応用解析２　期末テスト（２００４年度）

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．(裏面にも問題があるので注意せよ．)

問題 I. 1 粒子の古典力学的な運動を考える．座標を $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, 運動量を $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ で表す．この粒子のハミルトニアンを $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ としたとき，ラグランジアンとよばれる，$\mathbf{q}(t)$ と $\mathbf{p}(t)$ の汎関数は

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \qquad (\text{ただし}, \dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, j = 1, 2, 3)$$

で定義される．最小作用の原理に従うと，時刻 $t = t_1$ から時刻 $t = t_2$ までの間の粒子の運動は，作用とよばれる積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) dt$$

を最小にするものである．

(1) [30 点]　作用 I の変分

$$\begin{aligned}
\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3} p_j \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3} \dot{q}_j \delta p_j - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt
\end{aligned}$$

を考える．ただし，$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0, j = 1, 2, 3$ とする．

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$$

であることに注意して，これを

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3} (A_j \delta p_j - B_j \delta q_j) dt$$

という形の式変形せよ．

(2) [20 点]　$A_j = 0, B_j = 0, j = 1, 2, 3$ ならば $\delta I = 0$ である．$A_j = 0, B_j = 0, j = 1, 2, 3$ という条件は，力学では何を意味するか説明しなさい．

問題 II. x の関数 $\rho(x)$ が与えられているものとする．ε を定数として，x の関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \rho(x') G(x'; x) dx$$

とする．ここで $G(x'; x)$ は

$$G(x'; x) = \begin{cases} -(1-x)x', & x' \leq x \text{ のとき} \\ -(1-x')x & x' > x \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．

(1) [15 点]　$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ であることを示しなさい．

(2) [15 点]　$\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ を計算しなさい．

(3) [20 点]　$\dfrac{d^2}{dx^2}\phi(x)$ を計算しなさい．

問題 III.

(1) [20 点]　$i=\sqrt{-1}$ としたとき，集合 $G_1=\{1,i,-1,-i\}$ は通常のかけ算に関して群を成すことを証明しなさい．

(2) [20 点]　4 つの 2×2 行列

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

からなる集合 $G_2=\{E,A,B,C\}$ は行列のかけ算に関して，群を成すことを証明しなさい．

(3) [10 点]　G_1 と G_2 とは同型であることを示せ．

問題 IV. ポアソン分布

$$f(m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\quad m=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0$$

を考える．

(1) [20 点]　平均値

$$\overline{m}=\sum_{m=0}^{\infty} mf(m)$$

を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(2) [30 点]　分散

$$\sigma^2=\sum_{m=0}^{\infty}(m-\overline{m})^2 f(m)$$

を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．