応用解析１　期末テスト（２００３年度）

ノートのみ持ち込み可.

問題 I. $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

を考える．$y(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ とおいて，係数 $a \sim f$ を適当に定めることにより，$y(1) = 1$ となる解を求めなさい.

問題 II. x, t の 2 変数関数　$\Phi(x,t) = e^{2tx-t^2}$　を考える.

(1)　これが次の偏微分方程式を満たすことを示しなさい.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2t\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

(2)　$A_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots,$ を x の関数として

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n!}t^n$$

とおくことにする．$A_n(x)$ の満たすべき微分方程式を求めなさい.

問題 III. x の 2 次関数 $F(x) = ax^2 + bx + c$ を考える．次の 3 つの条件を満たすように，係数 a, b, c を定めなさい.

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} xF(x)dx = 0, \quad F(1) = 1.$$

問題 IV. エルミート多項式

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \quad \cdots,$$

は，直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$$

を満たす．このことを用いて，次の 4 つの定積分の値を求めなさい.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^6e^{-x^2}dx.$$