応用解析１　期末テスト（２００２年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．

問題 I. 下記の誘導にしたがって，微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \tag{1}$$

の解を１つ求めなさい．

(1)　級数解　$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+\rho}$ を微分方程式 (1) に代入し，ρ を決める式 (決定方程式) を導きなさい．

(2)　以下，$\rho=1/2$ の場合の解を求めることにする．m が奇数の場合は，$a_m=0$ となることを示しなさい．

(3)　$a_0=1$ として，解を求めなさい．

問題 II. $P_n(x), n=0,1,2,\cdots,$ を n 次のルジャンドル多項式とする．特に，$P_0(x)=1, P_1(x)=x$ である．また，$P_n(1)=1, P_n(-1)=(-1)^n$ である．いま, $n\neq m$ のときには $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$ であること (直交性) は証明済みとして，次の誘導にしたがって，$\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2dx$ を求めよ．

(1)　次の 2 つの漸化式

$$nP_n(x) = xP_n'(x)-P_{n-1}'(x) \tag{2}$$

$$P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_{n-2}(x)+P_{n-3}'(x) \tag{3}$$

が成り立つことが知られている (ただし，$'=\dfrac{d}{dx}$ である)．(2) 式の両辺に $P_n(x)$ をかけて，x について -1 から $+1$ まで積分すると

$$n\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2dx=\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_n'(x)dx-\int_{-1}^{1}P_n(x)P_{n-1}'(x)dx \tag{4}$$

が得られる．漸化式 (3) を用いることにより，(4) 式の右辺第 2 項はゼロになることを証明せよ．

(2)　(4) 式の右辺第 1 項を部分積分すると，$1-\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2dx$ となることを示せ．

(3)　以上の結果から，$\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2dx$ を求めよ．