応用解析１　期末テスト（２００６年度）

ノートのみ持ち込み可．裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

次の 3 問に答えなさい．(問題 III は裏面．)

問題 I.　$P_0(x)=1,\ P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$ とする．以下の設問に答えよ．途中の計算も記すこと．

(1)　x の 4 次式（ただし偶関数）

$$P_4(x)=ax^4+bx^2+c$$

を考える．次の 3 つの条件を満たすように，係数 a,b,c を定めなさい．

$$\int_{-1}^{1}P_0(x)P_4(x)dx=0,\quad \int_{-1}^{1}P_2(x)P_4(x)dx=0,\quad P_4(1)=1.$$

(2)　パラメータ A を持つ微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+Ay=0$$

を考える．上で求めた $P_4(x)$ がこれを満たすとき，パラメータ A の値はいくらか.

問題 II. エルミート多項式 $H_n(x)$ を用いて，エルミート関数 $\varphi_n(x)$ は

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-x^2/2}H_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots$$

と定義される．以下の設問に答えよ．

(1)　エルミート多項式の 3 項間漸化式

$$xH_n(x)=nH_{n-1}(x)+\frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

を用いると，$x\varphi_n(x)$ は $\varphi_{n-1}(x)$ と φ_{n+1} のみを用いて表せることが分かる．これを示せ．

(2)　エルミート多項式は，次のような，微分を含む漸化式も満たす.

$$\frac{d}{dx}H_n(x)=xH_n(x)+nH_{n-1}(x)-\frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

これを用いると $\dfrac{d}{dx}\varphi_n(x)$ もまた，$\varphi_{n-1}(x)$ と $\varphi_{n+1}(x)$ のみを用いて表されることが分かる．これを示せ.

(3)　上の 2 つの結果から，次の 2 つの量をエルミート関数を用いて表しなさい.

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)\varphi_n(x),\qquad \left(\frac{d}{dx}-x\right)\varphi_n(x)$$

(4)　$\left(\dfrac{d}{dx}+x\right)\left(\dfrac{d}{dx}-x\right)\varphi_n(x)$ を計算することにより，次が成り立つことを導きなさい.

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2\right)\varphi_n(x)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

問題 III. $u = u(x,t)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1)　まず，t は定数と思って，u を x についての方程式

$$\frac{d}{dx}u = -\frac{x}{t}u$$

の解とする．すると $C(t)$ を t のみの関数として

$$u = C(t)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \tag{1}$$

と求められることを示しなさい．

(2)　次に，(1) 式を拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

に代入してみる．このとき拡散方程式が成り立つためには，$C(t)$ はどのような微分方程式を満たさなければならないか答えなさい．

(3)　上で導いた方程式を解いて $C(t)$ を定めなさい．ただし積分定数は，$t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = 1$$

を満たすように決めなさい．