fascinating new book, Solé and Goodwin
ness made so far, and point the way to what we can
future."

KEITH DEVLIN

Author of *The Math Gene* and
Mathematics: The Science of Patterns

int of the Perseus Books Group
icbooks.com

US \$30.00 / \$44.95 CAN
ISBN 0-465-01927-7

9 780465 019274

SIGNS OF LIFE
SOLE AND GOODWIN
HOW COMPLEXITY PERVADES BIOLOGY

SIGNS OF LIFE

HOW
COMPLEXITY
PERVADES
BIOLOGY

RICARD SOLÉ AND BRIAN GOODWIN

Rechard Sole'らの2000年発行の本
(サンタフェ 複雑系研究所、バルセロナ大)

An Ising Model for the Rainforest

In a recent paper, Makoto Katori and coworkers have shown that the forest canopy dynamics of the Barro Colorado plot can, in fact, be regarded as the result of an Ising-like model²¹ (see Chapter 2). Using a simple set of rules directly inspired by field data analysis, Katori et al. reproduced some of the most interesting properties of the Barro Colorado 50 hectare plot. In Figure 7.17 the basic rules are described. Here two types of states are allowed (as with the Ising model): nongap points (here white squares) and gap points (black squares, corresponding to canopy below 20 meters high).

Field data provided the estimation of the transition rates (indicated in the figure below the arrows for each of the six possible cases). Here d is the spontaneous creation of a canopy gap (here $d \approx 0.024$), and δ_k

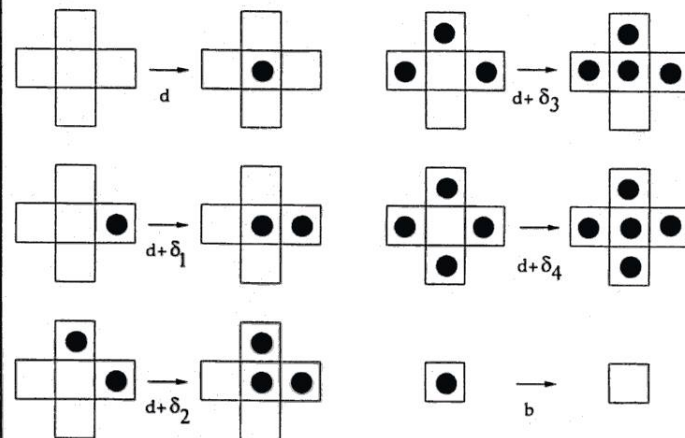


Figure 7.17 Basic rules defined in the Katori's et al. model. Gaps sites are denoted by black circles.

indicates the risk of falling trees due to the presence of neighboring gaps. Katori et al. use the simple (and sensible) approximation $\delta_k = k\delta$, where $k = 1, \dots, 4$ and $\delta = 0.276$. This choice is based in the observation that the presence of nearest canopy gaps strongly increases the fall of neighboring trees either by direct physical effects or because of the strong modifications of local microclimate. The model is completed by introducing a transition rate from a canopy gap point to a noncanopy point due to tree growth ($b = 0.177$).

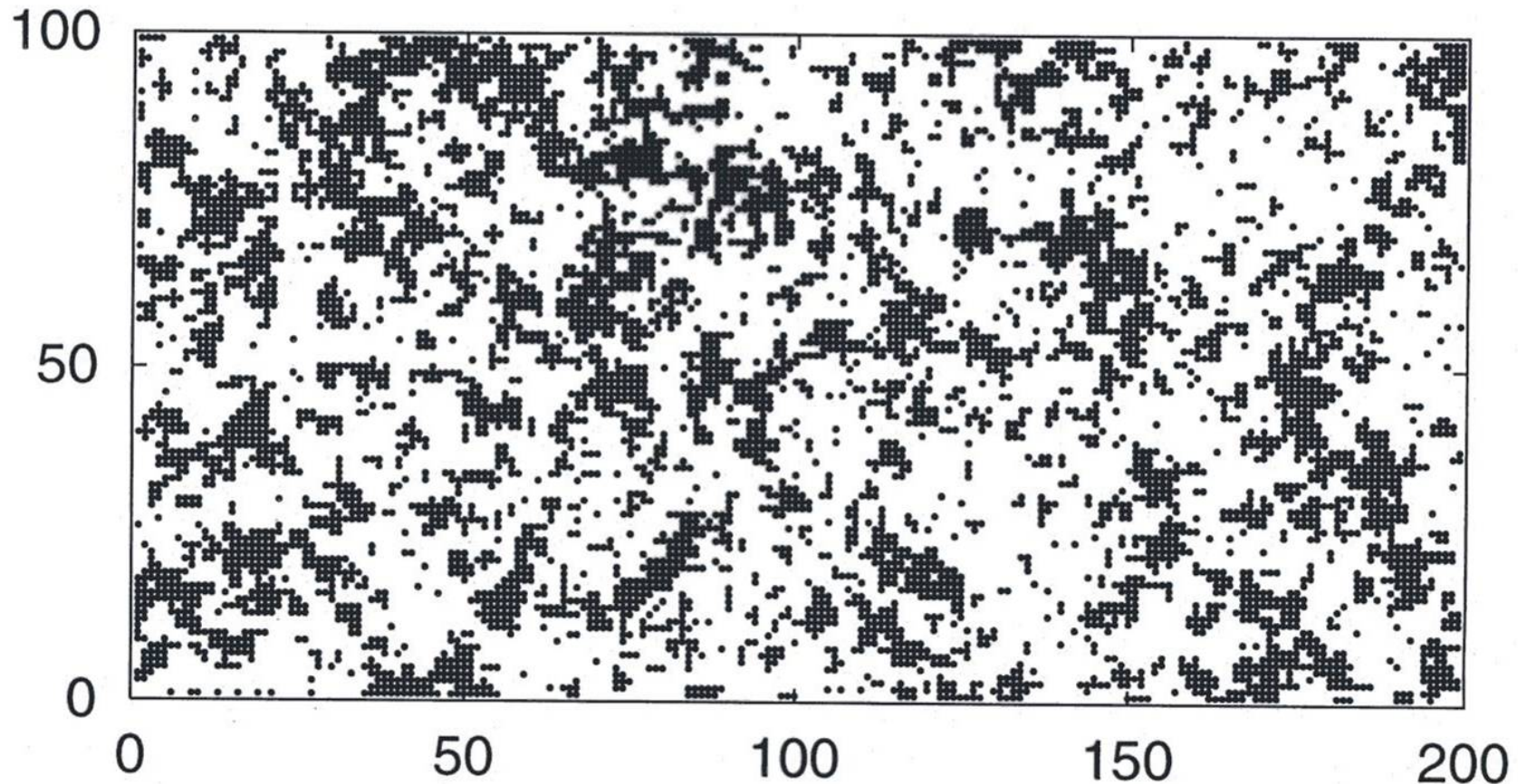
The dynamics of this model give quite good results. But Katori et al. go a step further and show that in fact, this model is equivalent to an Ising model close to criticality. They estimated the appropriate temperature for the Ising model configuration consistent with Barro Colorado data. An example of the similarity between the Ising model and its rainforest counterpart is shown in Figure 7.15b, to be compared with Figure 7.15a (from Katori et al., 1998). The quantitative agreement between both plots can be shown by means of fractal measures or by plotting the size distribution of canopy gaps. The later is shown in Figure 7.16, where both field data and simulation are shown. These results give strong support to the early conjecture that rainforest dynamics take place close to critical states.²²

林冠ギャップ
生成・消滅の
確率モデル
↓
Ising 模型

Ising 模型でシミュレートした BCI の林冠ギャップ分布

$$K = \frac{J}{kT} = 0.37, h = \frac{\mu_B}{kT} = 0.016$$

Ising



Barro Colorado Island (1983)

1999)

Analysis of Structures of Forests by Ising-Gibbs States

2555

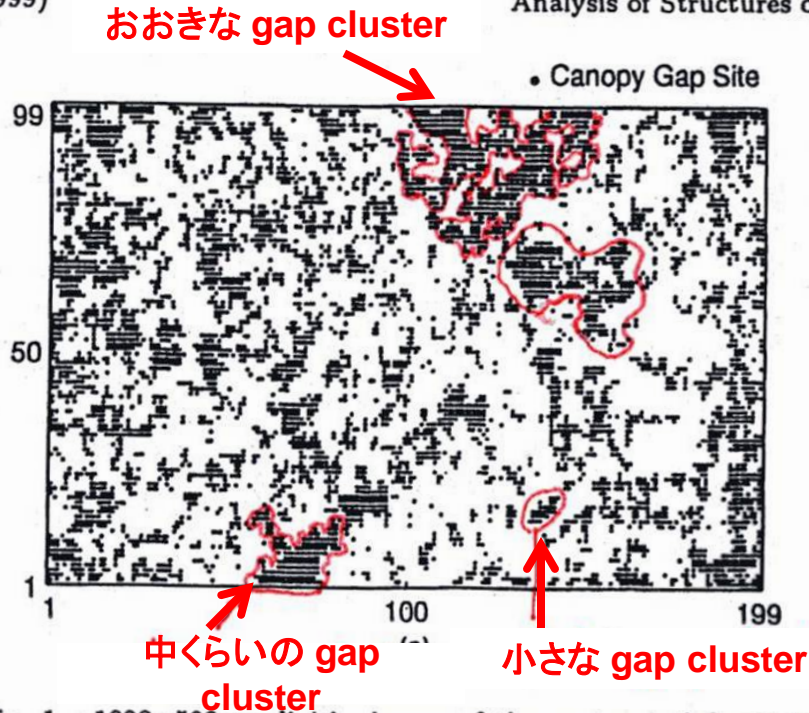


Fig. 1. 1000×500 m digitized map of the neotropical forest in Barro Colorado Island, Panama, in 1983.^{2,4)} Gap sites, 5×5 m subplots in which vegetation height is less than 20 m, are plotted by black dots.

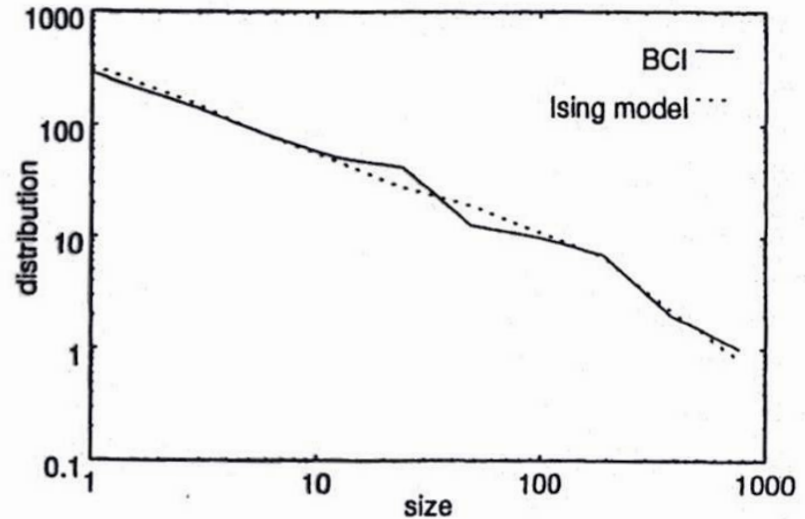


Fig. 2. Log-log plot of the gap-size distribution for BCI and the cluster-size distribution of down spins in the Ising-Gibbs state with $K = 0.37$ and $h = 0.016$.¹¹⁾ The size of the gap cluster (down-spin cluster) is determined with Neumann neighborhood. For the Ising-Gibbs state, we performed the Monte Carlo simulations on a 700×700 square lattice with the periodic boundary condition and averaged over 10 data, each of which is obtained after discarding 1500 Monte Carlo steps. Clusters contained in a 199×99 region on the lattice are counted and the points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

林冠ギャップのかたまり(クラスター、cluster)のサイズ S の分布
 両対数グラフでほぼ一直線

小川森林保護区(日本)

555 m × 455 m
小調査区 5 m × 5 m

航空写真からデータ化
5年毎に調査

1976年

1981年

1986年

1991年

田中氏、中静氏
京都大学、森林総研

林冠ギャップサイト
= 最高樹高 < 15 m

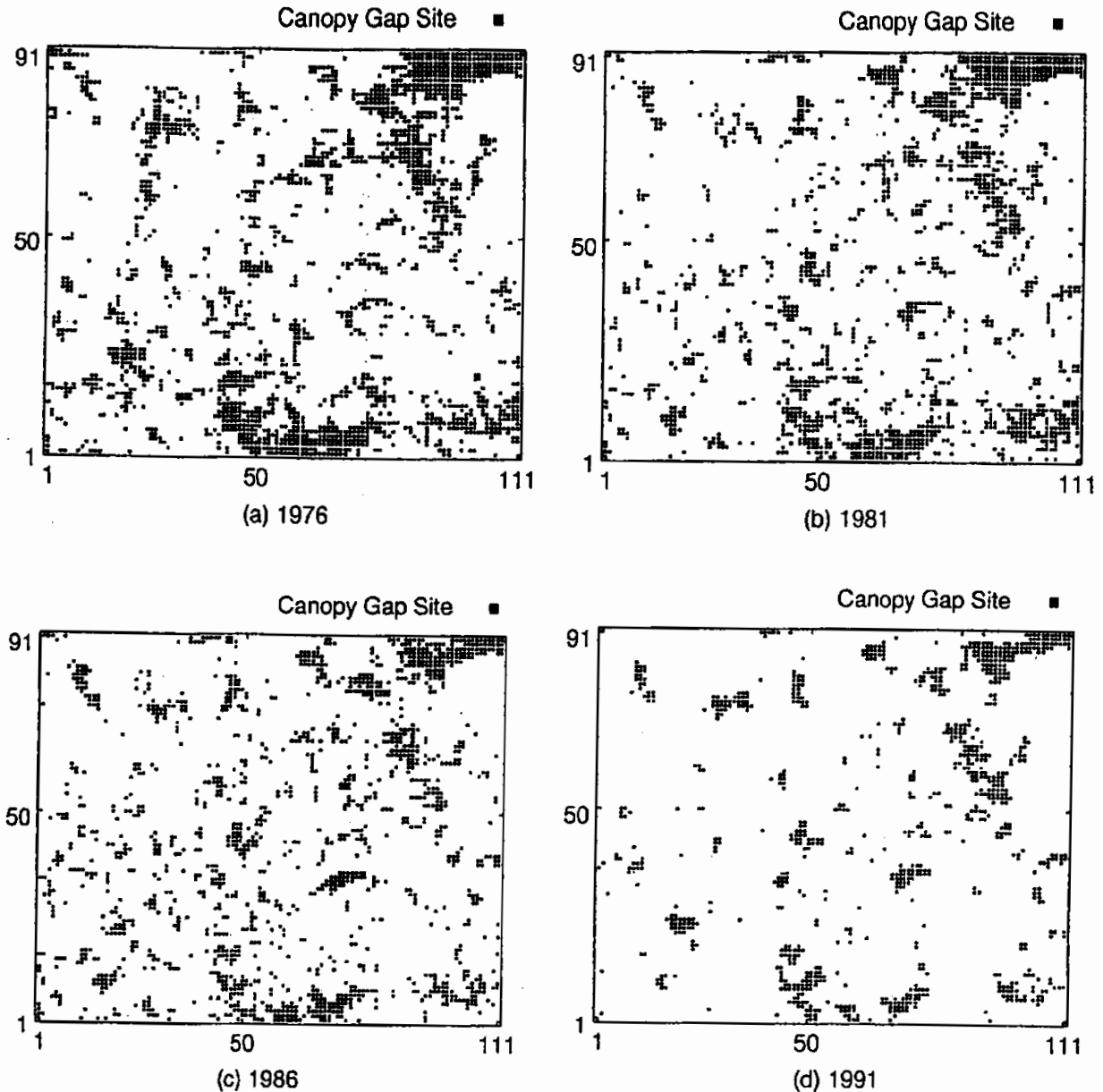


Fig. 3. 555×455 m digitized maps of the deciduous forest on Ogawa Forest Reserve (OFR), Japan, in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991.¹⁾ Gap sites, 5×5 m subplots in which there is no canopy higher than 15 m, are plotted by black dots.

Ogawa Forest Reserve

[小川群落保護林 (茨城県)]

林間ギャップの
クラスターサイズ分布



どれも両対数グラフで
ほぼ直線

分布関数

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

べき乗分布則

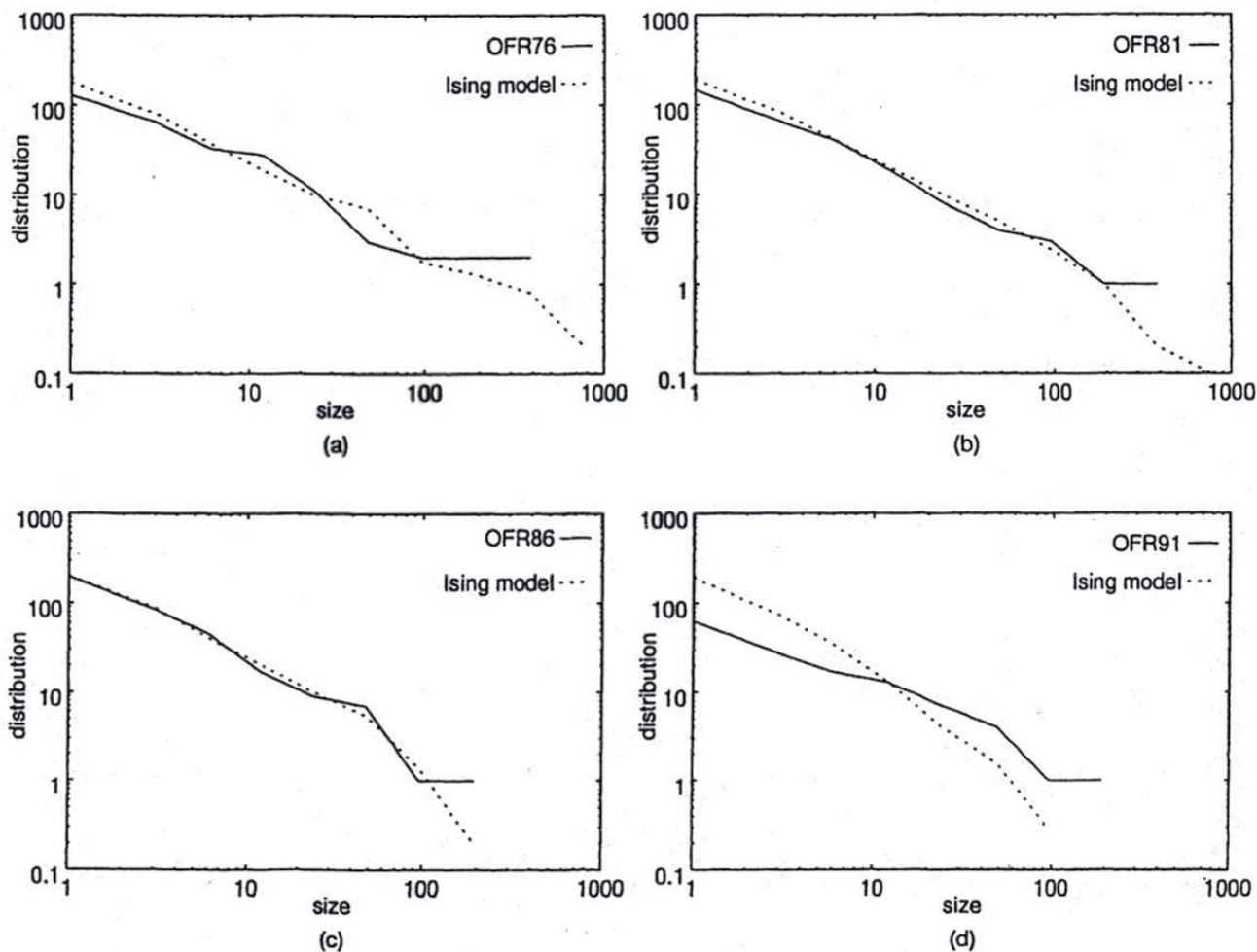


Fig. 4. Log-log plots of the gap-size distributions for OFR in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991, and those of the cluster-size distributions of down spins in the Ising-Gibbs states with K and h listed in Table I. For the Ising-Gibbs states, the Monte Carlo simulations were performed and clusters contained in a 111×91 region on the 700×700 lattice were counted. The points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

べき乗分布則

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

指数 τ の値

BCI

OFR 76, 86

ともに約 1.7

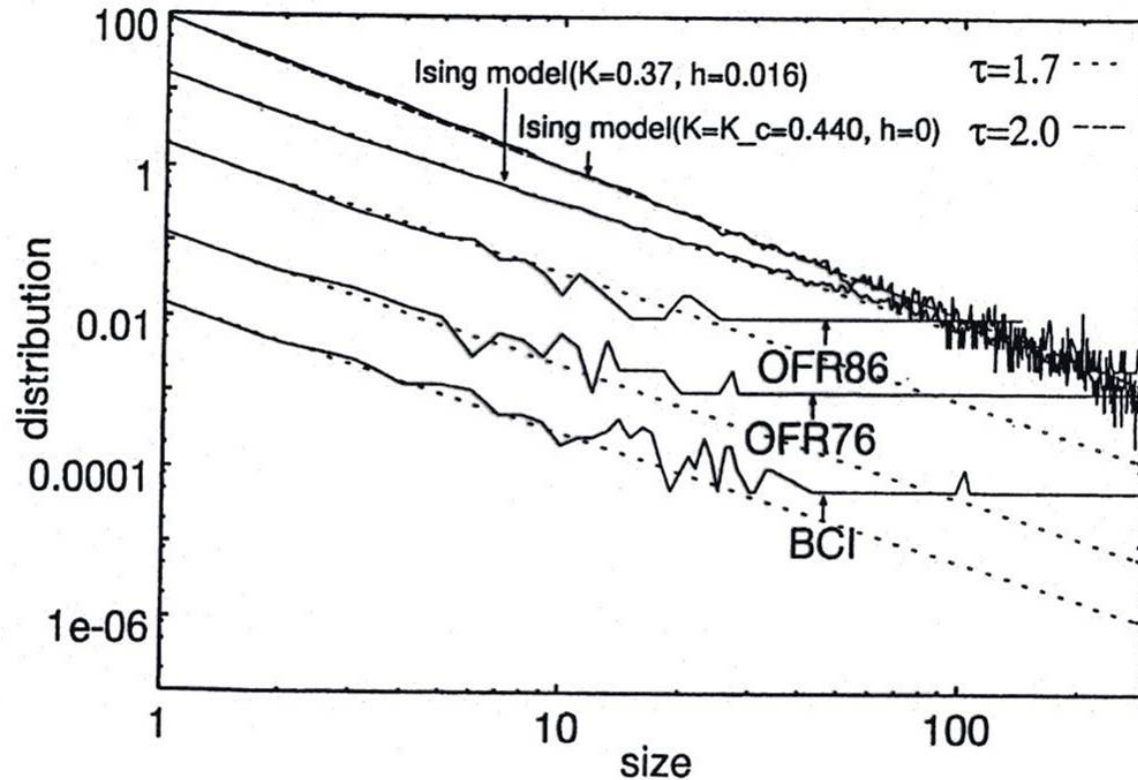
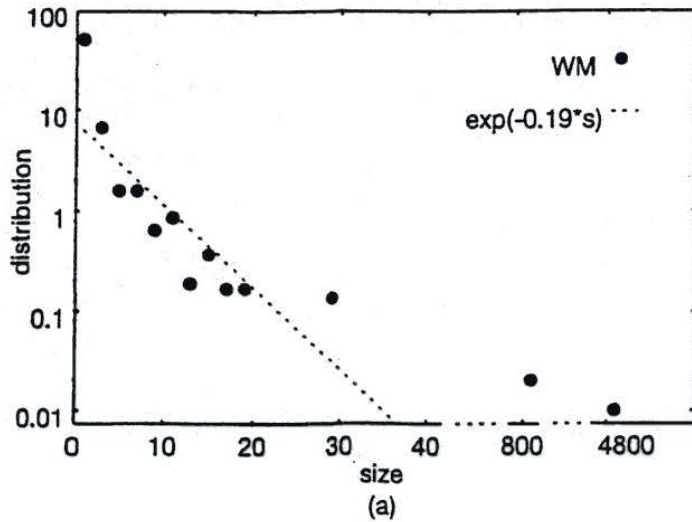


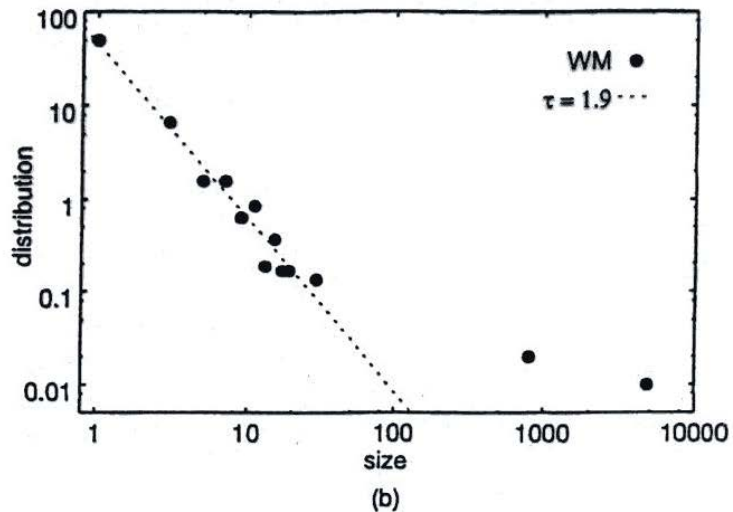
Fig. 6. From the bottom to the top, the gap-size distribution $f_f(s)$ for BCI, $f_f(s)$ for OFR in 1976, in 1986, the cluster-size distribution of down spins $f_{IG}(s)$ of the Ising model with $K = 0.36$ and $h = 0.016$ and $f_{IG}(s)$ with $K = K_c = 0.440$ and $h = 0$. These are shifted upward in order to see them easily. The points in the distributions are not logarithmically binned. The distribution at the top is fitted by a size to the power of 2.0. Other four distributions are fitted by a size to the power of 1.7.



別の森林データ

Foster-Reiners
(1986)

White Mountains,
New Hampshire,
USA



べき乗分布則

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

指数 τ の値は約 1.9

Fig. 7. The gap-size distribution $f_f(s)$ for White Mountains (WM), New Hampshire, USA from ref. 3. (In the ordinate of Fig. 1 of ref. 3, 15 should be read as 50.) (a) The semilog plot of $f_f(s)$ for WM. (b) The log-log plot of $f_f(s)$ for WM. The dashed line in (a) denotes the fitted exponential function of a size and that in (b) denotes the fitted algebraic function of a size in the region where sizes are less than 30.

もっと詳しく知りたい人には・・・

香取真理「複雑系を解く確率モデル」

(講談社 BLUE BACKS、1997年)

を眺めてみてください。

もしくは、**質問に来てください。**

(1号館5階1538室に居ます。)

なお、このスライドの pdf.file が、下の
研究室のHPからダウンロードできます。

<http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

ページで [教育] → [学部] と進んでください。

