応用解析２　期末テスト（２００３年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．(裏面にも問題があるので注意せよ．)

問題 I. 鉛直方向を向いた放物線の形をした針金に沿って自由に動く質量 M のビーズを考える．水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると，針金の形状は $y = ax^2$ と書ける (a は正の定数)．運動エネルギーからポテンシャル・エネルギーを引いた量をラグランジアン $\mathcal{L}$ という．今の場合，

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(ax^2) = 2ax\dot{x}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - Mgy \\ &= \frac{1}{2}M(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 - Mgax^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

と表せる．ここで g は重力加速度 (定数) である．

(1)　変位 x の近似解として

$$x = A\sin\omega t$$

を仮定することにする．これを (1) 式に代入して積分

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \mathcal{L}\, dt$$

を計算しなさい．ただし，必要があれば次の公式を用いよ．

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

(2)　係数 A についての極値条件

$$\frac{dI}{dA} = 0$$

を満たすように，ω を a と A の関数として定めなさい．

問題 II. 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \ell(\ell+1)R = 0$$

ヒント：$R = r^k$ とおいてみて，これが上の微分方程式の解になるように，指数 k を定めてみよ．

問題 III. 4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{E, A, B, C\}$ を考える．

(1) G が, 行列のかけ算に関して，群の 4 つの公理を満たすことを示しなさい．

(2) 群 G の群表を書きなさい．

問題 IV. 2 項分布

$$f(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad 0 \leq p \leq 1$$

を考える．

(1) 平均値

$$\overline{m} = \sum_{m=0}^{n} m f(m)$$

を計算しなさい．

(2) 分散

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} (m - \overline{m})^2 f(m)$$

を計算しなさい．