応用解析２　期末テスト（２００５年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．

下の４問すべてに解答しなさい．

問題 I. $x = x(t)$ を時間 t の関数として，その微分を $\dot{x}(t)$ と記すことにする．(つまり $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.) m と k を定数とする．$x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の汎関数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$ として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

と定義する．以下の問に答えなさい．

(1)　この $\mathcal{L}$ に対して，オイラー・ラグランジュ方程式を書き下しなさい．

(2)　上の結果から，ニュートン方程式を変分法の立場から論じてみなさい．

問題 II. $u = u(x, t)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1)　まず，t は定数と思って, u を x についての方程式

$$\frac{d}{dx}u = -\frac{x}{t}u$$

の解とする．すると $C(t)$ を t のみの関数として

$$u = C(t)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \tag{1}$$

と求められることを示しなさい．

(2)　次に，(1) 式を拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

に代入してみる．このとき拡散方程式が成り立つためには，$C(t)$ はどのような微分方程式を満たさなければならないか答えなさい．

(3)　上で導いた方程式を解いて $C(t)$ を定めなさい．ただし積分定数は, $t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx = 1$$

を満たすように決めなさい．

問題 III.　$i = \sqrt{-1}$ としたとき，集合 $G_1 = \{1, i, -1, -i\}$ は通常のかけ算に関して群を成す．また，4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G_2 = \{E, A, B, C\}$ は行列のかけ算に関して群を成す．G_1 と G_2 とは同型であることを示しなさい．

問題 IV. ポアソン分布

$$f(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda > 0$$

を考える．

(1) 平均値 $\overline{m} = \sum_{m=0}^{\infty} m f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)

(2) 分散 $\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m - \overline{m})^2 f(m)$ を計算しなさい．(途中の計算も詳しく書くこと.)