

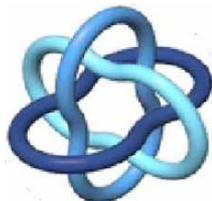
統計力学模型と Schramm-Loewner Evolution (SLE) [part 1]

中央大学理工学部 香取眞理(かとりまこと)

現代物理学序論
(中央大理工物理1年科目)

The 2006 Fields Medals

2



Wendelin Werner



Laboratoire de
Mathématiques
Université Paris-Sud

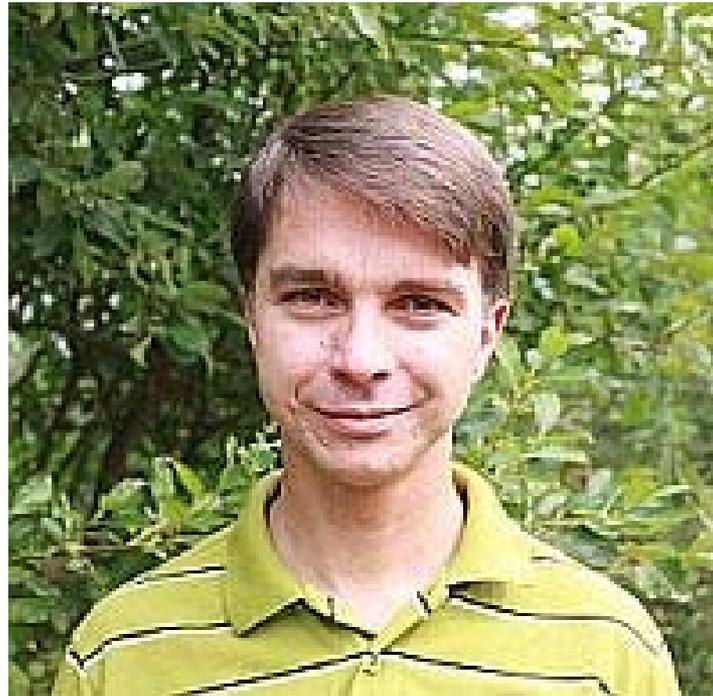


for his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory

The 2010 Fields medals

3

Stanislav Smirnov

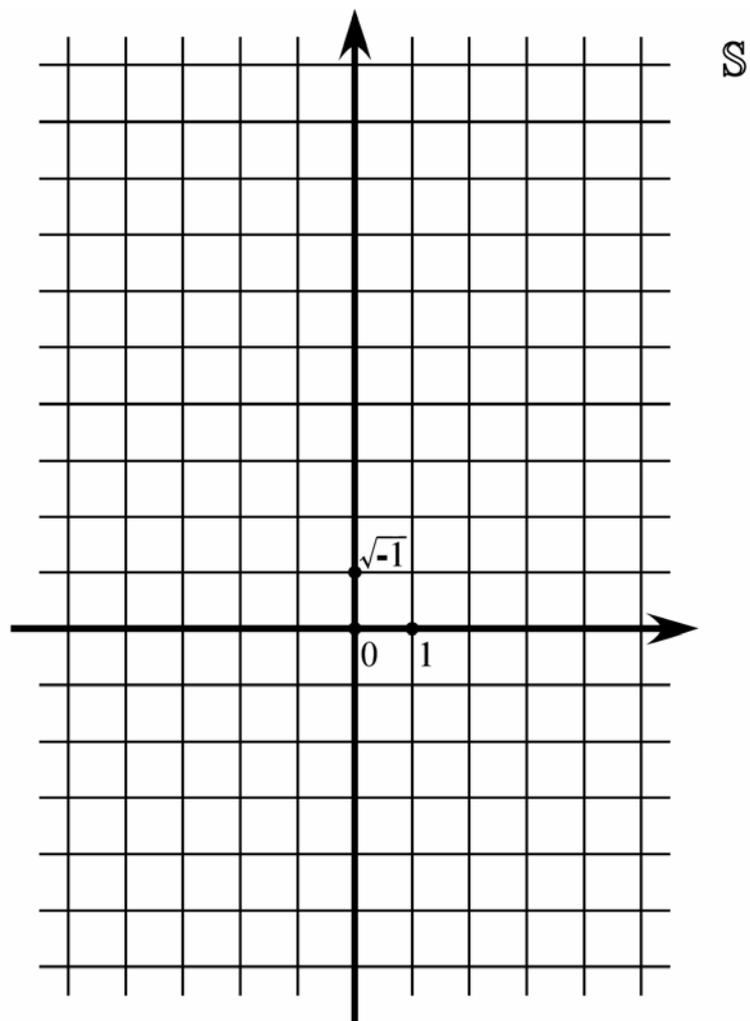


Section de
Mathématiques,
Université de Genève

**for the proof of conformal invariance of
percolation and the planar Ising model
in statistical physics.**

1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

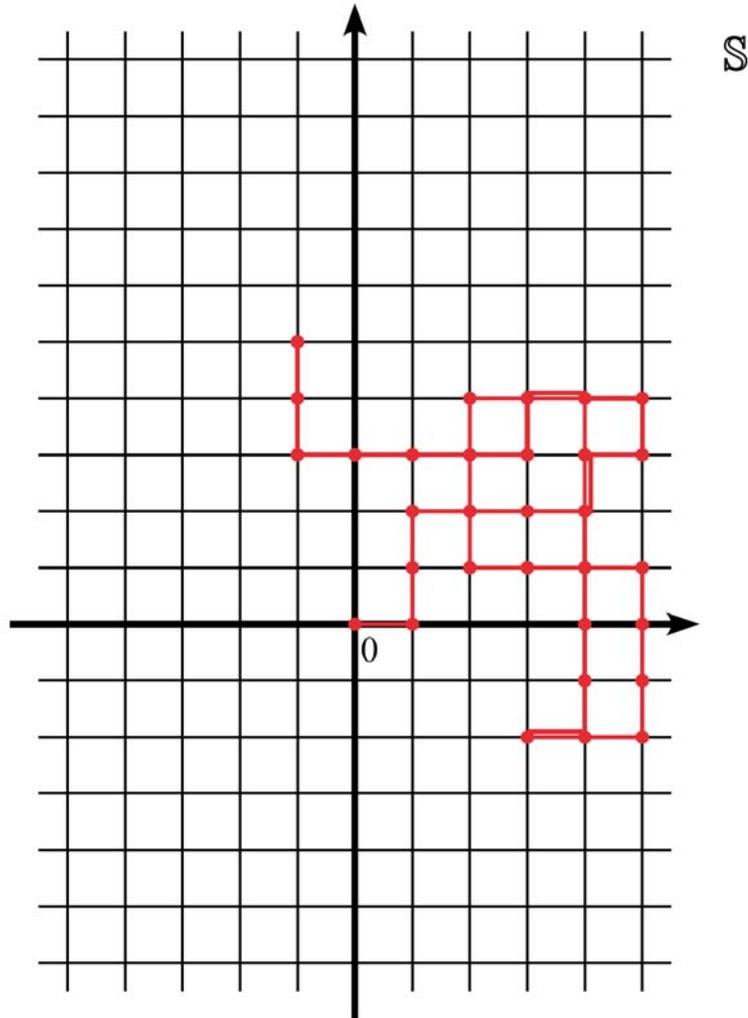
 \mathcal{S}

複素平面 $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

\mathbb{C} 上の正方格子 $\mathbf{S} = \{z = j + \sqrt{-1}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

1.1 平面上の統計力学模型の連続極限



\mathcal{S}

複素平面 $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

\mathbb{C} 上の正方格子 $\mathbf{S} = \{z = j + \sqrt{-1}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

\mathbf{S} 上の最近接ウォークの道 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n))$

出発点 $\omega(0) = z \in \mathbf{S}$

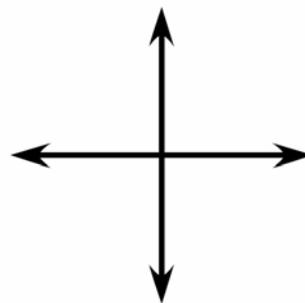
$\omega(i) \in \mathbf{S}, \quad 1 \leq i \leq n$

$|\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, \quad 1 \leq i \leq n$

$n =$ 道の長さ

左図は出発点を $z = 0$ (原点) とした場合.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{S} \quad & \left. \begin{array}{l} \text{出発点が } z \in \mathbb{S} \\ \text{長さが } n \end{array} \right\} \text{の道全体の集合} \\
 & \equiv W_n^z \\
 & = \left\{ \omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \right. \\
 & \quad \left. \omega(i) \in \mathbb{S}, |\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, 1 \leq i \leq n \right\}.
 \end{aligned}$$

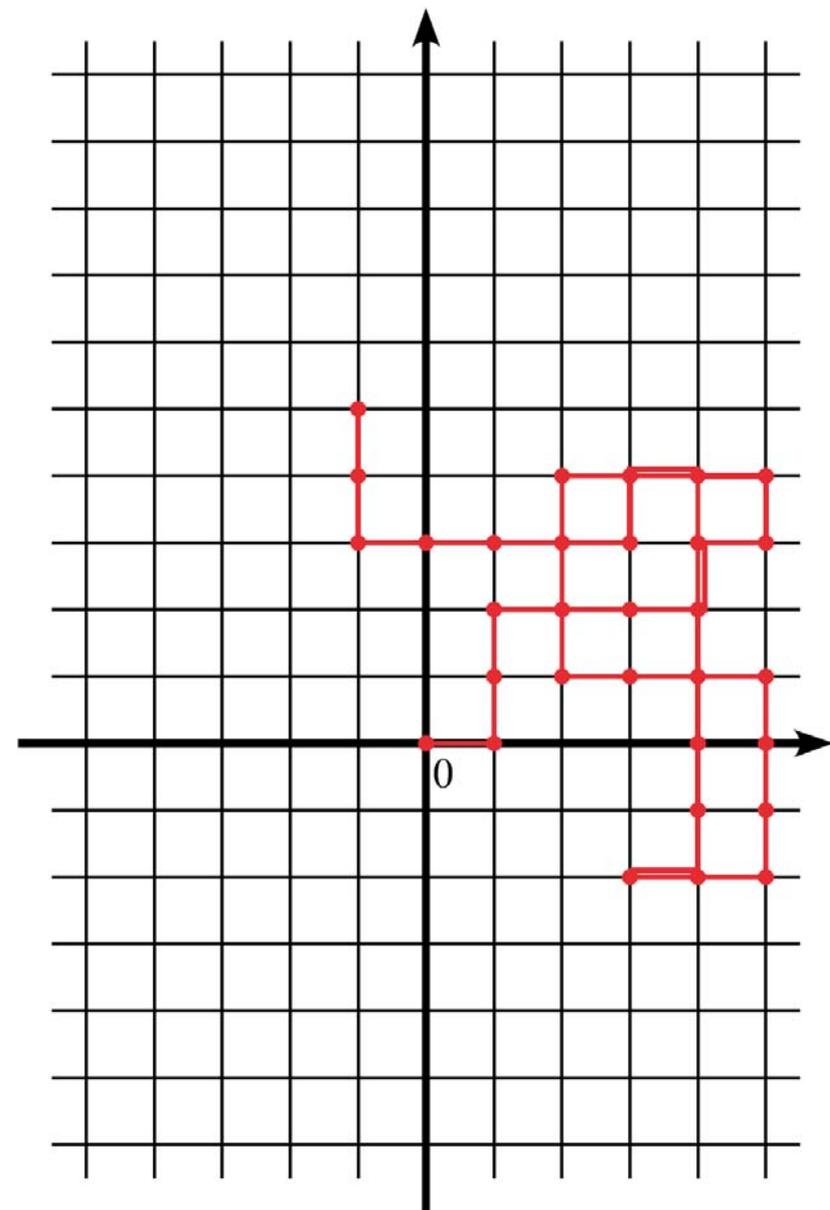


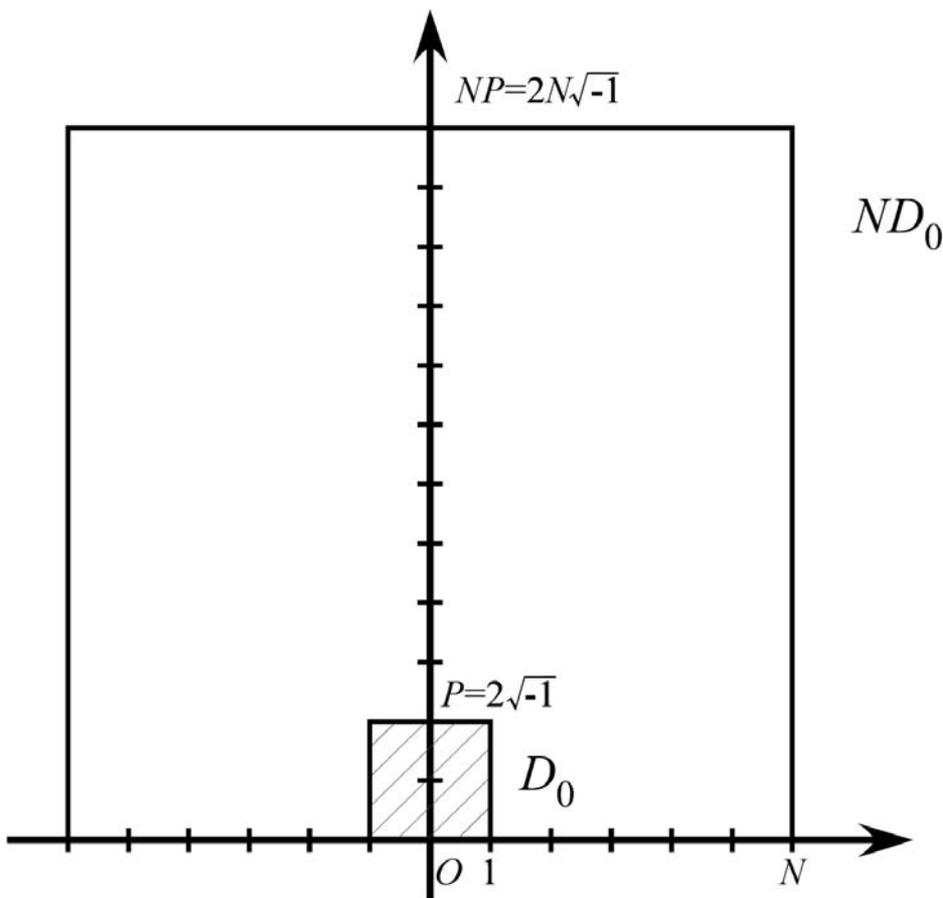
各ステップは上下左右の4通りあるので、 $|W_n^z| = 4^n$.

(出発点 z , 長さ n の) ランダムウォーク (random walk : RW)
 $\equiv W_n^z$ の元の一様分布 (道の統計集団)

定義より, 各々の道 $\omega \in W_n^z$ の測度は

$$\frac{1}{|W_n^z|} = \frac{1}{4^n} = 4^{-|\omega|}. \quad \text{ただし, } |\omega| = \text{道 } \omega \text{ の長さ.}$$





- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

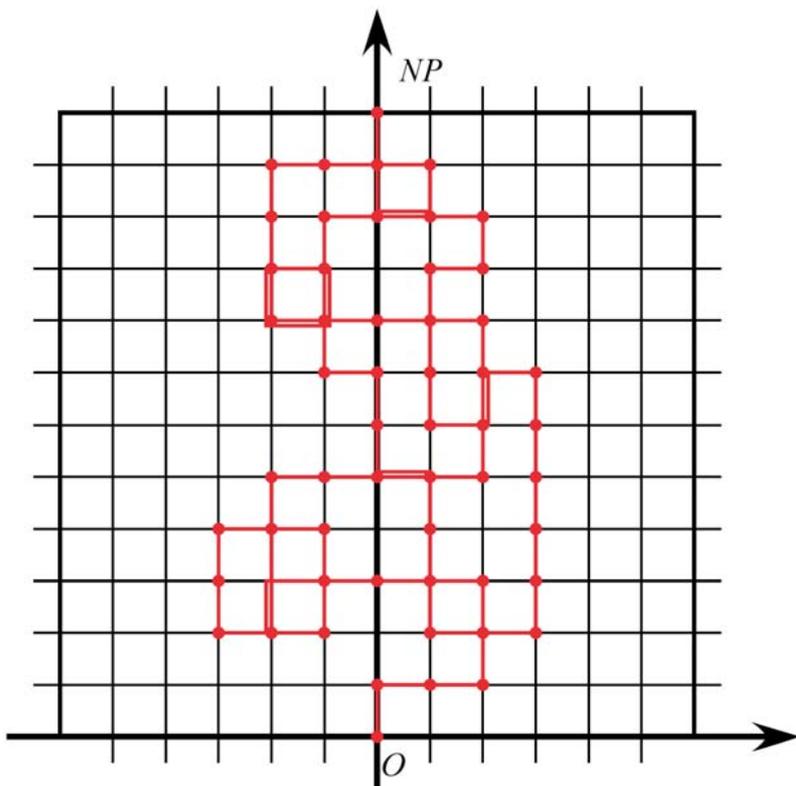
$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$



ただし

$$f(N) \sim g(N), \quad N \rightarrow \infty$$

\Updownarrow

$$\frac{f(N)}{g(N)} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}$$

ここで

$$\begin{aligned} G_{D_0}(z, w) &= \pi \int_0^\infty p_{D_0}(t, w, z) dt \\ &= \text{the Green's function for the complex BM} \\ &\quad \text{stopped at } \partial D_0 \\ &= \text{the Green's function for the Laplacian} \\ &\quad \text{with Dirichlet boundary condition on } D_0 \\ &\quad \text{for } z, w \in D_0, \end{aligned}$$

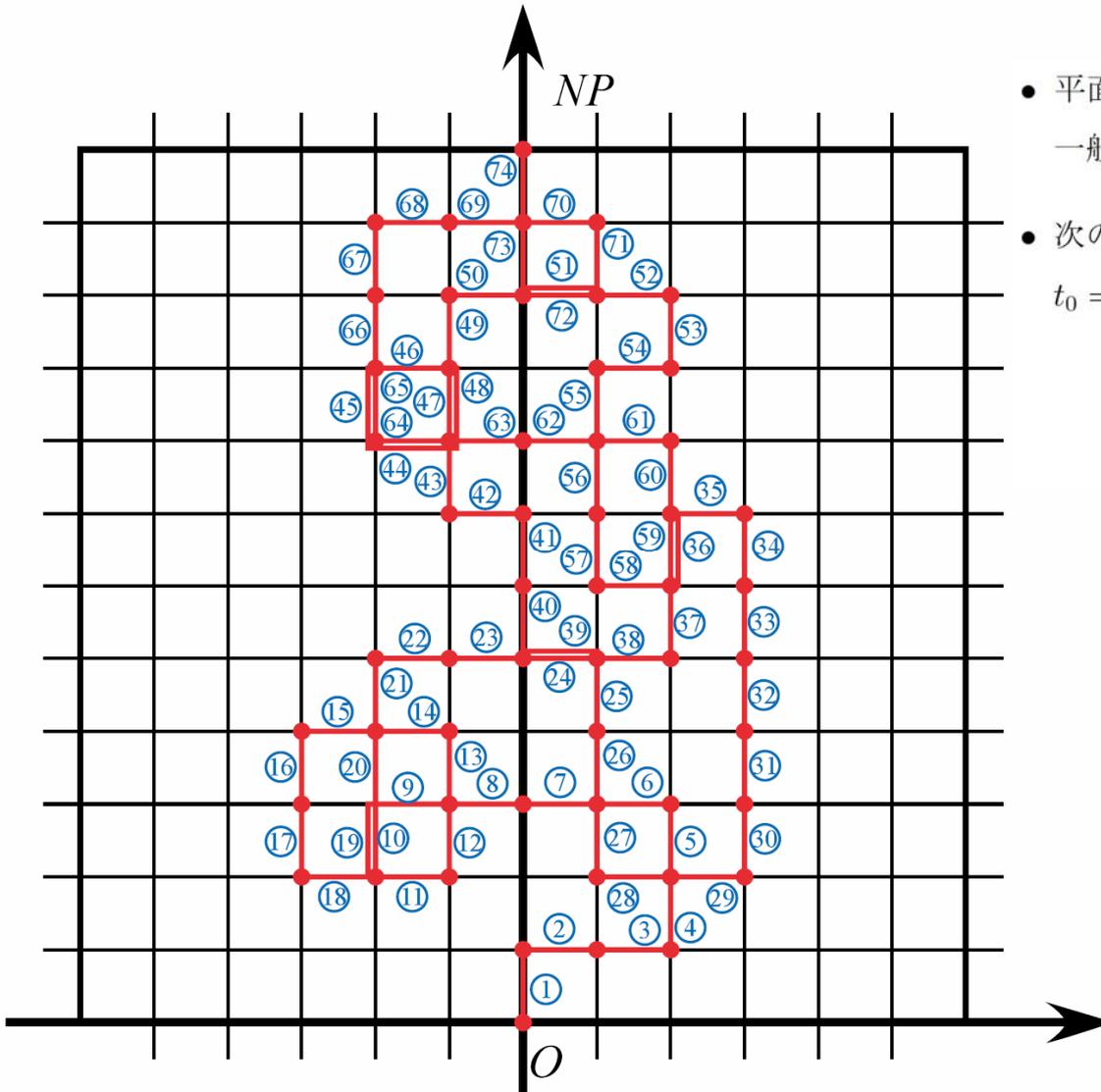
$$\begin{aligned} H_{D_0}(z, w) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} G_{D_0}(z, w + \varepsilon \mathbf{n}) \\ &= \text{Poisson kernel, for } z \in D_0, w \in \partial D_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{D_0}(z, w) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} H_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} G_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w + \varepsilon \mathbf{n}_w) \\ &= \text{boundary Poisson kernel, for } z, w \in \partial D_0, \end{aligned}$$

としたとき,

$$C(D_0; O, P) = \hat{H}_{D_0}(O, P).$$

平面上のRW \Rightarrow 連続極限 \Rightarrow 複素ブラウン運動(complex BM)

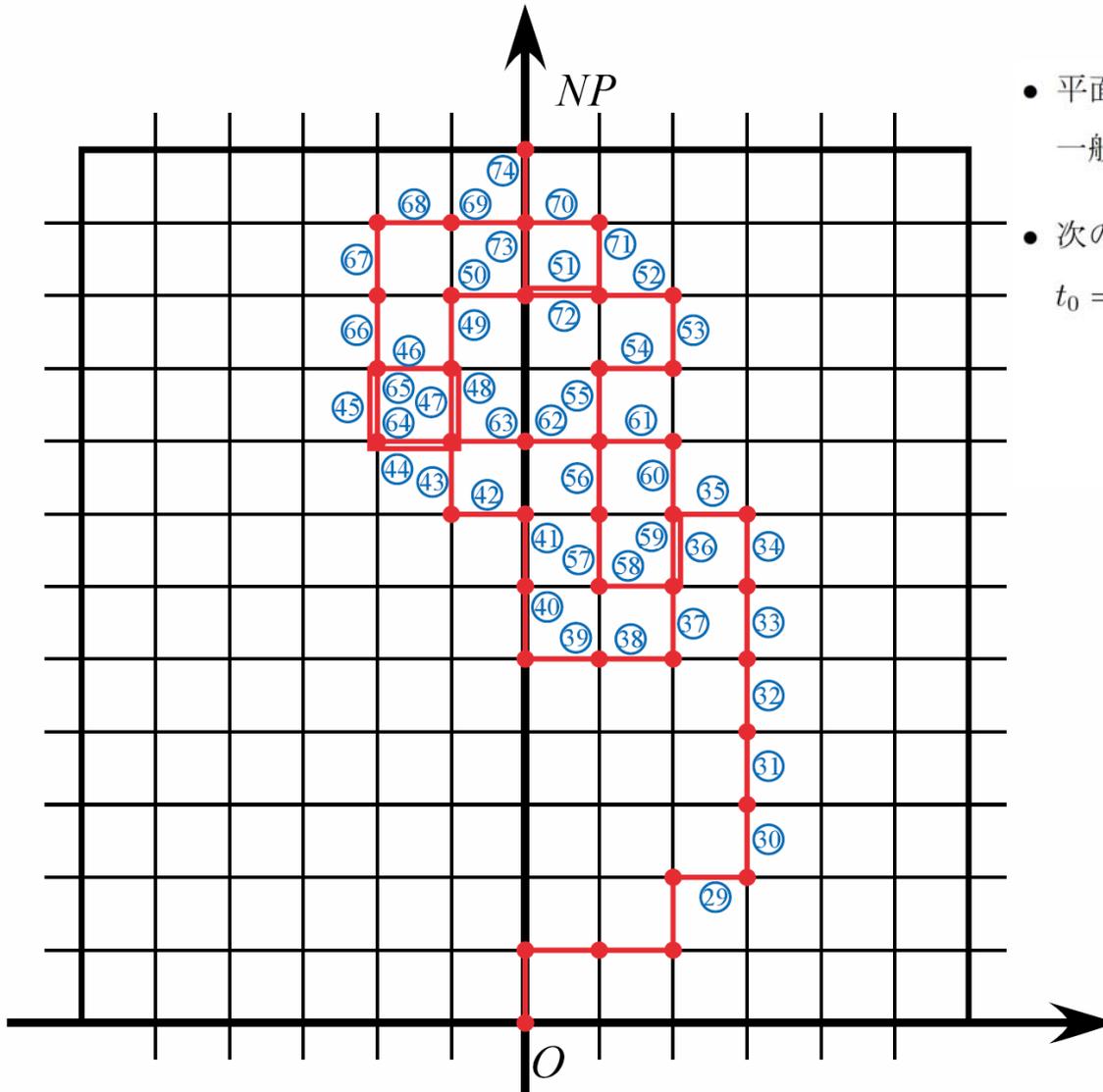


- 平面上の RW の集合 $\Omega_N(D_0; O, P)$ の元 ω は一般にはループを持つ (自己交差する).

- 次の操作によってループを消去する: $\omega \rightarrow \hat{\omega}$
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \omega(t_0) = 0$ として, $m \geq 1$ に対して

$$t_m = \max \{ \ell > t_{m-1} : \omega(\ell) = \omega(t_{m-1} + 1) \},$$

$$\hat{\omega}(m) = \omega(t_m) = \omega(t_{m-1} + 1).$$

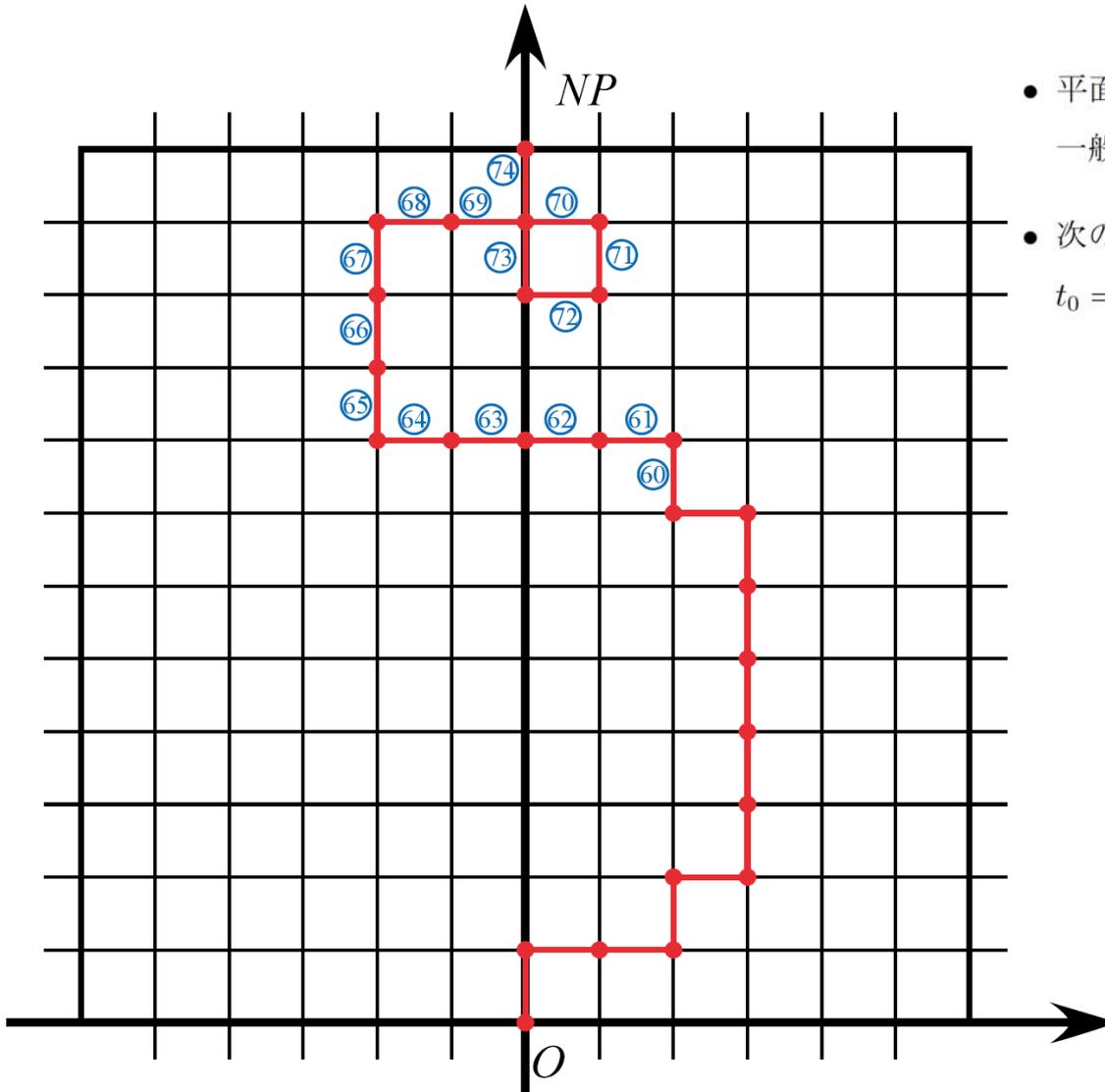


- 平面上の RW の集合 $\Omega_N(D_0; O, P)$ の元 ω は一般にはループを持つ (自己交差する).

- 次の操作によってループを消去する: $\omega \rightarrow \hat{\omega}$
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \omega(t_0) = 0$ として, $m \geq 1$ に対して

$$t_m = \max \{ \ell > t_{m-1} : \omega(\ell) = \omega(t_{m-1} + 1) \},$$

$$\hat{\omega}(m) = \omega(t_m) = \omega(t_{m-1} + 1).$$

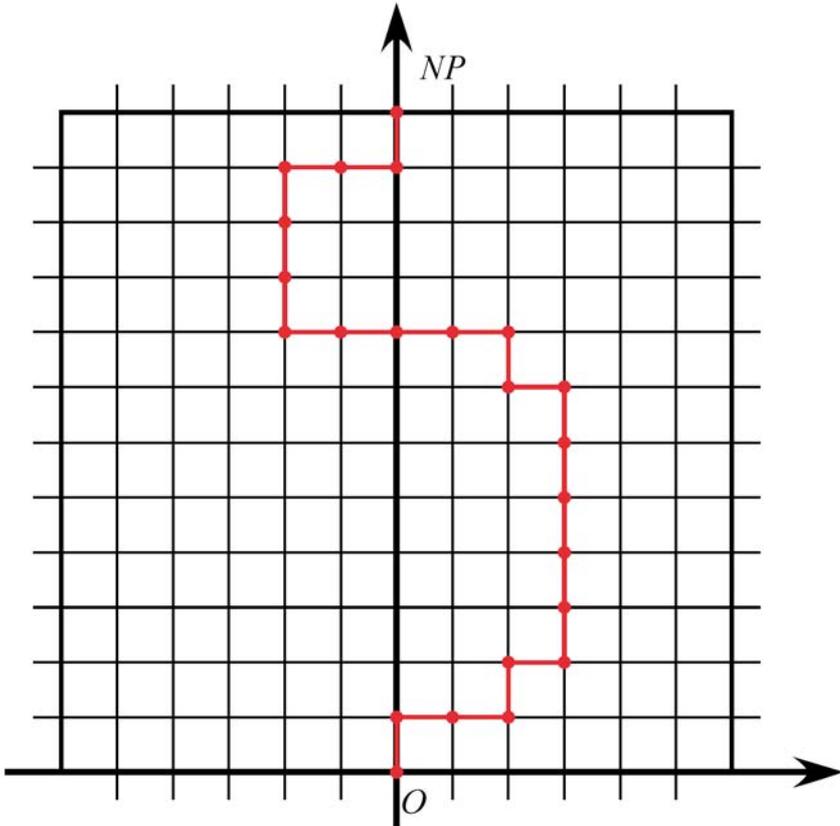


- 平面上の RW の集合 $\Omega_N(D_0; O, P)$ の元 ω は一般にはループを持つ (自己交差する).

- 次の操作によってループを消去する: $\omega \rightarrow \hat{\omega}$
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \omega(t_0) = 0$ として, $m \geq 1$ に対して

$$t_m = \max \{ \ell > t_{m-1} : \omega(\ell) = \omega(t_{m-1} + 1) \},$$

$$\hat{\omega}(m) = \omega(t_m) = \omega(t_{m-1} + 1).$$



- $\Omega_N^0(D_0; O, P) = ND_0$ 内の $O \rightsquigarrow NP$ のループ無しの道全体

- $\omega \rightarrow \hat{\omega}$: 多対1対応

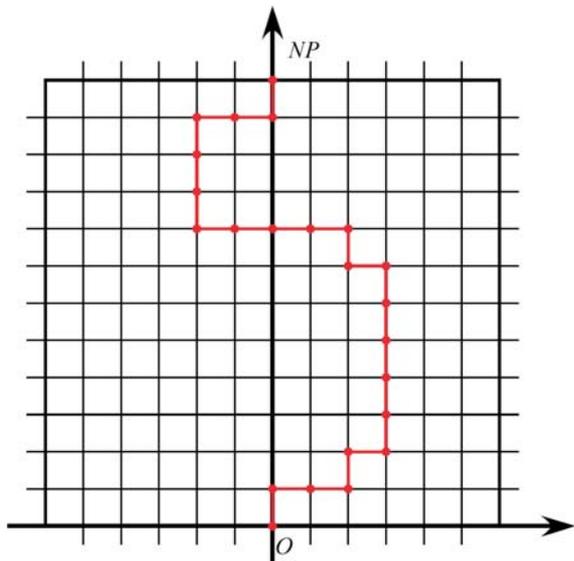
ループ除去前の RW の重みの和 $\sum_{\omega} 4^{-|\omega|}$

↓

ループ除去後の1つの道 $\hat{\omega}$ の重み

- 上のように定義された道の統計集団をループ除去ランダムウォーク (LERW) と呼ぶ.

ループ除去ランダムウォーク(LERW)の連続極限



$\exists \nu > 0,$

$$\omega^{1/N} \left(\frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega|$$

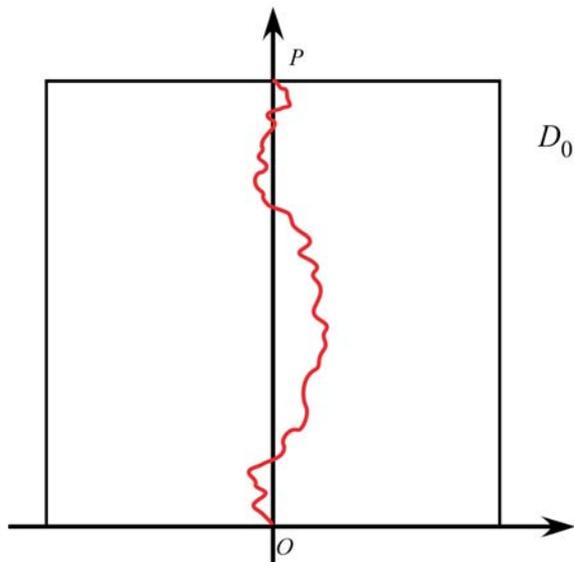
= 原点 O を出発, $\frac{|\omega|}{N^{1/\nu}}$ ステップ後に $P = 2\sqrt{-1}$ に到達,

D_0 内の (空間刻み $1/N$ の) ループ無しの道

$\Downarrow \quad N \rightarrow \infty$

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$ 連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty).$$



D_0 ただし, $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$: P への到達時刻 (確率変数)

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$ 連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty)$$

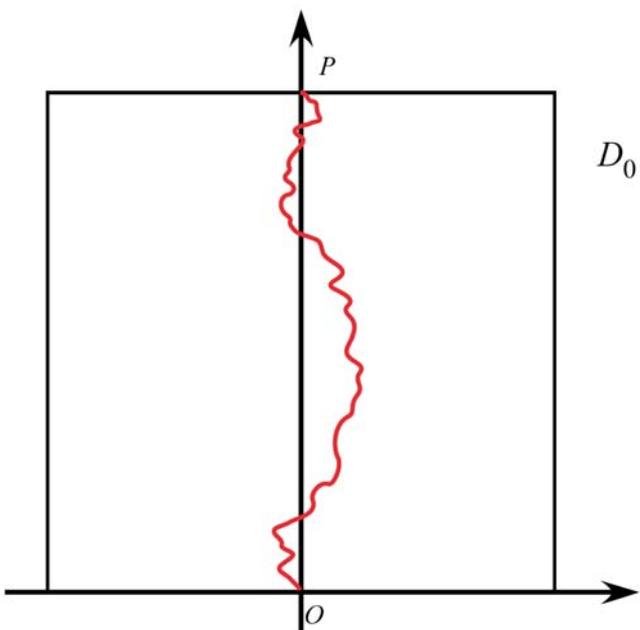
- 曲線 γ のフラクタル次元 $d_{\text{LERW}} = \frac{1}{\nu}$
- γ は単純曲線 : $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq \forall t_1 < t_2 \leq t_\gamma$.

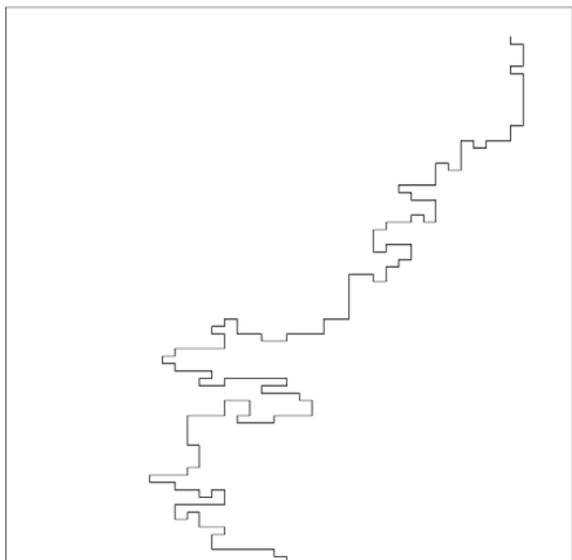
$\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \equiv$ LERW の連続極限 (指数 ν のスケーリング極限) として得られる連続関数 γ 全体.

$\bar{\mu}_{D_0; O, P}^{\text{LERW}}(\cdot) \equiv$ 関数空間 $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$ に対する測度

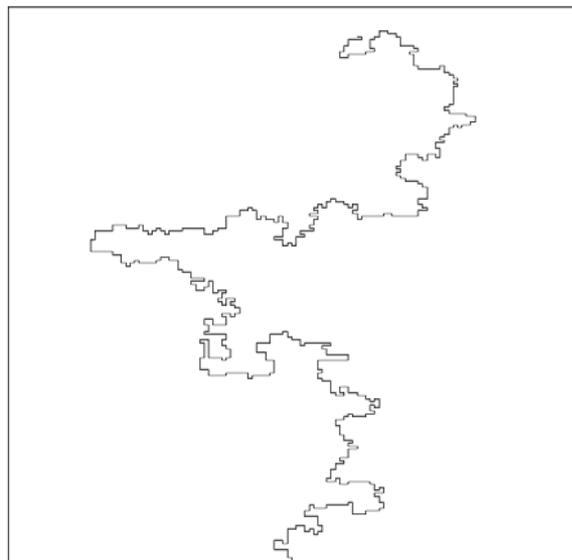
- 総和は (ループ除去前の RW の極限と同じく) $C(D_0; O, P)$ なので,

$$\begin{aligned} \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) &= \frac{\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot)}{C(D_0; O, P)} \\ &= \mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \text{ に台をもつ確率測度} \end{aligned}$$





(a1)



(a2)

- $W_n^z = \{RW : \text{出発点} = z, \text{長さ} = n\}$
の部分集合 (ループ無しの RW)

$$W_{n,0}^z \equiv \left\{ \omega \in W_n^z, : \omega(i) \neq \omega(j), 0 \leq \forall i < j \leq n \right\}.$$

- $\exists \beta > 0$ s.t. **($\beta \doteq 2.638$)**

$$|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

ただし, $f(n) \simeq g(n), n \rightarrow \infty$

$$\iff \log f(n) \sim \log g(n), n \rightarrow \infty$$

自己回避ウォーク (self-avoiding walk: SAW)

≡ 自己交差しない (ループ無し) ウォーク ω に対して
それぞれ $e^{-\beta|\omega|}$ の測度を与えた統計集団.

左図(a1)は $n=200$ ステップ, (a2) は $n=800$ ステップ

SAW の分配関数

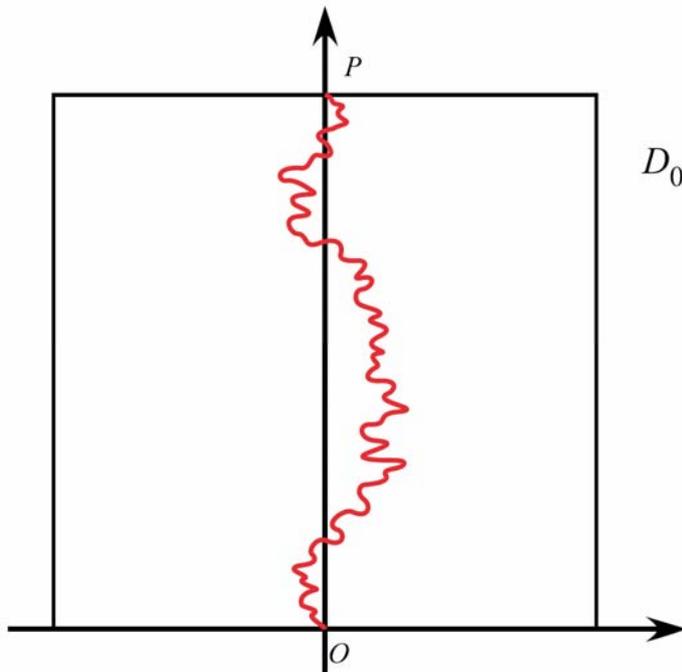
$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

- $\exists b_{\text{SAW}} > 0$, s.t.

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

- $\exists \nu = 1/d_{\text{SAW}}$, s.t.

$$\omega^{1/N} \left(\frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i) \implies \gamma(t), \quad N \rightarrow \infty.$$



SAW の連続極限に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

比較

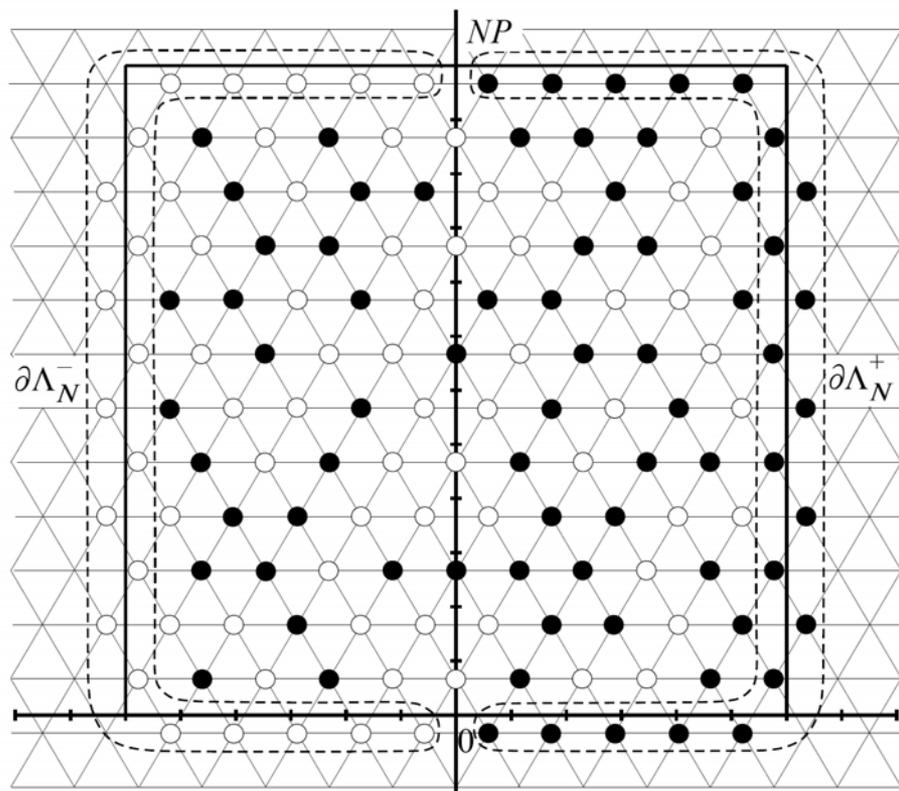
- RW と LERW では

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P) N^{-2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

つまり, $b_{\text{RW}} = b_{\text{LERW}} = 1$.

- $d_{\text{LERW}} \neq d_{\text{SAW}}$

臨界浸透模型 (critical percolation model)



- ここでは \mathbb{C} 上に三角格子を置く :

$$\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3) \text{ として}$$

20

$$\mathbf{T} = \{z_0 + (i + j\tau)\sqrt{3}a : i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

ただし, $a = \frac{2}{3}$ として $z_0 = a\sqrt{-1}$ とする.

- 確率変数 $\eta(z) \in \{0, 1\}$, $z \in \mathbf{T}$
Bernoulli 測度 ν_p で分布 :

$$\nu_p(\eta(z) = 1) = p, \quad \nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p.$$

- 三角格子 $\mathbf{T} \iff$ 繊維表面
 $\eta(z) = 1 \iff$ 濡れた部位
 $\eta(z) = 0 \iff$ 乾いた部位

浸透現象の模型

- 浸透相転移 (percolation transition)

$p \leq \frac{1}{2}$: ある 1 点を含む連結浸透領域は
確率 1 で有界

$p > \frac{1}{2}$: $\text{Prob}(\text{非有界}) > 0$

$p = p_c = \frac{1}{2}$: 臨界値

以下 $p = p_c = \frac{1}{2}$ とする.

- $N \in \mathbb{N}, \mathbf{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$
(左図は $N = 6$ の場合)

- Dobrushin 境界条件

$$\eta(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

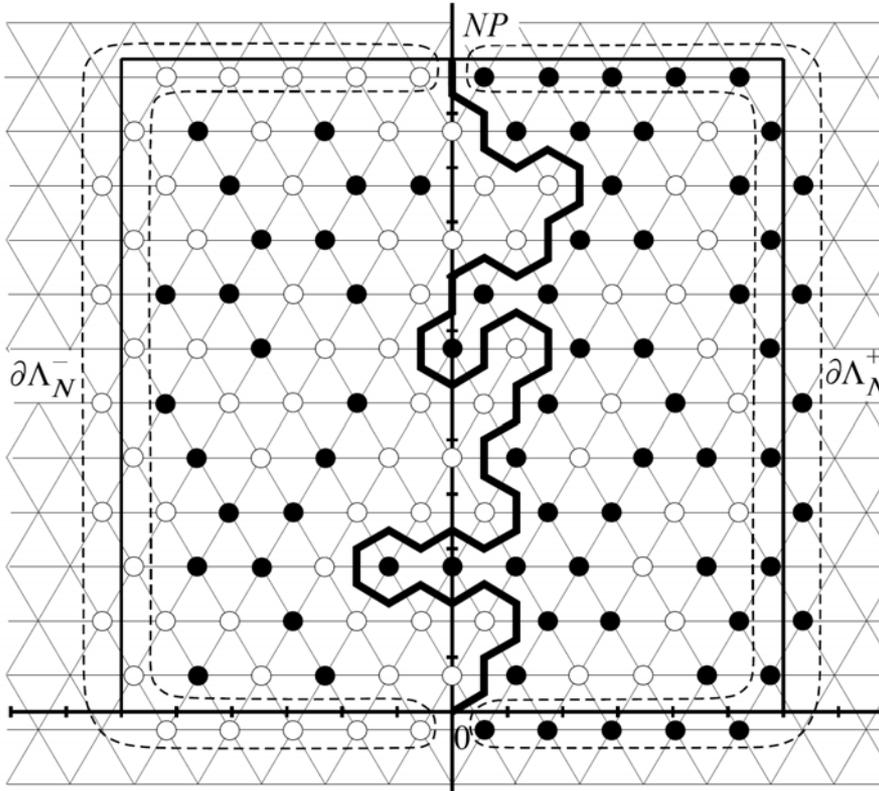
$$\eta(z) = 0, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- これ以外の領域 Λ_N 内部の配置：
 $\nu_{1/2}$ に従ってランダムに分布

- 浸透探索過程

(percolation exploration process)

ω : 道の進行方向すぐ左側は 0 (白丸)
道の進行方向すぐ右側は 1 (黒丸)



浸透探索過程の連続極限

浸透探索過程 ω

$N \rightarrow \infty \quad \downarrow \quad$ スケーリング極限 (指数 $\nu = 1/d_{\text{per}}$)

γ : 連続曲線

これは単純曲線ではない。

- Bernoulli 測度なので

測度の総和 (分配関数) $Z_N^{\text{per}}(D_0; O, P) \equiv 1$

よって $N^{-2b_{\text{per}}} = 1 \iff b_{\text{per}} = 0$

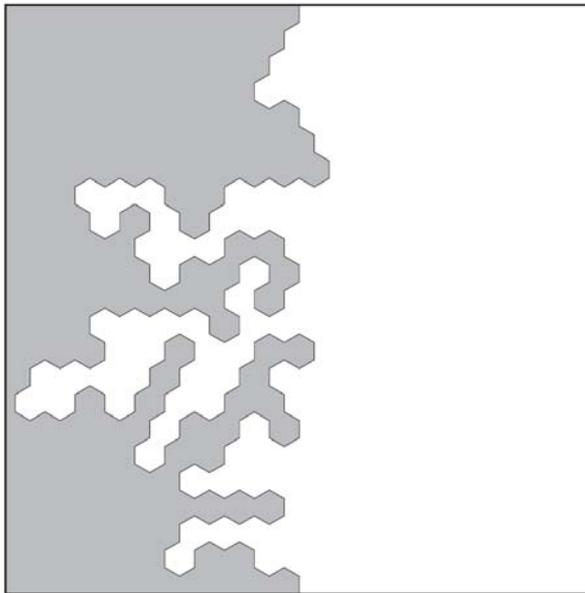
- 浸透探索過程の連続極限 γ

に対する確率測度を

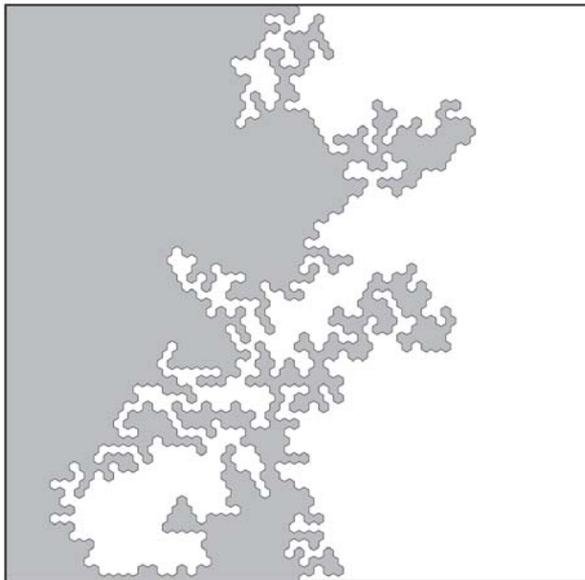
$\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$ と記す。

左図 (b1) は 35×35 三角格子上,

(b2) は 100×100 三角格子上

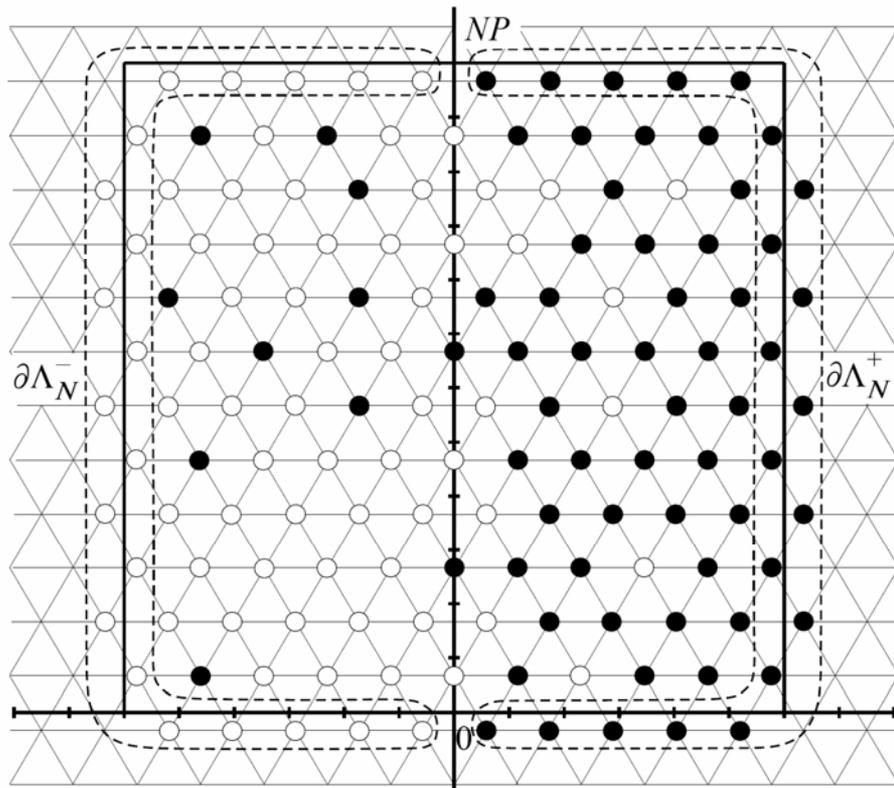


(b1)



(b2)

臨界 Ising 模型 (critical Ising model)



$$e^{-2\beta_c} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_c = \frac{1}{4} \log 3 = 0.27465 \dots$$

$$\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$$

- 確率変数 (スピン)

$$\sigma(z) \in \{-1, 1\}, \quad z \in \bar{\Lambda}_N$$

- Dobrushin 境界条件

$$\sigma(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

$$\sigma(z) = -1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- 領域内部 Λ_N^o のスピンは

径数 $\beta > 0$ の Gibbs 測度でランダムに配置:

$$\pi_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}$$

ただし,

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z,z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^{\Lambda_N^o}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

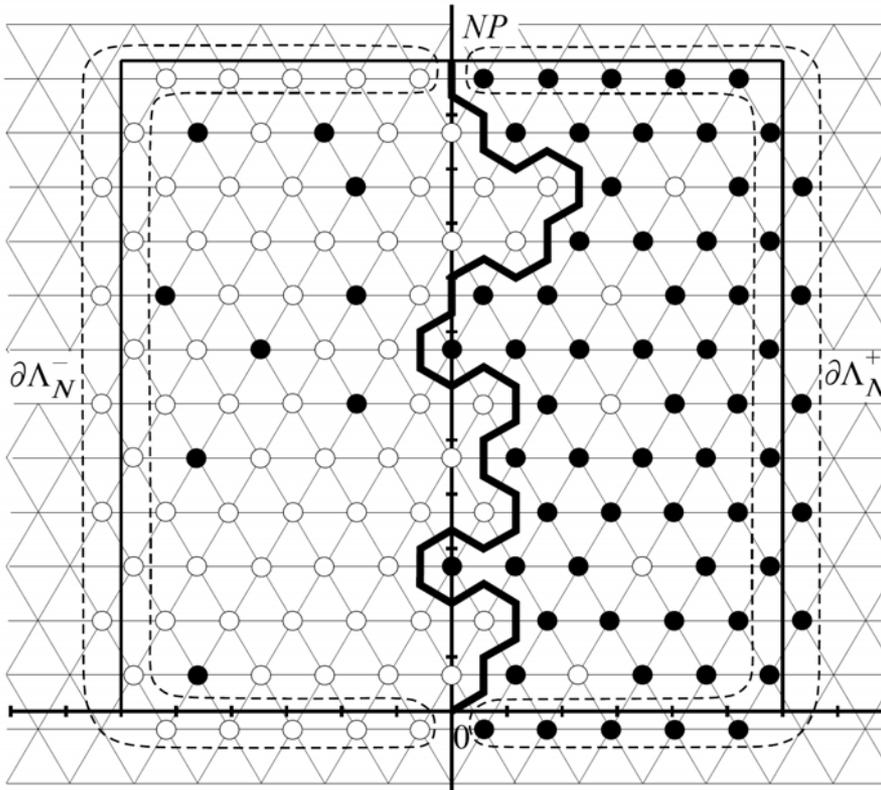
- 磁気相転移 (magnetic phase transition)

$$\beta = J/kT < \beta_c \quad (T > T_c): \text{常磁性相}$$

$$\beta = J/kT > \beta_c \quad (T < T_c): \text{強磁性相}$$

$$\beta = J/kT = \beta_c \quad (T = T_c): \text{臨界点 (Curie 温度)}$$

Ising 界面(Ising Interface)



以下 $\beta = \beta_c$ ($T = T_c$) とする.

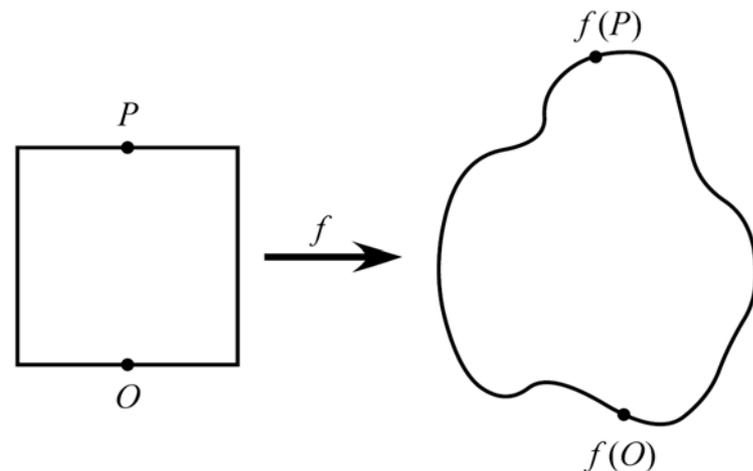
- ω : Ising 界面 (Ising interface)
 $N \rightarrow \infty$ \Downarrow スケーリング極限
 (指数 $\nu = 1/d_{\text{Ising}}$)
- γ : 連続曲線
 これは単純曲線.
- Ising 界面の連続極限 γ
 に対する測度を
 $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$ と記す.

1.2 共形不変性と領域 Markov 性

$f : D_0 \subset \mathbb{C}$ 上で正則, $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$ のとき

$f : D_0 \rightarrow f(D_0) : \text{共形変換 (等角写像)}$

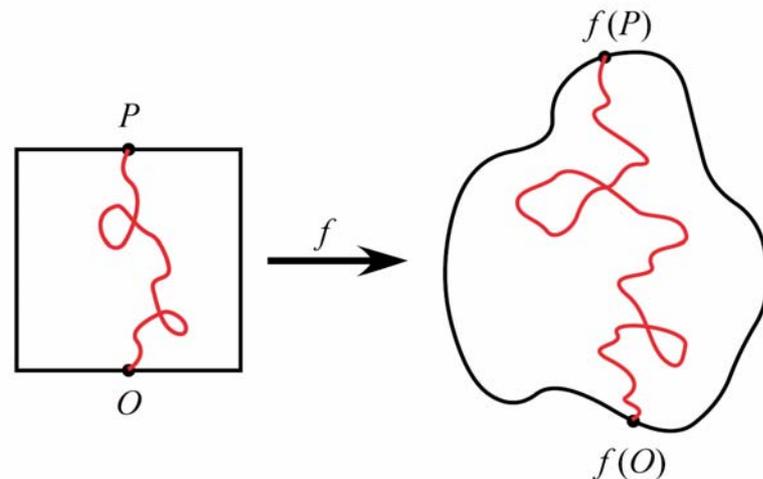
ただし, $\partial D_0 \rightarrow f(\partial D_0), O \rightarrow f(O), P \rightarrow f(P)$ とする.



1.1 節で述べた平面格子上的統計力学模型の連続極限に伴って得られる連続関数 γ に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot)$$

の共形変換 f による変換性を考える.



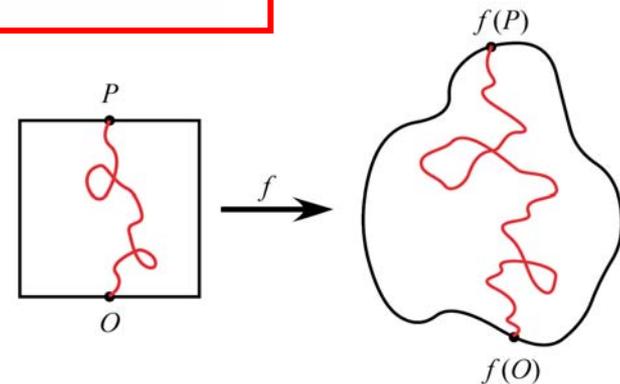
次の2つの変換性を持つことが期待される.

① 共形共変性と共形不変性

任意の共形変換に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot)$$

指数 b = 1.1 節の格子上的モデルの分配関数の
領域サイズ $N \rightarrow \infty$ に伴う漸近挙動で決まる値
= (上の式の形から) **境界スケーリング指数**
(boundary scaling exponent) と呼ばれる



上式は測度の総和 (分配関数) の**共形共変性**と
確率測度の**共形不変性**を意味する：

$$C(D_0; O, P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P)),$$

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot).$$

② 領域 Markov 性

$\mu_{(D_0; O, P)}$ の下で, 曲線 γ の初期の一部分 $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$ を観測する.

この条件の下での曲線の残りの部分の分布は,
 D_0 から $\gamma(0, t]$ を除いた開領域で,
 $\gamma(t)$ を出発点として $\gamma(t_\gamma) = P$ を終点とする曲線
 の分布に等しい:

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot \mid \gamma(0, t]) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性と言う.

