応用解析２　期末テスト（２００６年度）

下の４問の中から，２問を選択して解答用紙に答えよ．

問題 I. [合計 50 点]　1 m あたりの重さが ρ[kg/m] の糸が 2 点 (x_0, y_0) と (x_1, y_1) で支えられている．ただし，水平方向に x 軸をとり，鉛直上向きを y 軸の正の向きとする．したがって，重力は y 軸の負の向きに働く．糸の長さは ℓ[m] とする．以下の設問に答えよ．

(1) [15 点]　糸に沿っての線積分を $\int_{x_0}^{x_1} ds$ で表すことにする．糸に働く重力ポテンシャルは, 重力加速度を g[m/s^2] とすると

$$I_1 = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y ds$$

となる．また，糸の長さは一定であり

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_1} ds = \ell$$

である．λ を未定乗数としてラグランジュの未定乗数法を用いることにすると，糸の平衡位置 $y = y(x)$ は

$$I = I_1 + \lambda I_2 = \int_{x_0}^{x_1} (\rho g y + \lambda) ds$$

の値を極小にするという変分原理から定まるはずである．ds を dx と $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$ を用いて表すことにより，上の I は

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx$$

と表すことができることを，具体的に $f(y, y')$ を与えることによって示しなさい．

(2) [15 点]　上で求めた $f(y, y')$ は x を陽には含まないので，この変分問題を解くには オイラー・ラグランジュの方程式の第 2 形式が便利である．このことより，次の微分方程式を導きなさい．ただし，C_1 は積分定数（未定定数）である．

$$\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1 \tag{1}$$

(3) [10 点]　上の方程式 (1) は

$$\rho g y + \lambda = C_1 \cosh\Big(ax + C_2\Big)$$

とおくことによって解くことができる．ただし,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

であり，C_1 は (1) の右辺の定数，また C_2 はこれとは別の未定定数である．a を定めよ．

(4) [10 点]　C_1, C_2 とラグランジュの未定乗数 λ という 3 つの未定定数を定めるには, 3 つの条件式が必要である．この 3 つの条件式を書き下しなさい．($C_1 = \cdots, C_2 = \cdots, \lambda = \cdots$ という形に解く必要はない．C_1, C_2, λ を含む独立な 3 つの式を与えればよい．)

問題 II. [合計 50 点]　1 の目から 6 の目が，どれも等しく 1/6 の確率で出るサイコロを 6000 回投げる．「1 の目が出る回数 m」に関して，以下の設問にそれぞれ有効数字 2 桁で答えよ．必要があれば，次の値を用いよ．

$$\sqrt{5000} \simeq 70.7, \quad \sqrt{1000} \simeq 31.6, \quad \sqrt{833} \simeq 28.9$$

(1) [10 点]　平均値 $\overline{m}$ を求めよ．

(2) [10 点]　標準偏差 σ を求めよ．

(3) [10 点]　以下の式によって，確率変数 z を定義する

$$z = \frac{m - \overline{m}}{\sigma}$$

$z \simeq -1$ となる回数 m_1 を求めよ．

(4) [10 点]　同様に $z \simeq 1$ となる回数 m_2 を求めよ．

(5) [10 点]　1 の目が出る回数が m_1 回以上 m_2 回以下である確率は約何パーセントか．

問題 III. [合計 50 点]　4 つの 2×2 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $G = \{E, A, B, C\}$ に関して，以下の設問に答えなさい．

(1) [30 点]　行列のかけ算に関して，G は群の 4 つの公理を満たすことを示しなさい．

(2) [20 点]　この集合 G は，位数 4 の巡回群と同型であることを説明しなさい．

問題 IV. [合計 50 点]　次の 2 変数関数に関して設問に答えなさい．

$$\Phi(x, z) = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}$$

(1) [15 点]　上の関数を

$$\Phi(x, z) = A_0(x) + A_1(x)z + A_2(x)z^2 + \cdots$$

というように, z に関してテイラー展開する．係数 $A_0(x), A_1(x), A_2(x)$ を求めなさい．

(2) [15 点]　次の 3 つの微分をそれぞれ計算しなさい．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

(3) [10 点]　上の結果から，

$$x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (1-x)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(4) [10 点]

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) z^n$$

としたとき，$A_n(x)$ の満たすべき微分方程式を導きなさい．

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．