

統計力学模型と Schramm-Loewner Evolution (SLE) [part 2]

中央大学理工学部 香取眞理(かとりまこと)

現代物理学序論
(中央大理工物理1年科目)

2 Schramm-Loewner 発展 (SLE κ)

2.1 Riemann の写像定理について

- $\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする.
- 領域 D (開集合とする) に対して, その $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結部分集合をなしているとき, D は単連結領域 (simply connected domain) であると言う.
- \mathbb{C} 上の原点を中心とする単位円を $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す.

定理 3.1 (Riemann mapping theorem) D が \mathbb{C} 全体ではない単連結領域であるとする. この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ. このとき, D を単位円 \mathbb{D} に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.

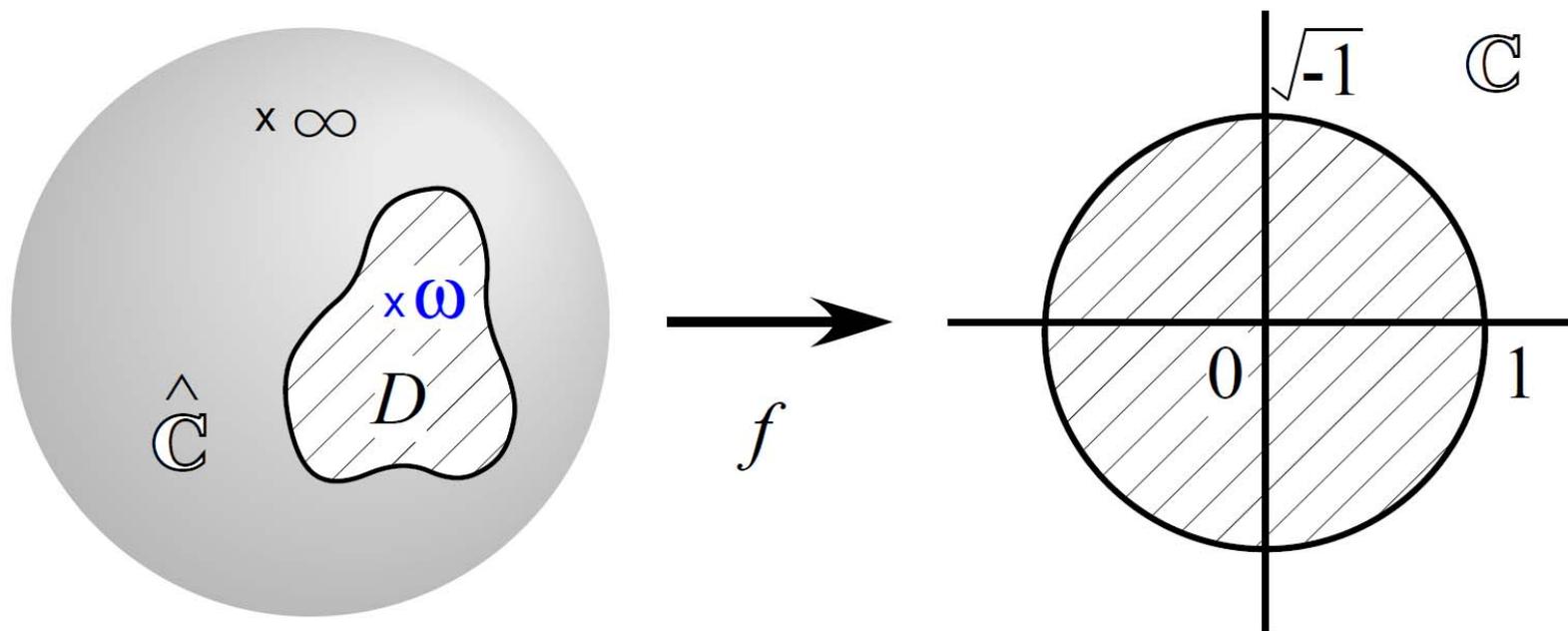
証明は

L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).
を参照せよ.

定理 3.1 (Riemann mapping theorem) D が \mathbb{C} 全体ではない単連結領域であるとする. この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ. このとき, D を単位円 \mathbb{D} に写す共形変換で

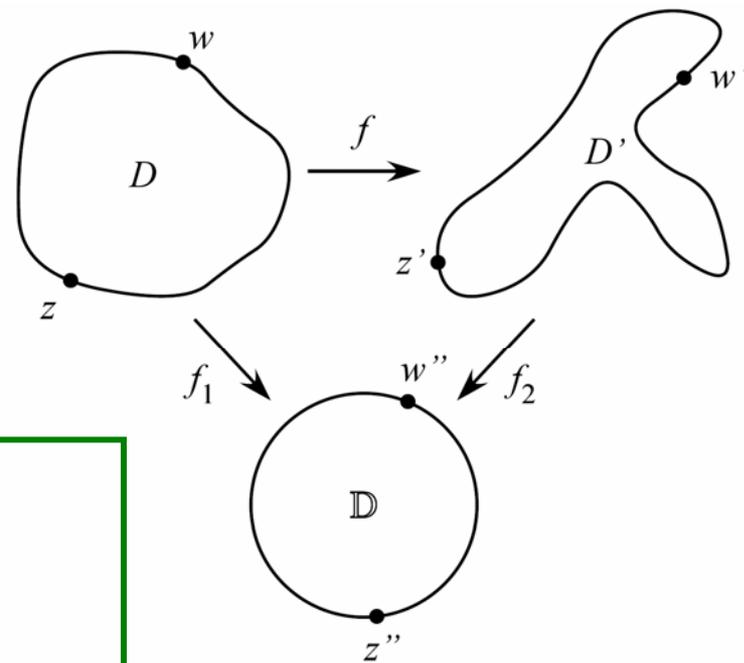
$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.



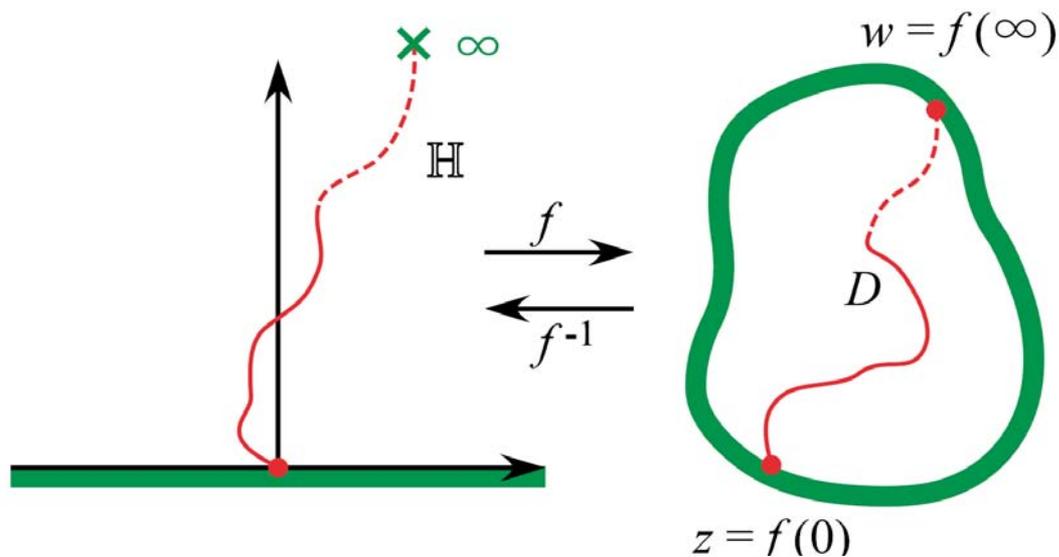
$D, D' : \mathbb{C}$ 上の単連結領域 (ただし, $D, D' \neq \mathbb{C}$)

$$z, w \in \partial D, \quad z', w' \in \partial D'$$



Riemann の写像定理

- $f : D \rightarrow D', f(z) = z', f(w) = w'$
となる共形変換の1径数族が存在する.
- さらに $f'(w) = 1$ という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる.



- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$: 上半平面

- 共形不変な確率測度 $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$

\implies 任意の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$,

$z, w \in \partial D$ に対する

確率測度 $\mu_{(D;z,w)}$ が得られる

共形変換不変な測度の族 $\{\mu_{(D;z,w)}\}$ の代表元として $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$ を考える.

2.2 Loewner 方程式

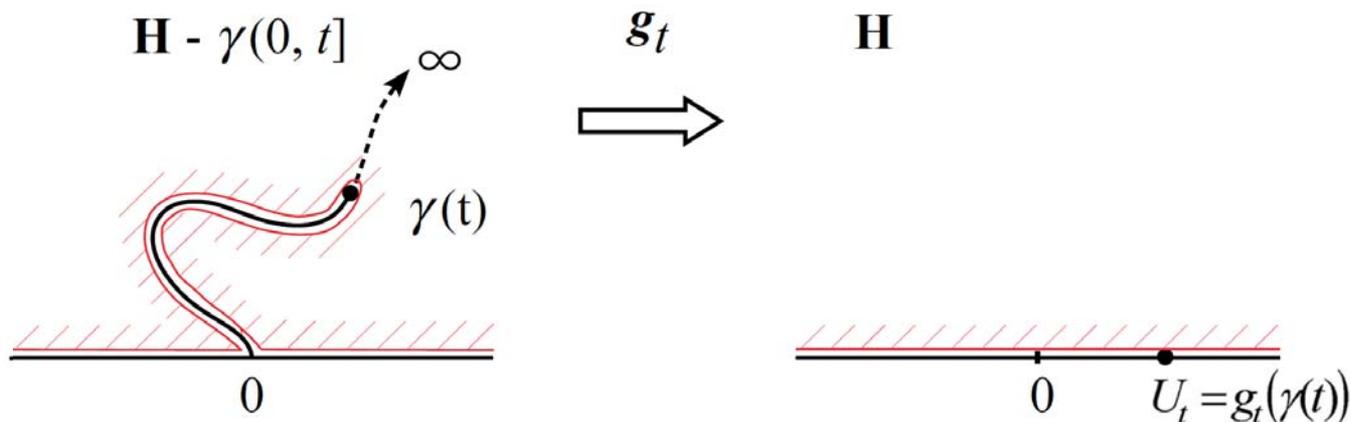
$\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$,

$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = U_0 \in \mathbb{R}$ から $\lim_{t \uparrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至る
ある一つの単純曲線.



各 $t \in (0, \infty)$ に対して

$\exists! g_t : \text{共形変換 } \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$,
s.t. $\lim_{z \rightarrow \infty} g_t'(z) = 1$



$$g_t(z) = z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

と展開される.

$a(t) > 0$: $\gamma(0, t]$ の上半平面容量
(half-plane capacity).

$g_t(z)$ は (chordal) Loewner 方程式と呼ばれる
次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z.$$

ただし, $U_t = g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$. $t \rightarrow U_t$ は連続である。

- 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$T_z \equiv \sup \{t > 0 : g_t(z) - U_t \neq 0\}.$$

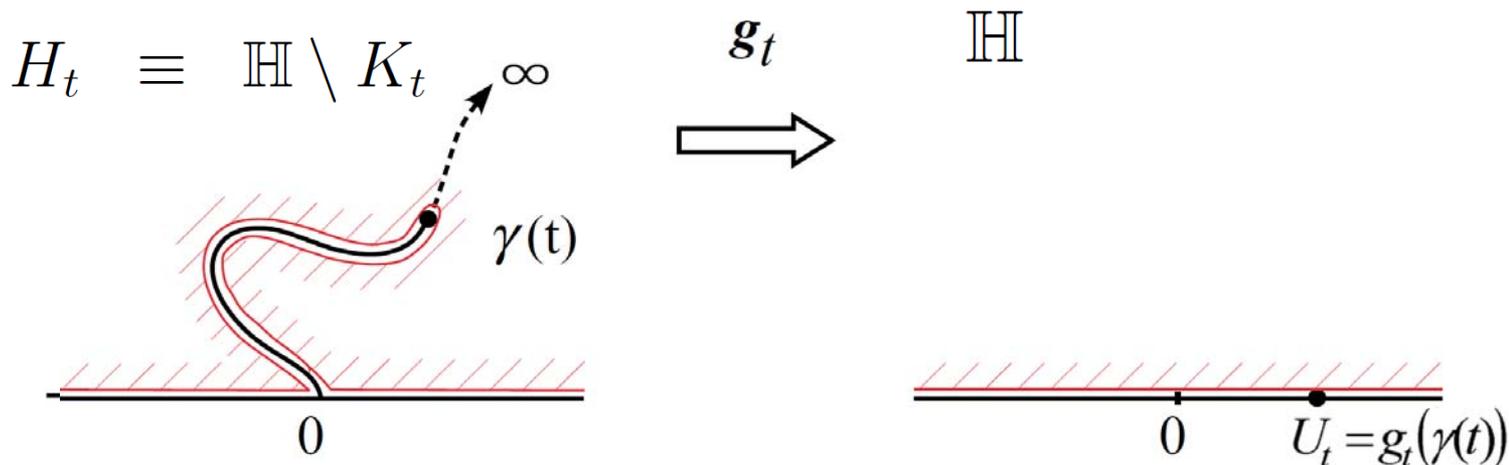
- 各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$K_t \equiv \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\}.$$

$$H_t \equiv \mathbb{H} \setminus K_t:$$

時刻 t までは解ける領域 (定義域)

- 定義域 $H_t \subset \mathbb{H}$ は単調減少。



2.3 Schramm のアイデアと SLE κ

以下, 曲線 γ の径数付けによる違いは無視.

$a(t) = at, a = \text{定数} > 0$ とする.

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z$$

Loewner : 曲線 $\gamma(0, t]$ \implies 共形変換 g_t $\implies U_t = g(\gamma(t))$

Schramm : **逆問題** $U_t \implies$ 共形変換 $g_t \implies$ 曲線 $\gamma(0, t]$

ランダムネス U_t : 確率過程 \implies 共形変換 g_t の統計集団
 \implies 曲線 γ の統計集団 \iff 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$

Schramm の observation (2000)

$\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}$: 共形共変/共形不変 領域 Markov 性

↓

U_t は独立定常増分をもつ

$$[A] \quad U_t \perp (U_{t+s} - U_t), \quad \forall s, t > 0$$

$$[B] \quad (U_{t+s} - U_t) \stackrel{d}{=} U_t, \quad \forall s, t > 0$$

かつ, [C] U_t を連続な確率過程とする.

↓

$$U_t = c_1 B_t + c_2 t$$

$$B_t = 1 \text{ 次元標準 Brown 運動 } \stackrel{d}{=} N(0, t)$$

$$c_1, c_2 = \text{定数}$$

[D] 曲線 γ の径数付けの違い無視 $\implies c_1 = 1$ としてよい.

[E] 虚軸に対する左右対称性 $\implies c_2 = 0$ (ドリフト無し)

stochastic Loewner equation (SLE)

→ Schramm-Loewner Evolution (SLE)

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - B_t}, \quad g_0(z) = z$$

a : 唯一の実パラメータ

Schramm: $a = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa \in (0, \infty) \implies \text{SLE}_\kappa$

- SLE_κ の解を生成する曲線 : SLE_κ 曲線 γ
- SLE_κ 曲線の測度 : SLE_κ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa(\cdot)$

$$\iff \frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z,$$

$$U_t = \sqrt{\kappa}B_t = B_{\kappa t} \quad : \quad \kappa = \text{BM の一様な時間変更のスケール}$$

定理 2.1 [Lawler-Schramm-Werner]

連続関数空間上の測度で共形共変性と局所 Markov 性を持つものはすべて、
1 径数族である SLE_κ 測度, $\kappa \in (0, \infty)$ で与えられる。



Oded Schramm (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel
– September 1, 2008, Washington State, USA)

SLE κ 曲線の3相(3態)

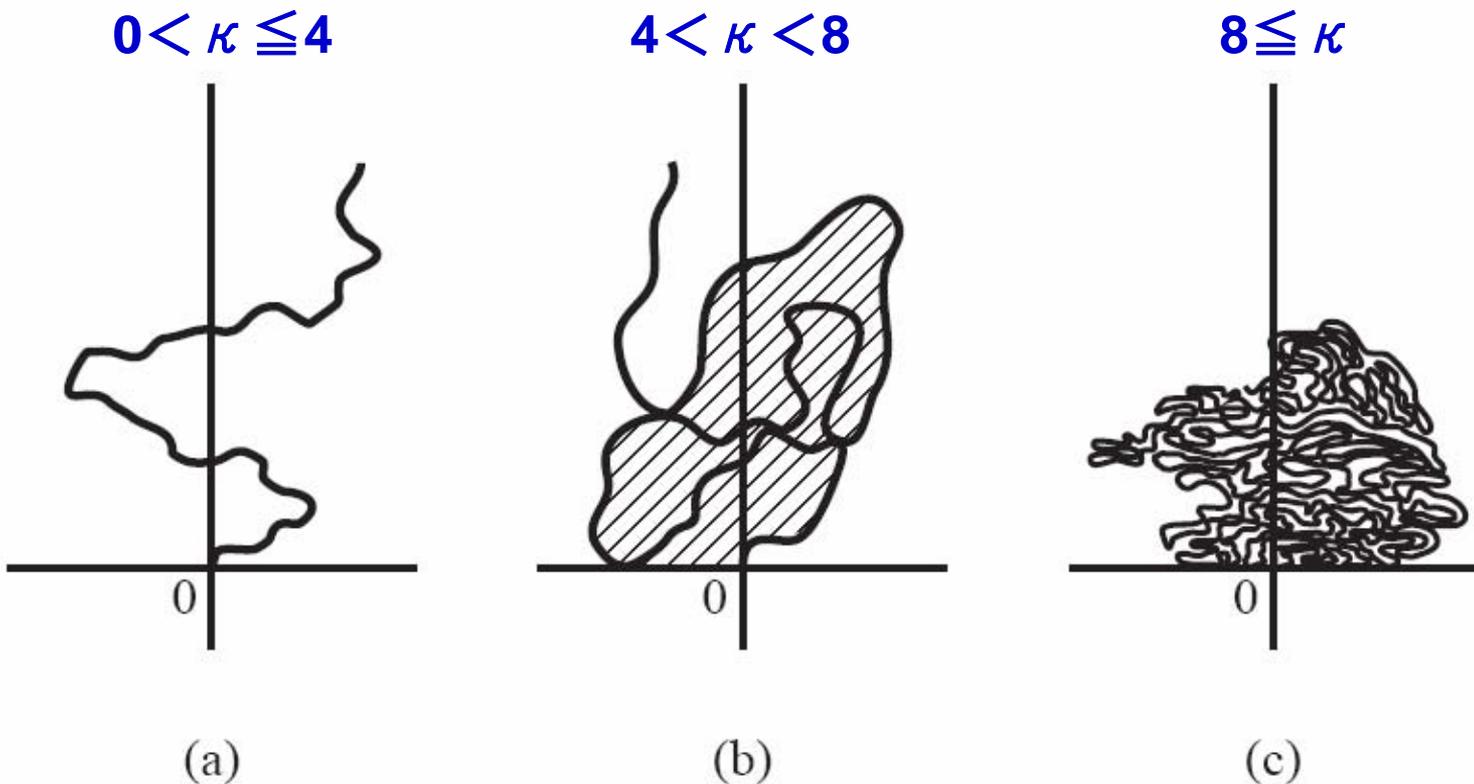
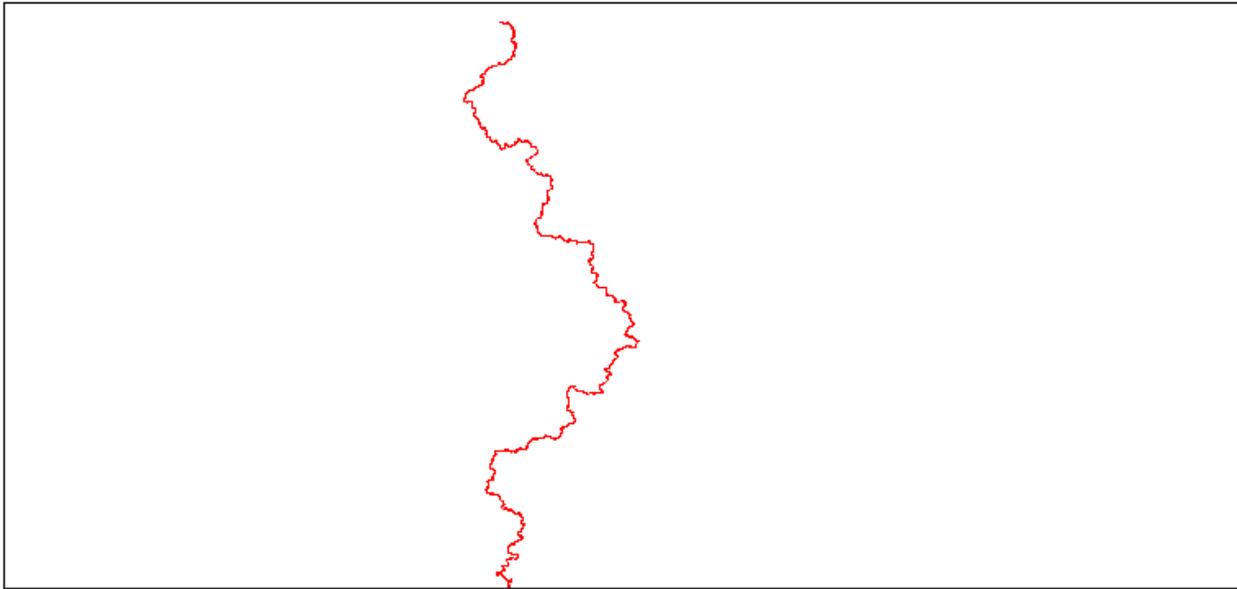
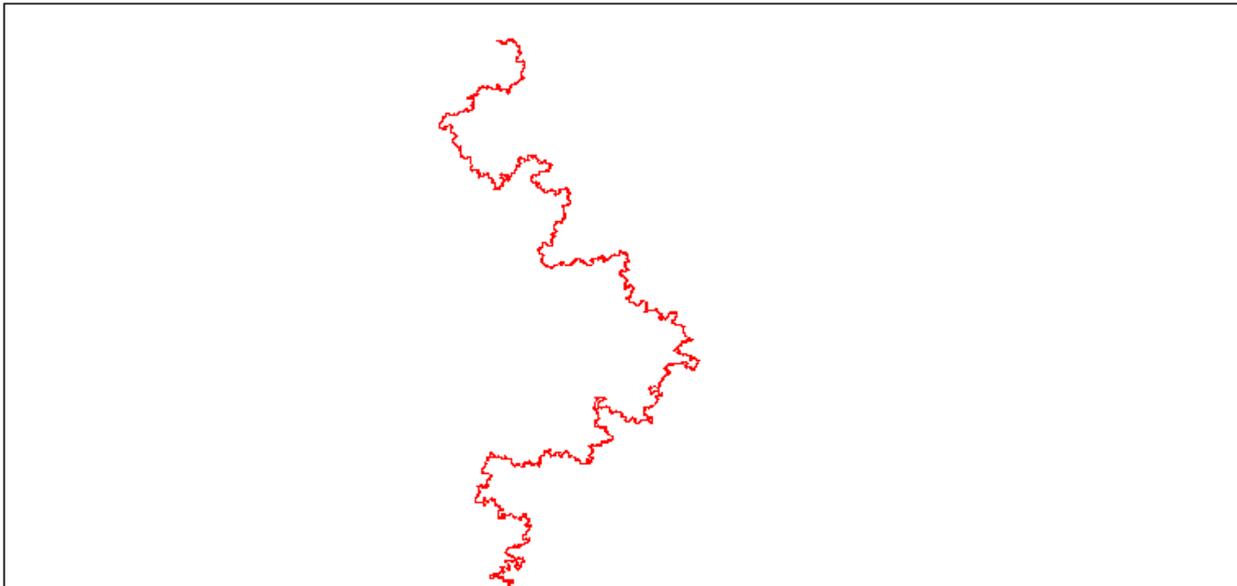


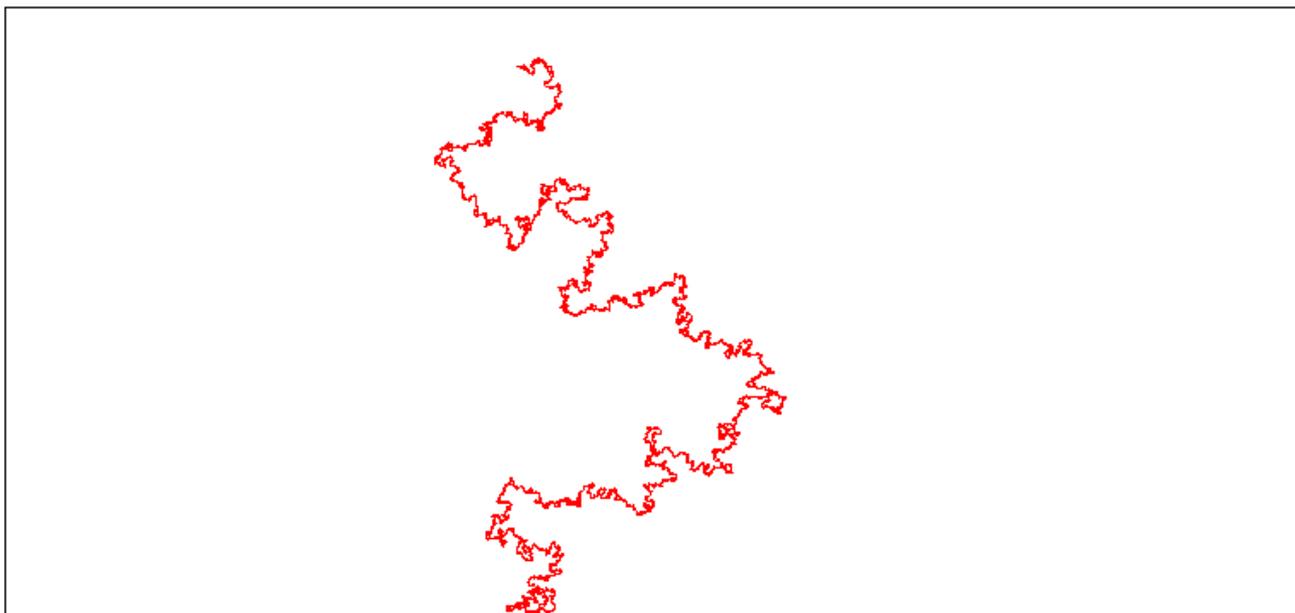
図 2: (a) 単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない. $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.



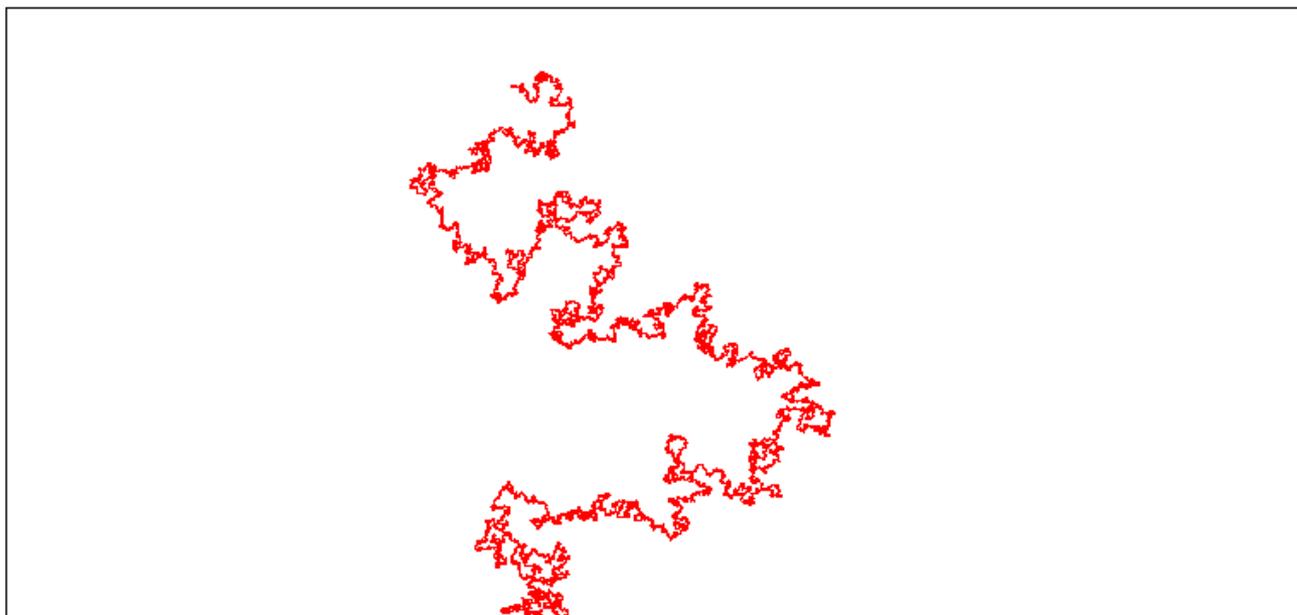
$$\mathcal{K} = 1.0$$



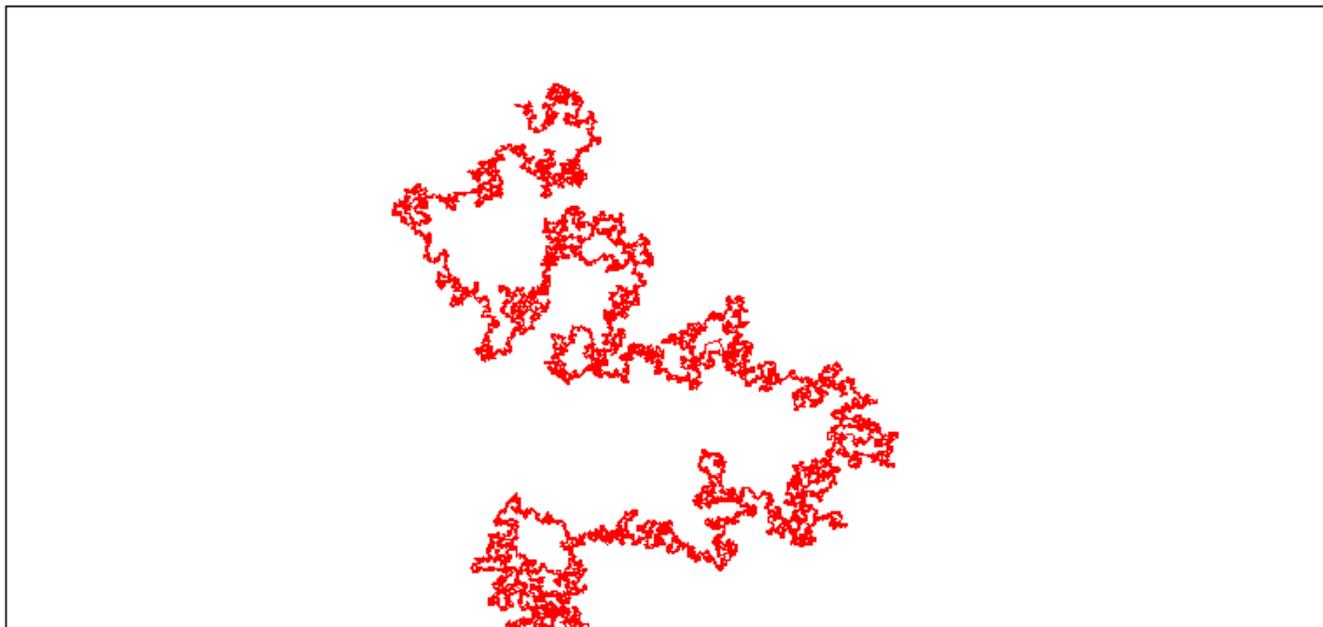
$$\mathcal{K} = 2.0$$



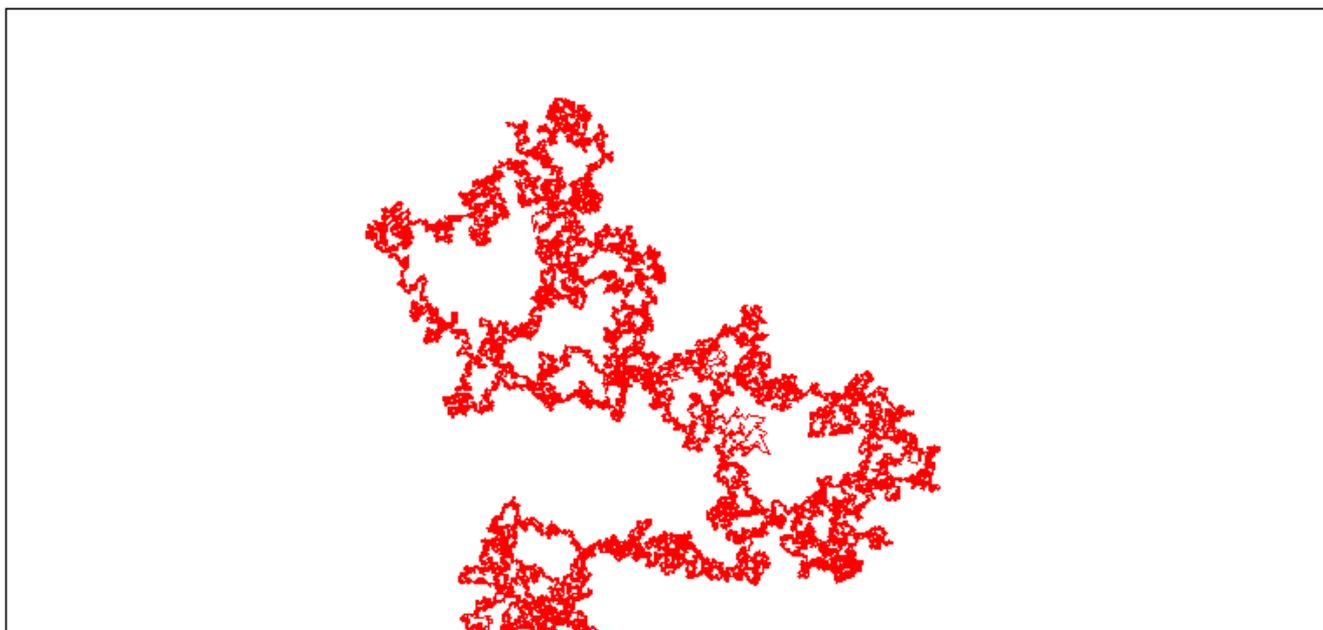
$$\kappa = 3.0$$



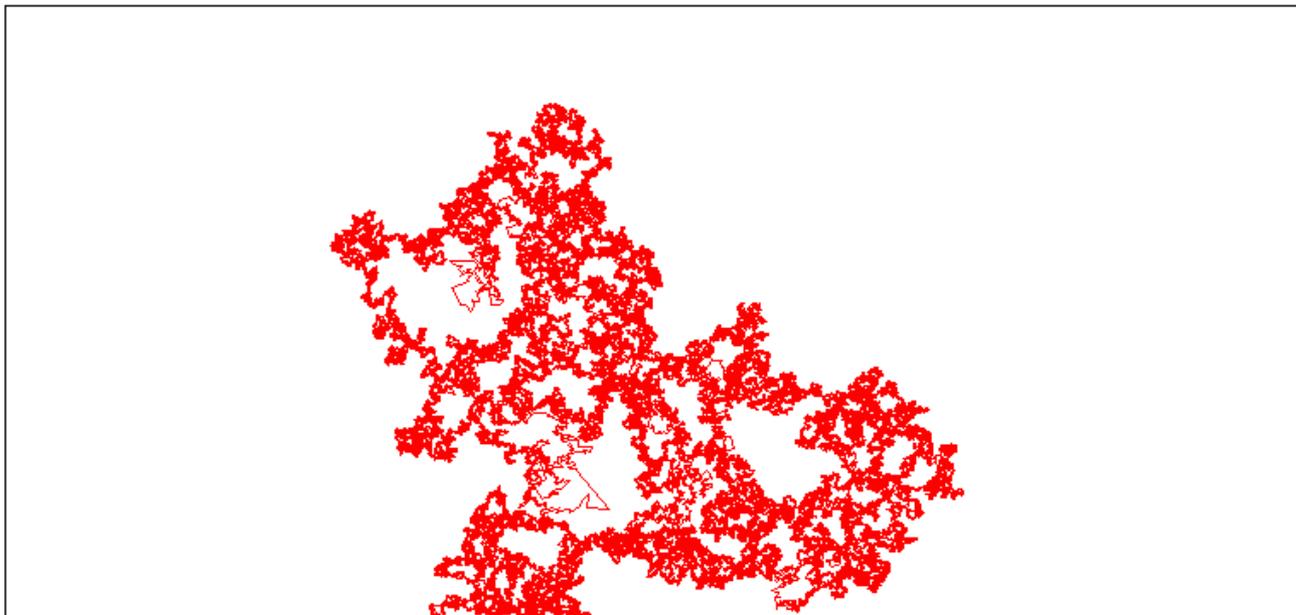
$$\kappa = 4.0$$



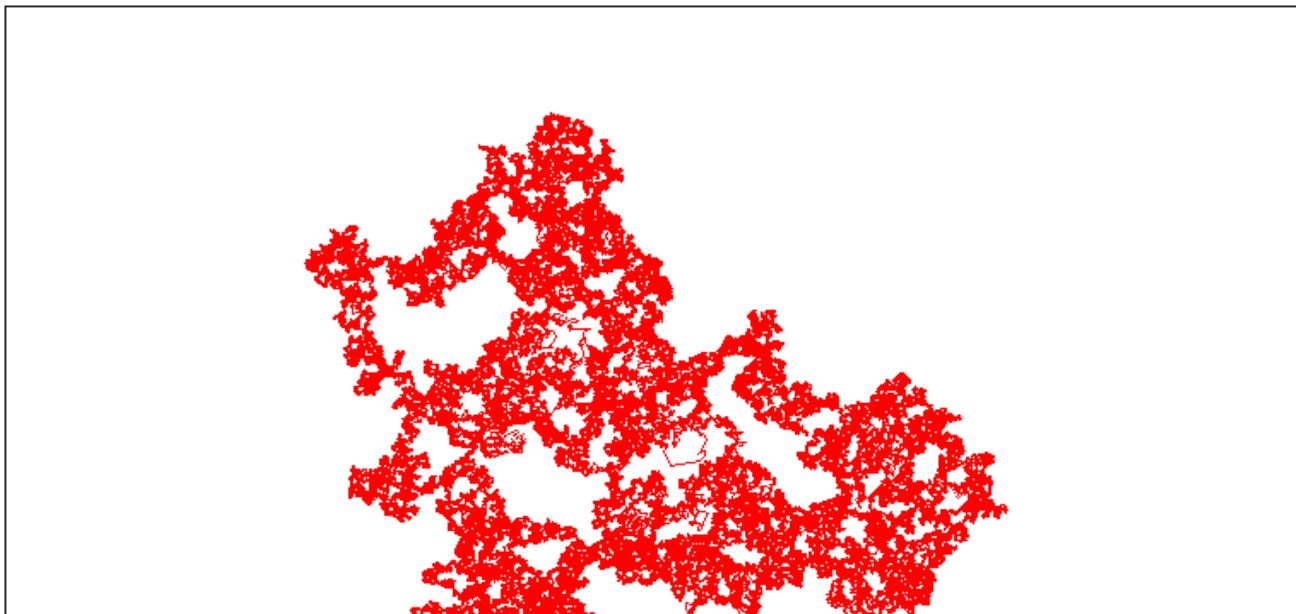
$$\kappa = 5.0$$



$$\kappa = 6.0$$



$$\kappa = 7.0$$



$$\kappa = 8.0$$

3 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$ の共形不変性が証明されれば (μ^{per} は局所性を併せ持つので)
 $\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} \stackrel{c}{=} \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$
- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$ の共形共変性が証明されれば ($\bar{\mu}^{\text{SAW}}$ は制限性を併せ持つので)
 $\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$

ただし、ここでの $\stackrel{c}{=}$ は共形変換によって変換できるという意味。

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性 \iff (三角格子上のみ) Smirnov (2001)
- SAW の連続極限の共形共変性 \iff 未証明
- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

$$d = 1 + \frac{\kappa}{8}$$

$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$d_{\text{LERW}} = d(2) = \frac{5}{4}, \quad d_{\text{SAW}} = d(8/3) = \frac{4}{3}, \quad d_{\text{Ising}} = d(3) = \frac{11}{8}, \quad d_{\text{per}} = d(6) = \frac{7}{4},$$

$$b_{\text{LERW}} = b(2) = 1, \quad b_{\text{SAW}} = b(8/3) = \frac{5}{8}, \quad b_{\text{Ising}} = b(3) = \frac{1}{2}, \quad b_{\text{per}} = b(6) = 0.$$

注 4.1. 2次元格子上的の統計物理模型の連続 (スケーリング) 極限と SLE_κ 測度は次のように対応していることが “知られている”.

$$\begin{aligned}
 \kappa = 2 & \iff \text{ループ除去ランダムウォーク (LERW)} \\
 \kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} & \iff \text{自己回避ウォーク (SAW)} \\
 \kappa = 3 & \iff \text{臨界イジング界面曲線} \\
 \kappa = 4 & \iff \text{臨界 4 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{24}{5} = 4.8 & \iff \text{臨界 3 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} & \iff \text{臨界イジング模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = 6 & \iff \text{臨界浸透探索過程} \\
 \kappa = 8 & \iff \text{uniform spanning tree (UST)} \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

(q 状態ポッツ模型の $q = 2$ がイジング模型, $q = 1$ がパーコレーション模型, $q = 0$ が UST にそれぞれ対応する. κ との対応は $q = 2 + 2 \cos(8\pi/\kappa)$, $4 \leq \kappa \leq 8$ とされている.)

W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.

$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$



$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$ となる固有値と固有ベクトルの対 $(b, |b\rangle)$ を導入.
最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$ を考える.

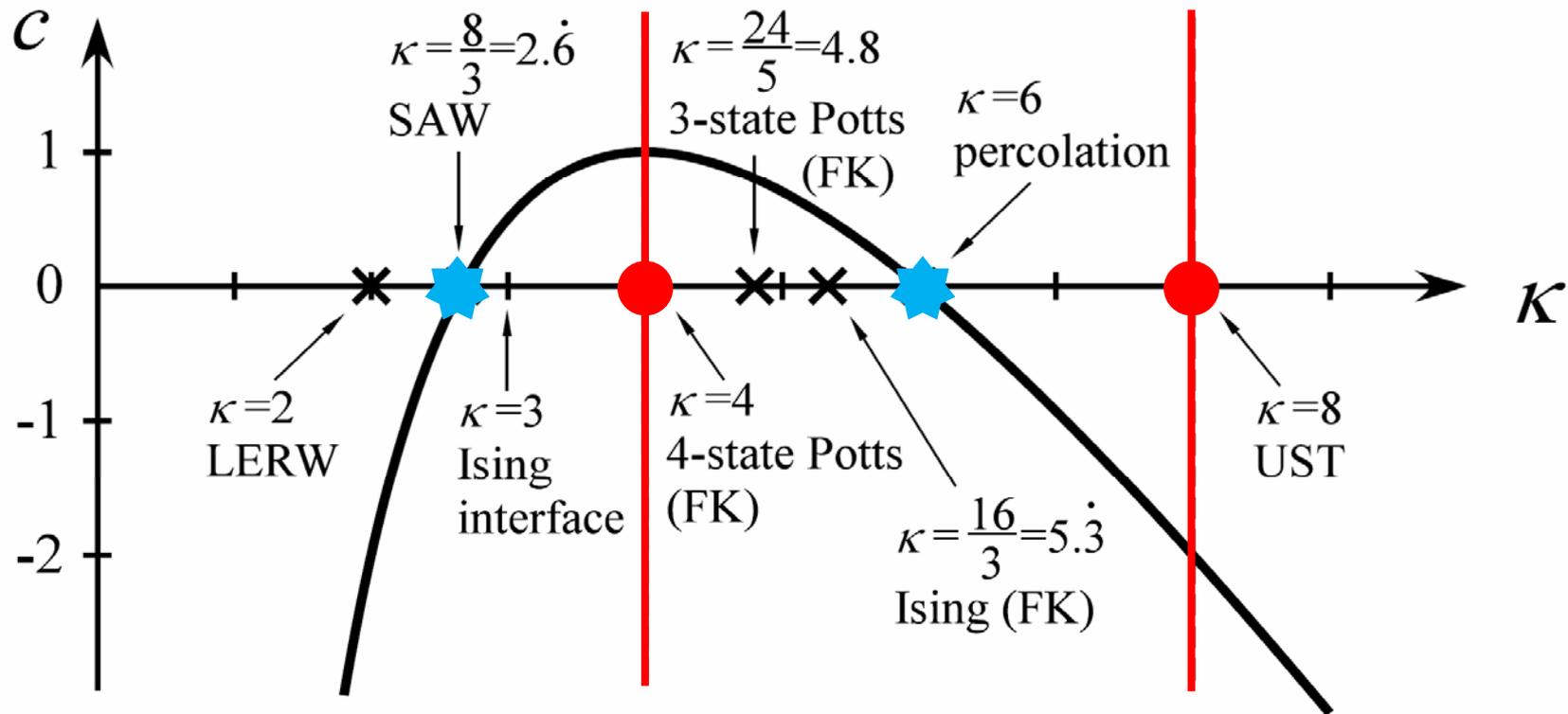
$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、**レベル 2 の退化表現**が得られる (Kac 公式).

$b \neq 0$ とすると、この条件式は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

に等しい



- SLE 曲線の径数 κ と中心電荷 c との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の κ の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

4 広がるSLE研究

共形不変と思われる曲線を，数値的に描かせたSLE曲線と比較することにより， κ の値を予測する。

[格子模型] Picco, Santachiara, Numerical study on SLE in nonminimal conformal field theories, PRL **100** (2008).

[乱流] Bernard, Inverse turbulent cascades and conformally invariant curves, PRL **98** (2007). **SQG: surface quasigeostrophic turbulence.**

Zero temperature isolines ··· **SLE₄**

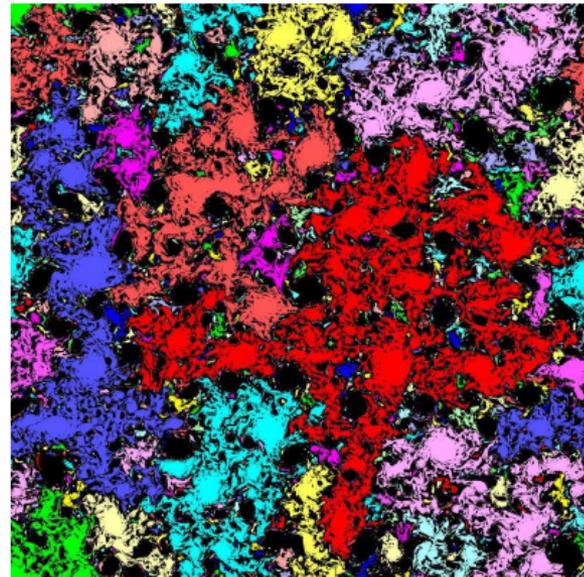


FIG. 2 (color online). Temperature clusters in the inverse cascade of SQG turbulence. These are connected domains with positive temperature. Negative temperature regions are black.

[**スピングラス**] Amoruso et al., Conformal invariance and SLE in two-dimensional spin glasses, PRL **97** (2006).

[**height model**] Sabari et al., Conformal curves on the WO_3 surface, PRL **100** (2008). 酸化タンゲステン表面
Isoheight lines . . . **SLE₃**

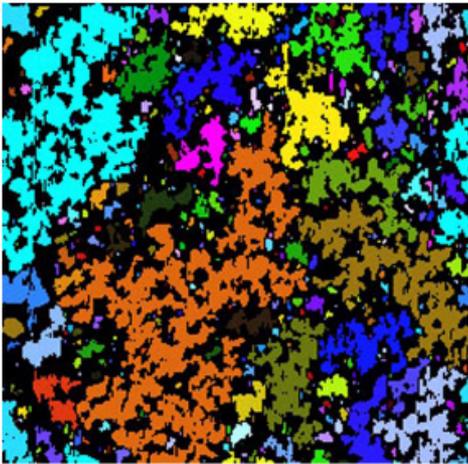


FIG. 2 (color online). The connected domains with positive heights on the WO_3 surface. Negative height regions are black.

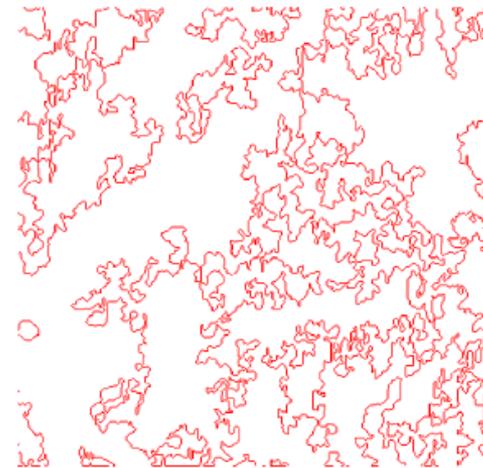


FIG. 3 (color online). Some of the positive height cluster boundaries on a WO_3 surface (see also Fig. 2).