応用解析１　期末テスト（２００５年度）

ノートのみ持ち込み可.

問題 I. $\Gamma(z)$ をガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

とする (ただし $z > 0$ とする). 以下の設問に答えよ. [各 10 点, 計 30 点]

(1)　次の関数等式が成り立つことを証明せよ.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(2)　$\Gamma(1/2)$ を求めよ.

(3)　$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする. $\Gamma(n + 1/2)$ を求めよ.

問題 II. ルジャンドル多項式 $P_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots,$ は次の微分方程式を満たす.

$$(1-x)^2 y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

次の設問に答えよ. [各 20 点, 計 40 点]

(1)　パラメータ z を導入して,

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

とする. これは x と z の 2 変数関数であるが, これが満たすべき偏微分方程式を導きなさい.

(2)　上で求めた偏微分方程式を

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

が満たすことを示しなさい.

問題 III. $i = \sqrt{-1}$ として, x を実数とする. 次の設問に答えよ. [各 15 点, 計 30 点]

(1)　次の積分を計算せよ.

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2ixt}\, dt.$$

(2)　エルミート多項式 $H_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots,$ に対するロドリーグの公式を用いることにより, 上の結果から, $H_n(x)$ に対する次の積分表示を導きなさい.

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2}\, dt.$$