応用解析１　期末テスト（２００４年度）

ノートのみ持ち込み可.

問題 I. ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ の母関数は

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{1}$$

で与えられる．以下の設問に答えなさい．(計 50 点)

(1)　[10 点] 式 (1) の両辺を z で微分して，次の等式を得なさい．

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-1/2} = (1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} P_n(x). \tag{2}$$

(2)　[20 点] 式 (1) と式 (2) から，次の漸化式を導きなさい．

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x). \tag{3}$$

(3)　[10 点] $P_4(x)$ と $P_5(x)$ がそれぞれ次式で与えられている．$P_6(x)$ を求めなさい．

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

(4)　[10 点] 次の 2 つの積分の値を答えなさい．

$$I_1 = \int_{-1}^{1} P_6(x)^2 dx, \quad I_2 = \int_{-1}^{1} P_5(x)P_6(x) dx.$$

問題 II. 調和振動子のシュレーディンガー方程式 (エネルギー E の時間に依らない方程式)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x) \tag{4}$$

を考える．以下の設問に答えなさい．(計 50 点)

(1) [15 点] まず，$\phi(x) = \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$ とする．次が成り立つことを示しなさい．(ただし，$f' = \dfrac{df}{dx}$.)

$$\phi(x)' = -\frac{m\omega x}{\hbar}\phi(x), \quad \phi(x)'' = \left[\left(\frac{m\omega x}{\hbar}\right)^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\right]\phi(x). \tag{5}$$

(2) [15 点] $\psi(x) = \phi(x)f(x)$ として，これを式 (4) に代入して，$f(x)$ に対する微分方程式を求めなさい．その際，式 (5) の関係式を用いなさい．

(3) [20 点] 上の問 (2) で求めた方程式で，$\xi = x\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}$ という変数変換 $x \mapsto \xi$ を行い，さらに $E = \hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ と置く．$g(\xi(x)) \equiv f(x)$ とすると，ξ の関数 $g(\xi)$ に対してどのような方程式が得られるか答えなさい．

Hint: 上の変数変換をすると

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{dg}{d\xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{dg}{d\xi}$$

というように，微分も変換されることに注意しなさい．(同様に f'' も変換しなさい.)