応用解析２　期末テスト（２００２年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．

問題 I. 質量 M の質点をバネ定数 k のバネにつけた調和振動子を考える．いま仮に，変位 x が時間 t の関数として，$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t)$ という形であるとして，変分法によって正しい $x(t)$ を定めてみよう．ただし, $t = 0$ と $t = 2\pi/\omega$ で $x = 0$ であるとする．

(1)　ポテンシャルエネルギー $V = \frac{1}{2}kx^2$ と運動エネルギー $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ より，ラグランジアン L は $L = T - V$ で定義される．このとき，積分 $I = \int_0^{2\pi/\omega} L\ dt$ を計算しなさい．

(2)　この積分は作用積分とよばれる．これが極値をとるように A_n を選ぶことにする．すなわち $\frac{\partial I}{\partial A_n} = 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots$. この条件を満たし，かつ物理的に適した解を求めなさい．

問題 II. つぎの $x(t)$ に対する積分方程式

$$x(t) = t + \omega^2 \int_0^t (y - t)x(y)dy$$

を，$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = 1$ という条件の下で解きなさい．ただし，ω は定数である．

問題 III. 空間１次元の場合の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を，境界条件 $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ と初期条件 $u(x,0) = f(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ の下で解く．ただし，v と ℓ は正の定数であり，$f(x)$ と $g(x)$ は与えられた関数とする．

(1)　方程式の解が変数分離の形

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

に書けると仮定して，まずは境界条件や初期条件を課さずに $X(x)$ と $T(t)$ を求めよ．

(2)　境界条件を満たす解を求めよ．

(3)　初期条件も満たす解を求めよ．

問題 IV. ３つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{A, B, C\}$ を考える．

(1)　G が, 行列のかけ算に関して，群の４つの公理を満たすことを示しなさい．

(2)　群 G の群表を書きなさい．