中央大学大学院理工学研究科

数理物理学特論　2005 年度後期

非衝突拡散過程，Painlevé 方程式 および Tracy-Widom 分布

(version 3f : 16 January 2006)

香取眞理 (中央大学理工学部) *

2005 年 9 月 26 日〜 2005 年 12 月 19 日
毎週月曜日　13:00-14:30　 理工 3 号館　3311 教室にて

*Electronic mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

目 次

記号について

$\mathbb{R}$	実数全体のつくる集合.
$\mathbb{R}^N$	N 次元ユークリッド空間.
$|\mathbf{x}|$	$= \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$
$\mathfrak{X}$	加算個の点の集合で集積点を持たないもの全体の空間.
$C_0(\mathbb{R})$	コンパクトな台を持つ連続な実関数全体の集合.
$\mathbf{1}_{\{\omega\}}$	条件 ω の指示関数. 条件 ω が満たされていれば 1, それ以外は 0 を与える.
$\mathfrak{S}_n$	n 個の変数の置換全体の集合. 位数 $|\mathfrak{S}_n| = n!$ の有限群 (置換群) をなす.

第1章　非衝突ブラウン運動

1.1　ブラウン運動

1 次元ブラウン運動 $B(t) \in \mathbb{R}, t \in [0,\infty)$ から話を始めることにする．時刻 $s\,(\geq 0)$ でブラウン粒子が位置 $x \in \mathbb{R}$ にあったとする．時刻 $t\,(\geq s)$ で区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ の中に，このブラウン粒子を見出す確率は，**遷移確率密度**

$$G(t;y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, \quad t \geq 0,\ \ x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.1.1}$$

を用いて

$$\mathrm{Prob}\Big(B(t) \in [a,b] \Big| B(s) = x\Big) = \int_a^b G(t-s;y|x)dy$$

で与えられる．遷移確率密度 $G(t;x,y)$ は次の性質をもつ；

$$\lim_{t\to 0} G(t;y|x) = \delta(x-y), \quad x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.1.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(t;y|x)dy = 1, \quad t \in [0,\infty),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(t-s;y|x)G(u-t;z|y)dy = G(u-s;z|x), \qquad 0 \leq s \leq t \leq u,\ x,z \in \mathbb{R}. \tag{1.1.4}$$

(1.1.4) は **Chapman-Kolmogorov の等式**とよばれる．$G(t;y|x)$ は，**熱伝導方程式** (あるいは**拡散方程式**)

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \tag{1.1.5}$$

の解のうち上の 3 つの性質を満たすものであり，**熱核**とよばれる．

問題 1.1.1　Chapman-Kolmogorov の等式 (1.1.4) が成り立つことを示しなさい．

時刻 $t=0$ でのブラウン粒子の位置の分布の確率密度が $\rho(x)$ で与えられているとする．これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1 \tag{1.1.6}$$

と規格化されている．このとき，時刻 $t>0$ での分布の確率密度は

$$p(t;x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t;x|y)\rho(y)dy \tag{1.1.7}$$

で与えられる．すなわち，熱核は熱伝導方程式の**グリーン関数**である．

問題 1.1.2　これを証明しなさい．

1.2　非衝突ブラウン運動

N 個のブラウン粒子が独立に時刻 $t\,(>s)$ まで運動する状況を考える．N 粒子の配置は $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ で表わされる．この N 粒子系の遷移確率密度は (1.1.1) の積

$$G_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})=\prod_{j=1}^{N}G(t-s;y_j|x_j)\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N \tag{1.2.1}$$

で与えられる．このときには，粒子間の衝突や交叉がある場合もすべて含まれる．

この N 粒子系に対して，時間 $[s,t]$ では衝突も交叉もしないという条件を付けることにする．すると時刻 s で順序

$$x_1<x_2<\cdots<x_N$$

が成り立てば，時刻 $t>s$ でこの順序は保たれることが分かる．従って，この非衝突条件の下での粒子の配置空間は $\mathbb{R}^N$ ではなく，その部分空間である

$$\mathbb{R}^N_<=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N:x_1<x_2<\cdots<x_N\right\} \tag{1.2.2}$$

となる．これを A_{N-1} **型の Weyl 領域**とよばれる．

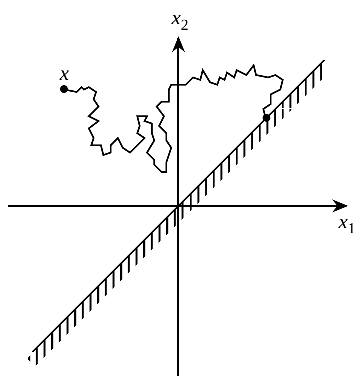

図 1.2.1: $\mathbb{R}^2_<$ 内の吸収壁ブラウン運動

注 1.2.1　N 次元空間 $\mathbb{R}^N$ 内のブラウン粒子の運動 (N 次元ブラウン運動) は，各成分 $B_j, 1\le j\le N$ が互いに独立な 1 次元ブラウン運動からなる

$$\mathbf{B}(t)=(B_1(t),B_2(t),\cdots,B_N(t))\in\mathbb{R}^N,\quad t\in[0,\infty)$$

で与えられる．Weyl 領域は $\mathbb{R}^N$ の部分空間である．この $\mathbb{R}^N_<$ 内の 1 点からスタートした N 次元ブラウン運動が，$\mathbb{R}^N_<$ の内壁のいずれかの点に衝突したら，ブラウン粒子は壁に吸収されてプロセスがストップしてしまうものとする．壁に衝突することなくプロセスが存続して状態を，(プロセスの) 生存状態ということにする．$N=2$ の場合の模式図を図 1.2.1 に示した．このようなプロセスを**吸収壁ブラウン運動**とよぶ．1 次元上の N 個のブラウン運動に非衝突条件を課した系は，生存しているという条件を課した $\mathbb{R}^N_<$ 内の N 次元吸収壁ブラウン運動と等価である．

衝突・交叉をする場合を除いて，非衝突なものだけを残すと，(1.2.1) は次のものになる．

$$f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1\le j,k\le N}\Big[G(t-s;y_k|x_j)\Big]. \tag{1.2.3}$$

これは確率論では **Karlin-McGregor の公式** [3, 4], 組み合わせ論的表現論では **Lindström-Gessel-Viennot の公式**とよばれる ([13, 10] およびこれらに引用されている文献を参照). 証明については [9] を参照せよ.

注 1.2.2　この公式は，量子力学でフェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す **Slater 行列式**と同じ形である.

積 (1.2.1) は

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{y}\, G_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dy_j\, G(t-s;y_j|x_j) = 1$$

と規格化されているので確率密度になっているが，(1.2.3) の f_N は衝突する場合を除いてしまっているので，$t>s$ では

$$\mathcal{N}_N(t-s;\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N_<} f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})d\mathbf{y} < 1, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N_< \tag{1.2.4}$$

である．この $\mathcal{N}_N(t-s;\mathbf{x})$ は，時刻 s に配置 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N_<$ にあった N 個のブラウン粒子が，時刻 t までの時間間隔 $[s,t]$ の間ずっと非衝突でいる確率を表わす．**注 1.2.1** の考察から，これは $\mathbb{R}^N_<$ 中の吸収壁ブラウン運動の**生存確率 (survival probability)** であることが分かる.

ここで，正のパラメータ $T>0$ を導入する．そして，N 個のブラウン粒子が有限の時間区間 $[0,T]$ の間だけ非衝突であるという条件を課すことを考える．この非衝突条件の下で，$0\le s\le t\le T$ としたときの，時刻 s から時刻 t での配置 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N_<$ から配置 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_<$ への規格化された遷移密度（すなわち遷移確率密度）は

$$g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})\mathcal{N}_N(T-t;\mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s;\mathbf{x})} \tag{1.2.5}$$

で与えられる．このことは図 1.2.2 を眺めると納得できるであろう．この遷移確率密度が，次の性質を満たすことは，1 次元ブラウン運動に対する (1.1.2)-(1.1.4) と行列式の基本性質より，容易に証明できる.

$$\lim_{t\to 0} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_<, \tag{1.2.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N_<} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})d\mathbf{y} = 1, \quad 0\le s\le t\le T, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N_<, \tag{1.2.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N_<} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})g_{N,T}(t,\mathbf{y};u,\mathbf{z})d\mathbf{y} = g_{N,T}(s,\mathbf{x};u,\mathbf{z}), \qquad 0\le s\le t\le u\le T, \mathbf{x},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N_<. \tag{1.2.8}$$

ただし，$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^N \delta(x_j-y_j)$ である．(1.2.6)-(1.2.8) は, 1 次元ブラウン運動 $B(t)$ の遷移確率密度の性質 (1.1.2)-(1.1.4) に対応しており，この遷移確率密度 $g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})$ をもってマルコフ過程が定義される．((1.2.8) はこの N 次元プロセスに対する Chapman-Kolmogorov の等式である.) このプロセスを $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t),\cdots,X_N(t)), t\in[0,T]$ と書くことにする

問題 1.2.1　Chapman-Kolmogorov の等式 (1.2.8) が成り立つことを示しなさい.

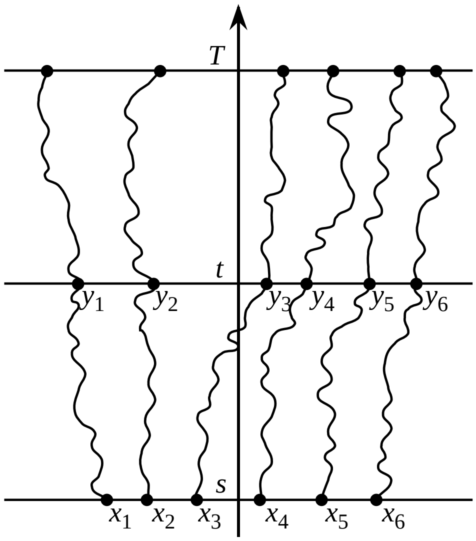

図 1.2.2: 時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動

注意すべき点は，$\mathbf{X}(t)$ の遷移確率密度は (1.2.5) 式で与えられるように, 時間間隔 $t-s$ だけの関数ではなく，$T-t$ や $T-s$ にも依存していることである．これは，粒子の非衝突条件を課した時間が $[0,T]$ という有限時間であるためであり，この確率過程は時間の並進に対して一様ではないことを意味している．そこで我々は $\mathbf{X}(t)$ を $[0,T]$ での**時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動**とよぶことにする [6, 7].

この時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動の遷移確率密度は，次の方程式を満たすことを示すことが出来る [6, 7].

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,y) = \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{x}} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) + \mathbf{b}^T(t;\mathbf{x})\cdot\nabla_{\mathbf{x}} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) \tag{1.2.9}$$

ただしここで，$\mathbf{b}^T(t,\mathbf{x})$ は各成分が

$$b_j^T(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\ln\mathcal{N}_N(T-t;\mathbf{x}), \qquad j=1,2,\cdots,N, \tag{1.2.10}$$

で与えられるベクトル $\mathbf{b}^T(t,\mathbf{x}) = \Big(b_1^T(t,\mathbf{x}), b_2^T(t,\mathbf{x}),\cdots,b_N^T(t,\mathbf{x})\Big)$ である．これは，**Kolmogorov の後退方程式** (あるいは **Fokker-Planck の後退方程式**) とよばれる．これ対応して，非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t)$ の確率微分方程式は

$$dX_i(t) = dB_i(t) + b_i^T(t,\mathbf{X}(t))dt, \quad t\in[0,T],\ i=1,2,\cdots,N \tag{1.2.11}$$

という形であることが導かれる．しかし，粒子間の相互作用を表す肝心のドリフト項は (1.2.4) を用いて

$$b_i^T(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\ln\mathcal{N}_N(T-t,\mathbf{x}), \quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.2.12}$$

と書けることしか分からず，これから直接的に得られる情報は少ない．

1.3 漸近評価とその応用

このノートでは，**Vandermonde の行列式**を

$$
\begin{aligned}
h_N(\mathbf{x}) &= \det_{1\le j,k\le N}\left[x_k^{j-1}\right] \\
&= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\
x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_N^2 \\
 & & \cdots & \cdots & \\
x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

と書くことにする．次が成り立つ．

$$
h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1\le j<k\le N}(x_k - x_j) \tag{1.3.2}
$$

問題 1.3.1 等式 (1.3.2) を証明しなさい．

f_N と $\mathcal{N}_N$ に対して，次の漸近評価が得られる．(ただし $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2$ である．)

$\dfrac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \to 0$ において

$$
f_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) h_N(\mathbf{y}) e^{-|\mathbf{y}|^2/2t} \times \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right)\right\}, \tag{1.3.3}
$$

$$
\mathcal{N}_N(t;\mathbf{x}) = \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) \times \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right)\right\}. \tag{1.3.4}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
C_1(N) &= (2\pi)^{N/2}\prod_{j=1}^N \Gamma(j), \\
C_2(N) &= 2^{N/2}\prod_{j=1}^N \Gamma(j/2),
\end{aligned}
\tag{1.3.5}
$$

ただし $\Gamma(x)$ は Gamma 関数

$$
\Gamma(x) = \int_0^\infty dy\, y^{x-1} e^{-y}. \quad (\text{ただし} \quad \mathrm{Re}\, x > 0) \tag{1.3.6}
$$

である．

これらの導出は [5, 8, 9] を参照．ここでは，この漸近評価の応用を述べる．

応用 1 初期配置 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_<^N$ を固定すると，$t \to \infty$ で $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \to 0$ なので，(1.3.4) より

$$
\psi_N = \frac{1}{4}N(N-1) \tag{1.3.7}
$$

として

$$
\mathcal{N}_N(t;\mathbf{x}) \sim t^{-\psi_N} \quad \text{in} \quad t \to \infty \tag{1.3.8}
$$

が結論される．つまり非衝突確率 ($\mathbb{R}_<^N$ 中の吸収壁ブラウン運動の生存確率) は，時間の関数として長時間では冪乗的に減衰し，その指数は粒子数の 2 時間数である．

応用 2　$g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})$ で特に $s=0$ とする．そして $\mathbf{x}\to\mathbf{0}\equiv(0,0,\cdots,0)$ の極限をとることができる．その結果は

$$\begin{aligned} g_{N,T}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}) &\equiv \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} g_{N,T}(0,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) \\ &= \frac{T^{N(N-1)/4}t^{-N^2/2}}{C_2(N)} e^{-|\mathbf{y}|^2/2t} h_N(\mathbf{y})\mathcal{N}_N(T-t;\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

である．図 1.3.1 に，初期状態 $\mathbf{0}$ からスタートした時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t), t\in(0,T]$ の模式図を示した．

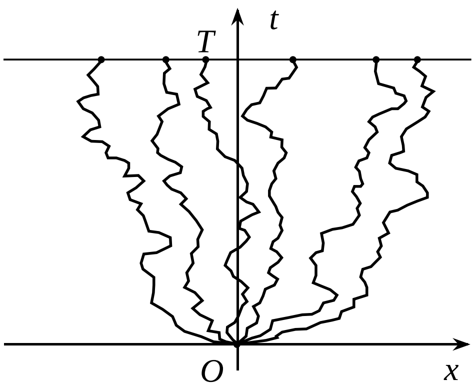

図 1.3.1: 初期状態 $\mathbf{0}$ からスタートした時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t), t\in(0,T]$.

応用 3　パラメータ T を無限大として非衝突条件を課す時間を無限区間とする：

$$[0,T] \quad\to\quad [0,\infty).$$

このときの $0\le s\le t<\infty$ の遷移確率密度は

$$\begin{aligned} p_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) &\equiv \lim_{T\to\infty} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})h_N(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_<,\, 0\le s\le t<\infty, \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

となることが示せる．これは $t-s$ のみの関数なので，$T\to\infty$ の極限でこの確率過程は時間的に斉次となることが分かる．また，(1.3.3) より，

$$\begin{aligned} p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{0}) &\equiv \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y})^2, \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

であることも分かる．

$h_N(\mathbf{x})$ は調和関数であり，(1.3.10) は $\mathbb{R}^N_<$ 内の吸収壁ブラウン運動 f_N の (Doob の意味での) **優調和変換 (h-変換)** に他ならない [1]．我々は, 上の**応用 3** の極限で得られた (1.3.10) を遷移確率密度として

もつ確率過程を $\mathbf{Y}(t)=(Y_1(t),Y_2(t),\cdots,Y_N(t)), t\in[0,\infty)$ と書き，**時間的に斉次な非衝突ブラウン運動**とよぶことにする．

$$b_j(\mathbf{x})=(\partial/\partial x_j)\ln h_N(\mathbf{x}),\quad j=1,2,\cdots,N$$

としたとき，p_N が次の形の **Kolmogorov の後退方程式 (Fokker-Planck の後退方程式)** を満たすことは容易に確かめることが出来る．

$$\frac{\partial}{\partial t}p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x})=\frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{x}}p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x})+\mathbf{b}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x}). \tag{1.3.12}$$

$b_j(\mathbf{x})=\sum_{k:1\le k\le N,k\neq j}(x_j-x_k)^{-1}$ であるから，(1.3.12) に対応して $\mathbf{Y}(t)$ が次の確率微分方程式を満たすことが導かれる，

$$dY_j(t)=dB_j(t)+\sum_{k:1\le k\le N,k\neq j}\frac{1}{Y_j(t)-Y_k(t)}dt,\quad t\in[0,\infty),\ j=1,2,\cdots,N. \tag{1.3.13}$$

ただし，$B_j(t), j=1,2,\cdots,N$ は N 個の互いに独立な 1 次元ブラウン運動である．従ってこの N 粒子確率過程 $\mathbf{Y}(t)$ は，すべての粒子対の間に粒子間距離に反比例した大きさをもって働く斥力をドリフト項として持つ**拡散過程**である．これは **Dyson のブラウン運動模型** のパラメター $\beta=2$ の場合と等しい [2].

<u>**注 1.3.1**</u>　$p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{x})$ は，平均が零，分散 $\sigma^2=t$ の $N\times N$ のランダムなエルミート行列からなる統計集団（これを**ガウス型ユニタリ集団 (Gaussian unitary ensemble, GUE)** とよぶ) GUE の固有値分布の確率密度に等しい．ランダム行列については [11, 12] を参照せよ．

非衝突ブラウン運動を考えるとき，これまでは粒子に順番付けがなされているものとしたが，以下ではこの順番付けをしないことにする．$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N_<$ というように N 成分ベクトルで粒子配置を書くと，ベクトルの何番目の成分であるかという意味で粒子に番号付けがなされていることになる．しかし，この順番付けをなくして $\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ というように集合として配置を表すという意味である．一般に $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\mathbb{R}^{\ell}$ に対して，$\{x_i\}_{i=1}^n$ を $\{\mathbf{x}\}$ と書くことにする．$\mathfrak{X}$ を加算個の点の集合で集積点を持たないもの全体の空間とすると，$\{\mathbf{x}\}$ はこの元であり，非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t\in[0,T]$ は遷移確率密度が次式で与えられる $\mathfrak{X}$-値拡散過程となる．

$$\mathfrak{g}_{N,T}(s,\{\mathbf{x}\};t,\{\mathbf{y}\})=\begin{cases} g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}), & 0<s\le t\le T,\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_< \text{ の場合}, \\ g_{N,T}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}), & s=0, 0<t\le T,\ \{\mathbf{x}\}=\{0\},\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_< \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他の場合}. \end{cases} \tag{1.3.14}$$

第2章　時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 I: 1 時刻の場合

2.1　相関関数と特性関数

本章では，1.3.3 節の**応用 3** で得られた時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{Y}(t)$ を考えることにする．ただし，$\mathbf{Y}(0)=\mathbf{0}$ とする．遷移確率密度は

$$
\begin{aligned}
p_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{1}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_<,\ 0<s\le t<\infty, \\
p_N(t;\mathbf{y}|\mathbf{0}) &= \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h_N(\mathbf{y})^2, \quad \mathbf{y}\in\mathbb{R}^N_<,\ 0<t<\infty
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

である．また，本章では $0<t<\infty$ なる 1 時刻 t での粒子分布だけを取り扱うことにする．このときの粒子分布の確率密度を

$$
\hat{p}^t_N(\{\mathbf{x}\}) = \begin{cases} p_N(t;\mathbf{x}|\mathbf{0}), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N_< \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他の場合}. \end{cases}
\tag{2.1.2}
$$

と書くことにする．また，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ と $N'=1,2,\cdots,N$ に対して，$\mathbf{x}_{N'}=(x_1,x_2,\cdots,x_{N'})$ とする．

(1 時刻)N' 点相関関数は次式で定義される．

$$
\rho^t_N(\{\mathbf{x}_{N'}\}) = \frac{1}{(N-N')!}\int_{\mathbb{R}^{N-N'}} \prod_{j=N'+1}^{N} dx_j\, \hat{p}^t_N(\{\mathbf{x}\}).
\tag{2.1.3}
$$

また時刻 t での**特性関数**は，$C_0(\mathbb{R})$ をコンパクトな台を持つ連続な実関数全体の集合としたとき，$f\in\mathbb{C}_0(\mathbb{R}),\theta\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Psi^t_N(f;\theta) &\equiv \mathbf{E}^t_N\left[e^{\theta\sum_{j=1}^N f(Y_j(t))}\right] \\
&= \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\, e^{\theta\sum_{j=1}^N f(x_j)} \hat{p}^t_N(\{\mathbf{x}\})
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

で定義される．この特性関数の導関数として，さまざまな期待値 (モーメント) が計算できる．例えば

$$
\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi^t_N(f;\theta)\right|_{\theta=0} = \mathbf{E}^t_N\left[\sum_{j=1}^N f(Y_j(t))\right]
$$

であるが，ここで特に $f(x)=x$ とすると，N 粒子の平均位置 $\mathbf{E}^t_N\left[\sum_{j=1}^N Y_j(t)\right]$ が得られる．(いまの場合，これは零である．) また，$f(x)=x^2$ の場合には位置についての 2 次のモーメント $\mathbf{E}^t_N\left[\sum_{j=1}^N Y_j^2(t)\right]$ が得られる．

注 2.1.1 一般に，条件 ω に対してその**指示関数 (indicator function)** を

$$\mathbf{1}_{\{\omega\}} = \begin{cases} 1, & \text{条件 } \omega \text{ が満たされる場合}, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.1.5}$$

とする．$[a,b] \in \mathbb{R}$ のとき

$$f(x) = \mathbf{1}_{\{x \in [a,b]\}} \tag{2.1.6}$$

とすると，

$$e^{\theta f(x)} = \begin{cases} e^{\theta}, & \mathbf{x} \in [a,b] \text{ の場合}, \\ 1, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to -\infty} e^{\theta f(x)} &= \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in [a,b] \text{ の場合}, \\ 1, & \text{その他の場合} \end{cases} \\ &= 1 - \mathbf{1}_{\{x \in [a,b]\}} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

である．

以下では

$$\chi(x) = 1 - e^{\theta f(x)} \tag{2.1.8}$$

として，特性関数を χ の汎関数と見なしてこれを $\Psi_N^t[\chi]$ と書くことにする．

$$e^{\theta \sum_{j=1}^N f(x_j)} = \prod_{j=1}^N (1 - \chi(x_j))$$

に対して 2 項展開を行うと

$$\begin{aligned} \Psi_N^t[\chi] &= \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) \prod_{j=1}^N (1 - \chi(x_j)) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{N'=0}^N \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{N'} \le N} (-1)^{N'} \int_{\mathbb{R}^{N'}} \prod_{k=1}^{N'} \Big\{ dx_{j_k} \chi(x_{j_k}) \Big\} \\ &\qquad \times \int_{\mathbb{R}^{N-N'}} \prod_{1 \le \ell \le N : \ell \notin \{j_1, j_2, \cdots, j_{N'}\}} dx_\ell\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{N'=0}^N \frac{N!}{N'!(N-N')!} (-1)^{N'} \int_{\mathbb{R}^{N'}} \prod_{k=1}^{N'} \Big\{ dx_{j_k} \chi(x_{j_k}) \Big\} \int_{\mathbb{R}^{N-N'}} \prod_{\ell=N'+1}^N dx_\ell\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \sum_{N'=0}^N (-1)^{N'} \frac{1}{N'!} \int_{\mathbb{R}^{N'}} \prod_{j=1}^{N'} \Big\{ dx_j \chi(x_j) \Big\} \rho_N^t(\{\mathbf{x}_{N'}\}) \end{aligned}$$

となる．すなわち，特性関数と相関関数を関係付ける次の展開公式が得られる．

$$\Psi_N^t[\chi] = \sum_{N'=0}^N (-1)^{N'} \int_{\mathbb{R}_<^{N'}} \prod_{j=1}^{N'} \Big\{ dx_j \chi(x_j) \Big\} \rho_N^t(\{\mathbf{x}_{N'}\}). \tag{2.1.9}$$

2.2　行列式表示

熱核は

$$G(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}$$

で与えられていたので，これを用いて表わすと

$$p_N(t; \mathbf{x}|\mathbf{0}) = \frac{t^{-N(N-1)/2}}{\widetilde{C}_1(N)} \prod_{j=1}^{N} G(t; x_j|0) h_N(\mathbf{x})^2 \tag{2.2.1}$$

となる．ただしここで，$\widetilde{C}_1(N) = \prod_{j=1}^{N} \Gamma(j)$ である．

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$M_n(x)$ を x の n 次多項式

$$M_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{n\,j} x^j, \quad \text{ただし} \quad b_{n\,n} \neq 0 \tag{2.2.2}$$

とする．行列式の多重線形性と，行列式は行列の基本変形で変わらないことから，Vandermonde 行列式 (1.3.1) が

$$\begin{aligned} h_N(\mathbf{x}) &= \det_{1 \le j,k \le N} \left[x_k^{j-1} \right] \\ &= \left\{ \prod_{k=1}^{N} b_{k-1\,k-1} \right\}^{-1} \det_{1 \le j,k \le N} \left[M_{j-1}(x_k) \right] \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

と書き直せることが分かる．

問題 2.2.1　行列式の定義 (A.1.1) より，次が成り立つことを示しなさい．

$$\begin{aligned} \det_{1 \le j,k \le N} \left[a_{jk} b_k \right] &= \det_{1 \le j,k \le N} \left[b_j a_{jk} \right] \\ &= \prod_{\ell=1}^{N} b_\ell \times \det_{1 \le j,k \le N} \left[a_{jk} \right]. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

問題 2.2.2　等式 (2.2.3) を証明しなさい．

従って，

$$\begin{aligned} p_N(t; \mathbf{x}|\mathbf{0}) &= \frac{t^{-N(N-1)/2}}{\widetilde{C}_1(N)} \left\{ \prod_{p=1}^{N} b_{k-1\,k-1} \right\}^{-2} \det_{1 \le j,k \le N} \left[M_{j-1}(x_k) \right] \prod_{\ell=1}^{N} G(t, x_\ell|0) \det_{1 \le m,n \le N} \left[M_{m-1}(x_n) \right] \\ &= \frac{t^{-N(N-1)/2}}{\widetilde{C}_1(N)} \left\{ \prod_{p=1}^{N} b_{k-1\,k-1} \right\}^{-2} \det_{1 \le j,k \le N} \left[M_{j-1}(x_k) G(t, x_k|0) \right] \det_{1 \le m,n \le N} \left[M_{m-1}(x_n) \right] \end{aligned}$$

であるから，

$$\Psi_N^t[\chi] = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) \prod_{j=1}^{N} (1 - \chi(x_j))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N!}\frac{t^{-N(N-1)/2}}{\widetilde{C}_1(N)}\left\{\prod_{p=1}^{N} b_{k-1}\right\}^{-2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\Big[M_{j-1}(x_k)G(t,x_k|0)(1-\chi(x_k))\Big] \det_{1\le \ell,m\le N}\Big[M_{\ell-1}(x_m)\Big] \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

と書き直せる．ここで、関数 $\chi(x)$ を恒等的に零の関数とすると

$$
\Psi_N^t[0] = \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) = 1
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
Z_N^t[\chi] &= \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\Big[M_{j-1}(x_k)G(t;x_k|0)(1-\chi(x_k))\Big] \det_{1\le \ell,m}\Big[M_{\ell-1}(x_m)\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\Big[M_{j-1}(x_k)G(t;x_k|0)(1-\chi(x_k))\Big] \det_{1\le \ell,m}\Big[M_{\ell-1}(x_m)\Big] \qquad (2.2.6)
\end{aligned}
$$

と定義すると，

$$
\Psi_N^t[\chi] = \frac{Z_N^t[\chi]}{Z_N^t[0]} \qquad (2.2.7)
$$

という表式が得られる．

ここで 2 乗可積分な関数 $\phi_j, \bar{\phi}_j, 1 \le j \le N$ に対して成り立つ **Heine の公式**

$$
\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\Big[\phi_j(x_k)\Big] \det_{1\le \ell,m\le N}\Big[\bar{\phi}_\ell(x_m)\Big] = \det_{1\le j,k\le N}\Big[\int_{\mathbb{R}} dx\, \phi_j(x)\bar{\phi}_k(x)\Big]
$$

を用いると (付録を参照)，

$$
\begin{aligned}
Z_N^t[\chi] &= \det_{1\le j,k\le N}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, M_{j-1}(x)G(t;x|0)(1-\chi(x))M_{k-1}(x)\Big] \\
&= \det_{1\le j,k\le N}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, M_{j-1}(x)G(t;x|0)M_{k-1}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, M_{j-1}(x)G(t;x|0)\chi(x)M_{k-1}(x)\Big]
\end{aligned}
$$

と書き直せる．そこで，

$$
\begin{aligned}
(A_0)_{jk} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, M_{j-1}(x)G(t;x|0)M_{k-1}(x), \qquad (2.2.8) \\
(A_1[\chi])_{jk} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, M_{j-1}(x)G(t;x|0)\chi(x)M_{k-1}(x) \qquad (2.2.9)
\end{aligned}
$$

として，$N\times N$ の行列 $A_0 = \Big((A_0)_{jk}\Big)_{j,k=1,2,\cdots,N}$, $A_1[\chi] = \Big((A_1[\chi])_{jk}\Big)_{j,k=1,2,\cdots,N}$ を導入する．$M_j(x)$ の定義より，A_0 は正則な行列であり，逆行列 A_0^{-1} が存在する．従って

$$
\begin{aligned}
\Psi_N^t[\chi] &= \frac{\det_{1\le j,k\le N}\Big[(A_0)_{jk} - (A_1[\chi])_{jk}\Big]}{\det_{1\le j,k\le N}\Big[(A_0)_{jk}\Big]} \\
&= \det_{1\le j,k\le N}\Big[\delta_{jk} - (A_0^{-1}A_1[\chi])_{jk}\Big] \qquad (2.2.10)
\end{aligned}
$$

が得られる．

2.3 フレドホルム行列式と行列式相関関数

前節の最後の表式 (2.2.10) に現れた $(A_0^{-1}A_1[\chi])_{jk}$ は次のように書き直せる.

$$
\begin{aligned}
(A_0^{-1}A_1[\chi])_{jk} &= \sum_{\ell=1}^{N}(A_0^{-1})_{j\ell}(A_1[\chi])_{\ell k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{N}(A_0^{-1})_{j\ell}\int_{-\infty}^{\infty}dx\, M_{\ell-1}(x)G(t,x|0)\chi(x)M_{k-1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx\sum_{\ell=1}^{N}(A_0^{-1})_{j\ell}M_{\ell-1}(x)G(t,x|0)\chi(x)M_{k-1}(x).
\end{aligned}
$$

そこで,

$$
\begin{aligned}
B_j(x) &= \sum_{\ell=1}^{N}(A_0^{-1})_{j\ell}M_{\ell-1}(x)\sqrt{G(t,x|0)}\chi(x), && (2.3.1)\\
C_k(x) &= M_{k-1}(x)\sqrt{G(t,x|0)} && (2.3.2)
\end{aligned}
$$

とおくと,

$$
(A_0^{-1}A_1[\chi])_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty}dx\, B_j(x)C_k(x) \qquad (2.3.3)
$$

という形になる. 従って (2.2.10) は

$$
\Psi_N^t[\chi] = \det_{1\le j,k\le N}\left[\delta_{jk} - \int_{-\infty}^{\infty}dx\, B_j(x)C_k(x)\right] \qquad (2.3.4)
$$

と書ける.

フレドホルムの展開公式 (A.1.6) を

$$
\begin{aligned}
F_{j_\ell j_m} &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\, B_{j_\ell}(x)C_{j_m}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx_{j_\ell}\, B_{j_\ell}(x_{j_\ell})C_{j_m}(x_{j_\ell}) && (2.3.5)
\end{aligned}
$$

として (2.3.4) に適用することを考える.

問題 2.3.1 フレドホルムの展開公式 (A.1.6) が確かに成り立つことを, $n=3$ の場合に示しなさい. (一般の n に対する証明も考えてみなさい.)

行列式の定義 (A.1.1) より, 各項は

$$
\begin{aligned}
\det_{1\le\ell,m\le k}\left[F_{j_\ell j_m}\right] &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{\ell=1}^{k}F_{j_\ell j_{\sigma(\ell)}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{\ell=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}dx_{j_\ell}\, B_{j_\ell}(x_{j_\ell})C_{j_{\sigma(\ell)}}(x_{j_\ell}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{\ell=1}^{k}dx_{j_\ell}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{\ell=1}^{k}B_{j_\ell}(x_{j_\ell})C_{j_{\sigma(\ell)}}(x_{j_\ell}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{\ell=1}^{k}dx_{j_\ell}\det_{1\le\ell,m\le k}\left[B_{j_\ell}(x_{j_\ell})C_{j_m}(x_{j_\ell})\right] && (2.3.6)
\end{aligned}
$$

と書き直せるので，

$$\Psi_N^t[\chi] = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} D_k$$

ただし，

$$D_k = \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_k} \det_{1\le \ell, m\le k} \Big[B_{j_\ell}(x_{j_\ell}) C_{j_m}(x_{j_\ell}) \Big]$$

となる．ここで，行列式の巡回置換の積の和による表示 (A.1.4) を用いると

$$\begin{aligned} D_k = \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^{k-\ell(\sigma)} \\ \times \prod_{\mathsf{c}=1}^{\ell(\sigma)} \Big[(B_a(x_a)C_b(x_a))(B_b(x_b)C_c(x_b)) \cdots (B_\beta(x_\beta)C_a(x_\beta)) \Big] \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

と書ける．積の中身は巡回的なので，

$$\begin{aligned} &(B_a(x_a)C_b(x_a))(B_b(x_b)C_c(x_b)) \cdots (B_\beta(x_\beta)C_a(x_\beta)) \\ &= (C_b(x_a)B_b(x_b))(C_c(x_b)B_c(x_c)) \cdots (C_a(x_\beta)B_a(x_a)) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

である．これを用いて (2.3.7) を書き直し，さらに和を積分の前にとることにすると，

$$\begin{aligned} D_k &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^{k-\ell(\sigma)} \prod_{\mathsf{c}=1}^{\ell(\sigma)} \left[\left(\sum_{b=1}^{N} C_b(x_a) B_b(x_b) \right) \left(\sum_{c=1}^{N} C_c(x_b) B_c(x_c) \right) \cdots \left(\sum_{a=1}^{N} C_a(x_\beta) B_a(x_a) \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{j_k} \det_{1\le \ell, m \le k} \left[\sum_{j=1}^{N} C_j(x_{j_\ell}) B_j(x_{j_m}) \right] \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

となる．ここで (A.1.4) を用いた．

(2.3.1) と (2.3.2) より，

$$\sum_{j=1}^{N} C_j(x) B_j(y) = \sum_{j=1}^{N} M_{j-1}(x) \sqrt{G(t,x|0)} \sum_{k=1}^{N} (A_0^{-1})_{jk} M_{k-1}(y) \sqrt{G(t,y|0)} \chi(y)$$

なので，以下では

$$K_N^t(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} M_{j-1}(x) \sqrt{G(t,x|0)} (A_0^{-1})_{jk} M_{k-1}(y) \sqrt{G(t,y|0)} \tag{2.3.10}$$

として，これに χ を掛けたものを

$$K_N^t[\chi](x,y) = K_N^t(x,y)\chi(y) \tag{2.3.11}$$

と書くことにする．すると，上の計算から次が得られたことになる．

$$\Psi_N^t[\chi] = \det_{1\le j,k \le N} \left[\delta_{jk} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \, B_j(x) C_k(x) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_k \det_{1\le \ell,m\le k}\Big[K_N^t[\chi](x_\ell,x_m)\Big] \\
&= \quad 1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\int_{\mathbb{R}^k_<}d\mathbf{x}_k \det_{1\le \ell,m\le k}\Big[K_N^t[\chi](x_\ell,x_m)\Big]. \qquad (2.3.12)
\end{aligned}
$$

これをフレドホルムの展開公式 (A.1.6) と見比べると，

$$
\text{和} \quad \sum_{j_\ell=1}^{n} \quad \Longrightarrow \quad \text{積分} \quad \int_{-\infty}^{\infty}dx_\ell
$$

と置き換わったものであることが分かる．そこで

$$
\text{行列} \quad F_{jk} \quad \Longrightarrow \quad \text{積分核} \quad K_N^t[\chi](x,y)
$$

として

$$
\Psi_N^t[\chi]=\mathrm{Det}_{x,y\in\mathbb{R}}\Big[\delta(x-y)-K_N^t[\chi](x,y)\Big] \qquad (2.3.13)
$$

あるいは

$$
\Psi_N^t[\chi]=\mathrm{Det}\Big[1-K_N^t[\chi]\Big] \qquad (2.3.14)
$$

と書くことにする．これを**フレドホルムの行列式**という．

ここで (2.3.11) であるから，(2.3.12) において

$$
\det_{1\le \ell,m\le k}\Big[K_N^t[\chi](x_\ell,x_m)\Big]=\prod_{j=1}^{k}\chi(x_j)\det_{1\le \ell,m\le k}\Big[K_N^t(x_\ell,x_m)\Big] \qquad (2.3.15)
$$

であるから，これは

$$
\Psi_N^t[\chi]=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\int_{\mathbb{R}^k_<}d\mathbf{x}_k\prod_{j=1}^{k}\chi(x_j)\det_{1\le \ell,m\le k}\Big[K_N^t(x_\ell,x_m)\Big] \qquad (2.3.16)
$$

と書ける．任意の関数 χ に対して，これは (2.1.9) と等しいので，

$$
\rho_N^t(\{\mathbf{x}_{N'}\})=\det_{1\le j,k\le N'}\Big[K_N^t(x_j,x_k)\Big], \quad 1\le N'\le N \qquad (2.3.17)
$$

が成立することになる．特に 1 点の相関関数に対しては，

$$
\rho_N^t(\{x\})=K_N^t(x,x) \qquad (2.3.18)
$$

である．つまり，任意の相関関数が $K_N^t(\cdot,\cdot)$ という関数から生成される行列式で表わされることが示されたことになる．このような系は**フェルミオン点過程**あるいは **determinantal 過程**とよばれる．

2.4 エルミート直交関数と行列核

(2.2.8) より

$$
\begin{aligned}
(A_0)_{jk} &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\, M_{j-1}(x)G(t,x|0)M_{k-1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx\, M_{j-1}(x)\frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}M_{k-1}(x)
\end{aligned}
\qquad (2.4.1)
$$

であるから，$x/\sqrt{2t}=\xi$ とおくと $dx=\sqrt{2t}d\xi$ より

$$(A_0)_{jk}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\, M_{j-1}(\sqrt{2t}\,\xi)M_{k-1}(\sqrt{2t}\,\xi)e^{-\xi^2} \tag{2.4.2}$$

を得る．

そこで以後

$$M_j(x)=H_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right),\quad j=0,1,2,\cdots \tag{2.4.3}$$

と定めることにする．ここで $H_j(x)$ は**エルミート多項式**

$$\begin{aligned}H_j(x) &= e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^j e^{-x^2}\\ &= j!\sum_{k=1}^{[j/2]}(-1)^k\frac{(2x)^{j-2k}}{k!(j-2k)!},\quad j=0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

である．これは

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-x^2}H_j(x)H_k(x)=h_j\delta_{jk} \tag{2.4.5}$$

ただし

$$h_j=2^j j!\sqrt{\pi} \tag{2.4.6}$$

という**直交関係**を満たす．従って，(2.4.3) と定めると

$$\begin{aligned}(A_0)_{jk} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\, H_{j-1}(\xi)H_{k-1}(\xi)e^{-\xi^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}h_j\delta_{jk}\\ &= 2^{j-1}(j-1)!\delta_{jk}\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

というように，行列 $A_0=((A_0)_{jk})$ は対角化されることになる．よってこのとき，この逆行列は

$$(A_0^{-1})_{jk}=\frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\delta_{jk} \tag{2.4.8}$$

というように簡単に求められる．

以上の結果を (2.3.10) に代入すると

$$\begin{aligned}K_N^t(x,y) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}M_{j-1}(x)\sqrt{G(t,x|0)}(A_0^{-1})_{jk}M_{k-1}(y)\sqrt{G(t,y|0)}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}H_{j-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\sqrt{\frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}}\frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\delta_{jk}H_{k-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right)\sqrt{\frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{2^j j!\sqrt{\pi}}}\exp\Big\{-(x/\sqrt{2t})^2/2\Big\}H_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\frac{1}{\sqrt{2^j j!\sqrt{\pi}}}\exp\Big\{-(y/\sqrt{2t})^2/2\Big\}H_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right)\end{aligned}$$

よって，

$$\varphi_j(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2^j j!\sqrt{\pi}}}e^{-\xi^2/2}H_j(\xi),\quad j=0,1,2,\cdots \tag{2.4.9}$$

とおけば

$$K_N^t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right) \tag{2.4.10}$$

となる．(2.4.9) は (2.4.5), (2.4.6) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \varphi_j(\xi)\varphi_k(\xi) = \delta_{jk} \tag{2.4.11}$$

を満たす**正規直交関数系**をなす．これは**エルミート直交関数**とよばれる．

従って，(2.3.18) より 1 点相関関数は

$$\rho_N^t(\{\mathbf{x}\}) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j^2\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \tag{2.4.12}$$

と書けることになる．

問題 2.4.1　1 点相関関数を位置 x について全域で積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_N^t(\{x\})dx = N \tag{2.4.13}$$

となることを示しなさい．

2.5 Christoffel-Darboux の公式

エルミート多項式は次の漸化式を満たす．

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}, & (2.5.1)\\ H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots. & (2.5.2) \end{aligned}$$

ただし，$' = \dfrac{d}{dx}$ である．次が成立する．

Chiristoffel-Darboux の公式

$x \neq y$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\varphi_N(x)\varphi_{N-1}(y) - \varphi_{N-1}(x)\varphi_N(y)}{x-y} \tag{2.5.3}$$

が成り立つ．

証明

N についての数学的帰納法で証明する．

(i)　$N = 1$ のとき，$\varphi_0(x) = e^{-x^2/2}$ より

$$(\mathrm{LHS}) = \varphi_0(x)\varphi_0(y) = e^{-x^2/2-y^2/2}.$$

他方，$\varphi_1(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2/2}$ より

$$\begin{aligned}
\text{(RHS)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\varphi_1(x)\varphi_0(y) - \varphi_0(x)\varphi_1(y)}{x-y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,(x-y)}\Big\{\sqrt{2}xe^{-x^2/2-y^2/2} - \sqrt{2}ye^{-x^2/2-y^2/2}\Big\} \\
&= e^{-x^2/2-y^2/2}.
\end{aligned}$$

従って, (2.5.3) は $N=1$ のとき成立する．

(ii)　ある $N \geq 1$ に対して, (2.5.3) が成立すると仮定する．(2.4.9) なので

$$\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_n(x)\varphi_n(y) = \frac{e^{-x^2/2-y^2/2}}{2^N(N-1)!\sqrt{\pi}} \times \frac{H_N(x)H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x)H_N(y)}{x-y} \tag{2.5.4}$$

である．ここで (2.5.1) より

$$H_{N-1}(x) = \frac{1}{2N}\Big\{2xH_N(x) - H_{N+1}(x)\Big\}$$

なので,

$$\begin{aligned}
& H_N(x)H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x)H_N(y) \\
=\ & -\frac{1}{N}(x-y)H_N(x)H_N(y) + \frac{1}{2N}(H_{N+1}(x)H_N(y) - H_N(x)H_{N+1}(y))
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
& \Big\{(2.5.4)\ \text{の右辺}\Big\} \\
=\ & -\frac{e^{-x^2/2-y^2/2}}{2^N N!\sqrt{\pi}}H_N(x)H_N(y) + \frac{e^{-x^2/2-y^2/2}}{2^{N+1}N!\sqrt{\pi}} \times \frac{H_{N+1}(x)H_N(y) - H_N(x)H_{N+1}(y)}{x-y} \\
=\ & -\varphi_N(x)\varphi_N(y) + \sqrt{\frac{N+1}{2}}\frac{\varphi_{N+1}(x)\varphi_N(y) - \varphi_N(x)\varphi_{N+1}(y)}{x-y},
\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{n=0}^{N}\varphi_N(x)\varphi_N(y) = \sqrt{\frac{N+1}{2}}\frac{\varphi_{N+1}(x)\varphi_N(y) - \varphi_N(x)\varphi_{N+1}(y)}{x-y}$$

が得られる．これは (2.5.3) が $N \to N+1$ としても成り立つことを意味する．∎

一般に

$$F(x,y) = \frac{A(x)B(y) - B(x)A(y)}{x-y} \tag{2.5.5}$$

と書けるとき,

$$F(x,y) = \frac{1}{x-y}\Big\{(A(x)-A(y))B(y) - (B(x)-B(y))A(y)\Big\}$$

なので,

$$\begin{aligned}
F(x,x) &= \lim_{y\to x}F(x,y) \\
&= A'(x)B(x) - B'(x)A(x)
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

となる．

　これを (2.5.3) に適用すると

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n^2(x) = \sqrt{\frac{N}{2}} \Big\{ \varphi'_N(x)\varphi_{N-1}(x) - \varphi'_{N-1}(x)\varphi_N(x) \Big\} \tag{2.5.7}$$

が得られる．ここで，(2.5.2) を用いると

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} H_n(x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \Big\{ -x e^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H'_n(x) \Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \Big\{ -x e^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} \times 2n H_{n-1}(x) \Big\} \qquad (2.5.8) \\ &= -x\varphi_n(x) + \sqrt{2n}\varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

が得られる．或いは (2.5.8) のところで (2.5.1) を用いると

$$\varphi'_n(x) = x\varphi_n(x) - \sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1}(x) \tag{2.5.9}$$

が得られる．

問題 2.5.1　(2.5.9) を示しなさい．

　まとめると次のようになる．

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x) &= -x\varphi_n(x) + \sqrt{2n}\varphi_{n-1}(x) \qquad (2.5.10) \\ &= x\varphi_n(x) - \sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1}(x). \qquad (2.5.11) \end{aligned}$$

　ここでは (2.5.11) の方を用いると

$$\begin{aligned} &\Big\{ (2.5.7) \text{ の右辺} \Big\} \\ = &\sqrt{\frac{N}{2}} \left[\Big\{ x\varphi_N(x) - \sqrt{2(N+1)}\varphi_{N+1}(x) \Big\} \varphi_{N-1}(x) - \Big\{ x\varphi_{N-1}(x) - \sqrt{2N}\varphi_N(x) \Big\} \varphi_N(x) \right] \\ = &N\varphi_N^2(x) - \sqrt{N(N+1)}\varphi_{N+1}(x)\varphi_{N-1}(x) \end{aligned}$$

となることが分かる．つまり

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n^2(x) = N\varphi_N^2(x) - \sqrt{N(N+1)}\varphi_{N+1}(x)\varphi_{N-1}(x) \tag{2.5.12}$$

という公式が得られる．

　以上より，行列値相関関数の核 (2.4.10) に対して，次の表現が得られる．

$$\begin{aligned} K_N^t(x,y) &= \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\varphi_N(x/\sqrt{2t})\varphi_{N-1}(y/\sqrt{2t}) - \varphi_{N-1}(x/\sqrt{2t})\varphi_N(y/\sqrt{2t})}{x-y}, \\ &\qquad (x \neq y \text{ のとき}) \qquad (2.5.13) \\ K_N^t(x,x) &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \left\{ N\varphi_N^2\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) - \sqrt{N(N+1)}\varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\varphi_{N+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \right\}. \qquad (2.5.14) \end{aligned}$$

2.6 特性関数の対数

(2.3.12) より

$$I_k[\chi] = \int_{\mathbb{R}^k} d\mathbf{x}_k \det_{1\le j,k\le N} \Big[K_N^t[\chi](x_j, x_k) \Big] \tag{2.6.1}$$

とすると

$$\Psi_N^t[\chi] = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} I_k[\chi] \tag{2.6.2}$$

である．

$N=3$ の場合を調べてみることにする．このとき (2.6.2) は

$$\Psi_3^t[\chi] = 1 - \Big(I_1[\chi] - \frac{1}{2} I_2[\chi] + \frac{1}{6!} I_3[\chi] \Big)$$

であるから，対数関数のテイラー展開の公式

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{2.6.3}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\log \Psi_3^t[\chi] \\
=\ & -\Big(I_1[\chi] - \frac{1}{2} I_2[\chi] + \frac{1}{6!} I_3[\chi] \Big) - \frac{1}{2}\Big(I_1[\chi] - \frac{1}{2} I_2[\chi] + \frac{1}{6!} I_3[\chi] \Big)^2 - \frac{1}{3}\Big(I_1[\chi] - \frac{1}{2} I_2[\chi] + \frac{1}{6!} I_3[\chi] \Big)^3 \\
=\ & -I_1[\chi] + \frac{1}{2}\Big\{ I_2[\chi] - I_1^2[\chi] \Big\} - \frac{1}{6}\Big\{ I_3[\chi] - 3I_1[\chi]I_2[\chi] + 2I_1^3[\chi] \Big\} + \cdots
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
I_1[\chi] &= \int_{\mathbb{R}} dx\, K_N^t[\chi](x,x), \\
I_2[\chi] &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \begin{vmatrix} K_N^t[\chi](x,x) & K_N^t[\chi](x,y) \\ K_N^t[\chi](y,x) & K_N^t[\chi](y,y) \end{vmatrix} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \Big(K_N^t[\chi](x,x) K_N^t[\chi](y,y) - K_N^t[\chi](x,y) K_N^t[\chi](y,x) \Big) \\
&= I_1[\chi]^2 - \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy K_N^t[\chi](x,y) K_N^t[\chi](y,x)
\end{aligned}$$

なので，

$$I_2[\chi] - I_1[\chi]^2 = -\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 K_N^t[\chi](x_1,x_2) K_N^t[\chi](x_2,x_1) \tag{2.6.5}$$

である．同様に 3×3 の行列式の定義より，

$$\begin{aligned}
I_3[\chi] &= I_1[\chi]^3 - 3I_1[\chi] \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 K_N^t[\chi](x_1,x_2) K_N^t[\chi](x_2,x_1) \\
&\qquad +2 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 K_N^t[\chi](x_1,x_2) K_N^t[\chi](x_2,x_3) K_N^t[\chi](x_3,x_1) \\
&= I_1[\chi]^3 - 3I_1[\chi] \Big\{ -(I_2[\chi] - I_1[\chi]^2) \Big\} \\
&\qquad +2 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 K_N^t[\chi](x_1,x_2) K_N^t[\chi](x_2,x_3) K_N^t[\chi](x_3,x_1) \\
&= I_1[\chi]^3 + 3I_1[\chi] I_2[\chi] - 3I_1[\chi]^3 \\
&\qquad +2 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 K_N^t[\chi](x_1,x_2) K_N^t[\chi](x_2,x_3) K_N^t[\chi](x_3,x_1)
\end{aligned}$$

となるので (途中 (2.6.5) を用いた),

$$\begin{aligned} & I_3[\chi]-3I_1[\chi]I_2[\chi]+2I_1[\chi]^3 \\ = \ & 2\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 K_N^t[\chi](x_1,x_2)K_N^t[\chi](x_2,x_3)K_N^t[\chi](x_3,x_1) \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

を得る．これらを (2.6.4) に代入すると

$$\begin{aligned} \log \Psi_3^t[\chi] \ = \ & -\int_{\mathbb{R}} dx\, K_N^t[\chi](x,x) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 K_N^t[\chi](x_1,x_2)K_N^t[\chi](x_2,x_1) \\ & -\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 K_N^t[\chi](x_1,x_2)K_N^t[\chi](x_2,x_3)K_N^t[\chi](x_3,x_1) - \cdots \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

となることが分かる．

以下では次の記法を用いることにする．

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x,x)dx = \mathrm{Tr} f, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(y,z)dy = [fg](x,z). \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

特に

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)f(y,z)dy = [f^2](x,z) \tag{2.6.9}$$

すると，(2.6.7) は次のように書ける．

$$\log \Psi_3^t[\chi] = -\mathrm{Tr} K_N^t[\chi] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(K_N^t[\chi])^2 - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(K_N^t[\chi])^3 - \cdots.$$

同様にして一般の N に対して，次が成り立つことを示すことができる．

$$\begin{aligned} \log \Psi_N^t[\chi] &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathrm{Tr}(K_N^t[\chi])^k \\ &= \mathrm{Tr}\Big\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(K_N^t[\chi])^k \Big\} \\ &= \mathrm{Tr}\log(1-K_N^t[\chi]). \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

ここで，(2.6.3) を用いた．

これを (2.3.14), すなわち

$$\Psi_N^t[\chi] = \mathrm{Det}\Big[1-K_N^t[\chi]\Big]$$

と比較すると，次の等式が成り立つことが導かれたことになる．

$$\log \mathrm{Det}(1-K_N^t[\chi]) = \mathrm{Tr}\log(1-K_N^t[\chi]) \tag{2.6.11}$$

以上より，特性関数に対して次の表式が得られた．

$$\Psi_N^t[\chi] = \exp\left(\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t[\chi])\right) \tag{2.6.12}$$

2.7 最右端粒子の分布

以下では特に, $s \in \mathbb{R}$ をパラメータとして

$$\chi(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq s\}} \tag{2.7.1}$$

とする．すると

$$\begin{aligned}
\Psi_N^t[\chi] &\equiv \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\, \hat{p}_N^t(\{\mathbf{x}\}) \prod_{j=1}^{N}(1-\chi(x_j)) \\
&= \int_{\mathbb{R}_<^N} d\mathbf{x}\, p_N(t;\mathbf{x}|\mathbf{0}) \prod_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{\{x_j < s\}} \\
&= \mathrm{Prob}\Big(\text{すべての粒子が } s \text{ より左に存在する}\Big) \\
&= \mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) \\
&= \mathrm{Prob}\Big(\text{最右端粒子の位置が } s \text{ より左である}\Big)
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

となる．

$$\begin{aligned}
K_N^t[\chi] &= K_N^t\Big[\mathbf{1}_{\{x \geq s\}}\Big] \\
&= K_N^t\, \mathbf{1}_{\{x \geq s\}} \equiv K_N^t(s)
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

と書くことにすると，(2.6.12) より

$$\mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = \exp\Big(\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(s))\Big)$$

となる．ここで

$$\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(s)) = -\int_s^\infty da\, \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(a))$$

なので,

$$\begin{aligned}
R(a) &= R_N^t(a) \\
&= \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(a))
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

と定義すると

$$\mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = \exp\left(-\int_s^\infty da\, R_N^t(a)\right) \tag{2.7.5}$$

と表わされることになる．

$$\lim_{s\to-\infty} \mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = 0, \tag{2.7.6}$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = 1 \tag{2.7.7}$$

であるはずである．(2.7.6) より

$$\int_{-\infty}^\infty da\, R_N^t(a) = \infty \tag{2.7.8}$$

が示唆される．

以下では $R_N^t(a)$ に対する表式を変形していく．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(a)) \\
=\;& \mathrm{Tr}\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(K_N^t(a))^k\right\} \\
=\;& -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_{k-1}[K_N^t(a)](x,x_1)[K_N^t(a)](x_1,x_2)\cdots[K_N^t(a)](x_{k-1},x)
\end{aligned}$$

の k 次の項の被積分関数を a で微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\Big\{[K_N^t(a)](x,x_1)[K_N^t(a)](x_1,x_2)\cdots[K_N^t(a)](x_{k-1},x)\Big\} \\
=\;& \left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](x,x_1)[K_N^t(a)](x_1,x_2)\cdots[K_N^t(a)](x_{k-1},x) \\
&+[K_N^t(a)](x,x_1)\left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](x_1,x_2)\cdots[K_N^t(a)](x_{k-1},x) \\
&+\cdots \\
&+[K_N^t(a)](x,x_1)[K_N^t(a)](x_1,x_2)\cdots\left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](x_{k-1},x)
\end{aligned}$$

となり，k 個の項からなる．しかしこれらの項を，$x,x_1,\cdots,x_{k-1}$ で k-重積分をすると，どれも等しく

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_{k-1}[K_N^t(a)](x,x_1)[K_N^t(a)](x_1,x_2)\cdots\left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](x_{k-1},x) \\
&\quad=\mathrm{Tr}\left\{(K_N^t(a))^{k-1}\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right\}
\end{aligned}$$

を与える．従って，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Tr}\log(1-K_N^t(a)) \\
=\;& -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\times k\mathrm{Tr}\left\{(K_N^t(a))^{k-1}\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right\} \\
=\;& -\mathrm{Tr}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(K_N^t(a))^k\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right\} \\
=\;& -\mathrm{Tr}\left\{(1-K_N^t(a))^{-1}\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right\} \qquad (2.7.9)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](x,y) &= \frac{\partial}{\partial a}\Big[K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\Big] \\
&= K_N^t(x,y)\frac{\partial}{\partial a}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\
&= -K_N^t(x,y)\delta(y-a) \qquad (2.7.10)
\end{aligned}$$

であるから，

$$(2.7.9) = -\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y)\left[\frac{\partial K_N^t(a)}{\partial a}\right](y,x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y) K_N^t(y,x)\delta(x-a) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[(1-K_N^t(a))^{-1}\right](a,y) K_N^t(y,a) \\
&= \Big[(1-K_N^t(a))^{-1} K_N^t\Big](a,a)
\end{aligned}
$$

である．以上より，(2.7.4) で定義した $R(a)$ は

$$
R(a) = R_N^t(a) = \Big[(1-K_N^t(a))^{-1} K_N^t\Big](a,a) \tag{2.7.11}
$$

と表わされることが分かった．これは**レゾルベント演算子**

$$
(1-K_N^t(a))^{-1} K_N^t(a)
$$

の (a,a) 成分と見なせる．

ここで，$K_N^t(x,y)$ は (2.5.13) で，

$$
K_N^t(x,y) = \frac{A(x)B(y)-B(x)A(y)}{x-y} \quad (\text{ただし} \quad x \neq y) \tag{2.7.12}
$$

の形に定まっていた．ただし，

$$
A(x) = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/4} \varphi_N\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right), \tag{2.7.13}
$$

$$
B(x) = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/4} \varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \tag{2.7.14}
$$

である．

以下では

$$
\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y) = \rho(x,y) \tag{2.7.15}
$$

と略記することにする．また，

$M = x$ を掛ける演算子

とする．つまり

$$
M(x,y) = x\delta(x-y) \tag{2.7.16}
$$

である．実際こうすると，

$$
\begin{aligned}
[Mf](x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, M(x,z) f(z,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, x\delta(x-z) f(z,y) \\
&= x f(x,y)
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
[fM](x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(x,z) M(z,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(x,z) z\delta(z-y) = f(x,y) y
\end{aligned}
$$

となる．

さて，M と $K_N^t(a)$ の交換子

$$\Big[M, K_N^t(a)\Big] = MK_N^t(a) - K_N^t(a)M \tag{2.7.17}$$

を考えることにする．(2.7.12) の形を用いると

$$\begin{aligned}
& \Big[M, K_N^t(a)\Big](x,y) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} dz\, M(x,z)[K_N^t(a)](z,y) - \int_{-\infty}^{\infty} dz\, [K_N^t(a)](x,z)M(z,y) \\
= \;& x[K_N^t(a)](x,y) - [K_N^t(a)](x,y)y \\
= \;& xK_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}} - K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}y \\
= \;& \left\{x \times \frac{A(x)B(y)-B(x)A(x)}{x-y} - \frac{A(x)B(y)-B(x)A(y)}{x-y} \times y\right\}\mathbf{1}_{\{y\ge a\}} \\
= \;& \Big(A(x)B(y)-B(x)A(y)\Big)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}
\end{aligned} \tag{2.7.18}$$

となる．他方

$$(1-K_N^t(a))\Big[M, (1-K_N^t(a))^{-1}\Big](1-K_N^t(a))$$

なるものを考えると，これは

$$\begin{aligned}
& (1-K_N^t(a))\Big[M, (1-K_N^t(a))^{-1}\Big](1-K_N^t(a)) \\
= \;& (1-K_N^t(a))\Big\{M(1-K_N^t(a))^{-1} - (1-K_N^t(a))^{-1}M\Big\}(1-K_N^t(a)) \\
= \;& (1-K_N^t(a))M - M(1-K_N^t(a)) \\
= \;& M - K_N^t(a)M - M + MK_N^t(a) \\
= \;& \Big[M, K_N^t(a)\Big]
\end{aligned}$$

に等しいので，両辺に左右からそれぞれ $(1-K_N^t(a))^{-1}$ を掛けると，

$$\Big[M, (1-K_N^t(a))^{-1}\Big] = (1-K_N^t(a))^{-1}\Big[M, K_N^t(a)\Big](1-K_N^t(a))^{-1} \tag{2.7.19}$$

という公式が得られる．これの (x,y) 成分は，(2.7.15) という記法を用いて，(2.7.18) の結果を適用すると，

$$\begin{aligned}
& \Big[M, (1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,\alpha)\Big[M, K_N^t(a)\Big](\alpha,\beta)\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](\beta,y) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \rho(x,\alpha)\Big\{A(\alpha)B(\beta)-B(\alpha)A(\beta)\Big\}\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\rho(\beta,y) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \rho(x,\alpha)A(\alpha) \times \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge 1\}}\rho(\beta,y) \\
& \quad - \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \rho(x,\alpha)B(\alpha) \times \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge 1\}}\rho(\beta,y)
\end{aligned} \tag{2.7.20}$$

と書ける．そこで，新たな記法として

$$\begin{aligned} Q(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \rho(x,\alpha)A(\alpha) = \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}A\Big](x), \\ P(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \rho(x,\alpha)B(\alpha) = \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}B\Big](x) \end{aligned} \tag{2.7.21}$$

を導入することにする．(2.7.20) の右辺にはこれとは別の積分も現れるが，以下に示すように，これらも $Q(x)$ と $P(x)$ を用いて表わすことができる．

$K_N^t(a)$ の定義 (2.7.3) を思い出すと

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\Big\{(1-K_N^t(a))^{-1}\Big\}(\beta,y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\Big\{K_N^t(a)\Big\}^k(\beta,y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dx_{k-1}\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}K_N^t(\beta,x_1)\mathbf{1}_{\{x_1\geq a\}}\times\cdots\times K_N^t(x_{k-1},y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty} d\beta\int_{a}^{\infty} dx_1\cdots\int_{a}^{\infty} dx_{k-1}\, B(\beta)K_N^t(\beta,x_1)\times\cdots\times K_N^t(x_{k-1},y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \end{aligned} \tag{2.7.22}$$

となる．ここで

$$K_N^t(x,y) = K_N^t(y,x) \tag{2.7.23}$$

であることを用いると，

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty} d\beta\int_{a}^{\infty} dx_1\cdots\int_{a}^{\infty} dx_{k-1}\, K_N^t(y,x_{k-1})\times\cdots\times K_N^t(x_1,\beta)B(\beta)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty} d\beta\left[\Big\{K_N^t(a)\Big\}^k\right](y,\beta)B(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](y,\beta)B(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\rho(y,\beta)B(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \end{aligned}$$

となる．つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y) = P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \tag{2.7.24}$$

が得られたことになる．同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y) = Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \tag{2.7.25}$$

も得られる．

問題 2.7.1　(2.7.25) を示しなさい．

これらを (2.7.20) に代入すると

$$\Big[M,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y)=\Big\{Q(x)P(y)-P(x)Q(y)\Big\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \tag{2.7.26}$$

という表式が求められる．

我々が求めたい量は (2.7.11)，すなわち

$$R(a)=R_N^t(a)=\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}K_N^t\Big](a,a)$$

であるが，これを拡張した

$$R(x,y)=\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}K_N^t(a)\Big](x,y) \tag{2.7.27}$$

という量を考えてみることにする．当然

$$R(a)=R(a,a)=\lim_{y\to x}R(x,y)\Big|_{x=a} \tag{2.7.28}$$

によって，$R(x,y)$ から $R(a)$ を得ることが出来る．

(2.7.27) より

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big\{1-(1-K_N^t(a))\Big\}\Big](x,y) \\ &= \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y)-\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}(1-K_N^t(a))\Big](x,y) \\ &= \rho(x,y)-\delta(x-y), \end{aligned} \tag{2.7.29}$$

つまり

$$\rho(x,y)=\delta(x-y)+R(x,y) \tag{2.7.30}$$

という等式が得られる．$\rho(x,y)=\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y)$ であったから，M が x を掛ける演算子だったことを思い出すと

$$\begin{aligned} &\Big[M,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y) \\ =\ & \int_{-\infty}^{\infty}dz\,\Big\{x\delta(x-z)\rho(z,y)-\rho(x,z)z\delta(z-y)\Big\} \\ =\ & x\rho(x,y)-\rho(x,y)y \\ =\ & x\Big\{\delta(x-y)+R(x,y)\Big\}-\Big\{\delta(x-y)+R(x,y)\Big\}y \\ =\ & xR(x,y)-R(x,y)y \\ =\ & (x-y)R(x,y) \end{aligned} \tag{2.7.31}$$

である．

(2.7.26) と (2.7.31) を等置すると

$$R(x,y)=\frac{Q(x)P(y)-P(x)Q(y)}{x-y}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \tag{2.7.32}$$

という結果が得られる．これに，(2.5.5), (2.5.6) の議論を適用すると

$$R(x,x)=\left\{\frac{dQ(x)}{dx}P(x)-\frac{dP(x)}{dx}Q(x)\right\}\mathbf{1}_{\{x\geq a\}} \tag{2.7.33}$$

となるので，結局

$$R(a) = R_N^t(a) = \left[\frac{dQ(x)}{dx}P(x) - \frac{dP(x)}{dx}Q(x)\right]_{x=a} \tag{2.7.34}$$

という表式にたどり着く．

2.8 微分方程式系の導出

まず, 微分演算子として

$$D(x,y) = \delta(x-y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.8.1}$$

を導入する．こうすると

$$\begin{aligned}[Df](x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, D(x,z)f(z,y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(x-z)\frac{\partial}{\partial z}f(z,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \end{aligned}\tag{2.8.2}$$

となる．他方,

$$[fD](x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(x,z)\delta(z-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

なので，この作用を見るには右に別の関数 g を置いて考える必要がある．すると

$$\begin{aligned}
[fDg](x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, [fD](x,\alpha)g(\alpha,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(x,z)\delta(z-\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha}g(\alpha,y) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(x,z)\delta(z-\alpha)g(\alpha,y)\right]_{\alpha=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(x,z)\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\delta(z-\alpha)\right\}g(\alpha,y) \\
&= \Big[f(x,\alpha)g(\alpha,y)\Big]_{\alpha=-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(x,z)\left\{\frac{\partial}{\partial z}\delta(z-\alpha)\right\}g(\alpha,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(x,z)\left\{\frac{\partial}{\partial z}\delta(z-\alpha)\right\}g(\alpha,y) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(x,z)\delta(z-\alpha)g(\alpha,y)\right]_{z=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \left\{\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)\right\}\delta(z-\alpha)g(\alpha,y) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \left\{\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)\right\}\delta(z-\alpha)g(\alpha,y)
\end{aligned}$$

である．ここで部分積分を 2 度行い，$f(x), g(x)$ は $x \to \pm\infty$ で零になることを仮定した．従って,

$$[fD](x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \tag{2.8.3}$$

ということになる．

交換子 $\left[D, K_N^t(a)\right]$ を考える．これの (x,y) 成分は

$$\begin{aligned}
&\left[D, K_N^t(a)\right](x,y) \\
=\ & [DK_N^t(a)](x,y) - [K_N^t(a)D](x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big([K_N^t(a)](x,y)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big([K_N^t(a)](x,y)\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\Big) \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial x}K_N^t(x,y)\right\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} + \left\{\frac{\partial}{\partial y}K_N^t(x,y)\right\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} + K_N^t(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \qquad (2.8.4)
\end{aligned}$$

ここで

$$K_N^t(x,y) = \frac{A(x)B(y)-B(x)A(y)}{x-y} \qquad (2.8.5)$$

であったから,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}K_N^t(x,y) &= \frac{1}{(x-y)^2}\Big\{(A'(x)B(y)-B'(x)A(y))(x-y)-(A(x)B(y)-B(x)A(y))\Big\} \\
&= \frac{1}{x-y}(A'(x)B(y)-B'(x)A(y)) - \frac{1}{(x-y)^2}(A(x)B(y)-B(x)A(y)) \\
\frac{\partial}{\partial y}K_N^t(x,y) &= \frac{1}{(x-y)^2}\Big\{(A(x)B'(y)-B(x)A'(y))(x-y)-(A(x)B(y)-B(x)A(y))\Big\} \\
&= \frac{1}{x-y}(A(x)B'(y)-B(x)A'(y)) + \frac{1}{(x-y)^2}(A(x)B(y)-B(x)A(y))
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}K_N^t(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}K_N^t(x,y) \\
&\quad = \frac{1}{x-y}\Big\{A'(x)B(y)-B'(x)A(y)+A(x)B'(y)-B(x)A'(y)\Big\} \qquad (2.8.6)
\end{aligned}$$

である．また

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} = \delta(y-a)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\Big[D, K_N^t(a)\Big](x,y) \\
&\quad = \frac{1}{x-y}\Big\{A'(x)B(y)-B'(x)A(y)+A(x)B'(y)-B(x)A'(y)\Big\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \\
&\qquad + K_N^t(x,y)\delta(y-a) \qquad (2.8.7)
\end{aligned}$$

となる．

ここで (2.7.13), (2.7.14)，すなわち

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left(\frac{N}{2}\right)^{1/4}\varphi_N\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right), \\
B(x) &= \left(\frac{N}{2}\right)^{1/4}\varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)
\end{aligned}$$

であり，(2.5.10), (2.5.11) で

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= -x\varphi_n(x) + \sqrt{2n}\varphi_{n-1}(x) \\
&= x\varphi_n(x) - \sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

を得ているので，

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/4}\left\{-\frac{x}{\sqrt{2t}}\varphi_N\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)+\sqrt{2N}\varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right\} \\
&= -\frac{x}{2t}A(x)+\sqrt{\frac{N}{t}}B(x), \qquad (2.8.8) \\
B'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/4}\left\{\frac{x}{\sqrt{2t}}\varphi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)-\sqrt{2N}\varphi_N\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right\} \\
&= \frac{x}{2t}B(x)-\sqrt{\frac{N}{t}}A(x) \qquad (2.8.9)
\end{aligned}$$

であることが分かる．これらを (2.8.7) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[D, K_N^t(a)\Big](x,y) \\
&\quad = -\frac{1}{2t}\Big(A(x)B(y)+B(x)A(y)\Big)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}+K_N^t(x,y)\delta(y-a) \qquad (2.8.10)
\end{aligned}$$

となる．

前節と同様に

$$\Big[D,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big]=(1-K_N^t(a))^{-1}\Big[D,K_N^t(a)\Big](1-K_N^t(a))^{-1} \qquad (2.8.11)$$

である．この (x,y) 成分は

$$\begin{aligned}
&\Big[D,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y) \\
=\;& \int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,\rho(x,z)\Big[D,K_N^t(a)\Big](z,\alpha)\rho(\alpha,y) \\
=\;& \int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,\rho(x,z)\left[-\frac{1}{2t}\Big(A(x)B(y)+B(x)A(y)\Big)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}+K_N^t(x,y)\delta(y-a)\right]\rho(\alpha,y) \\
=\;& -\frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\rho(z)A(z)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,B(\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\geq a\}}\rho(\alpha,y) \\
& -\frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\rho(z)B(z)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,A(\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\geq a\}}\rho(\alpha,y) \\
& +\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\rho(x,z)K_N^t(z,a)\rho(a,y) \\
=\;& -\frac{1}{2t}Q(x)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,B(\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\geq a\}}\rho(\alpha,y)-\frac{1}{2t}P(x)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,A(\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\geq a\}}\rho(\alpha,y) \\
& +R(x,a)\rho(a,y)
\end{aligned}$$

すでに

$$K_N^t(x,y)=K_N^t(y,x)$$

であると，(2.7.24),(2.7.25) であること，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,B(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y)=P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \qquad (2.8.12)$$

及び

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\geq a\}}\rho(\beta,y)=Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} \qquad (2.8.13)$$

を示してあるので，これらを代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[D,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big](x,y)\\ =\ &-\frac{1}{2t}\Big(Q(x)P(y)+P(x)Q(y)\Big)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}+R(x,a)\rho(a,y)\end{aligned} \tag{2.8.14}$$

が得られる．

これを用いると $\frac{d}{dx}Q(x)$, $\frac{d}{dx}P(x)$ が次のように計算できる．演算子 D を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}Q(x) &= \Big[D(1-K_N^t(a))^{-1}A\Big](x)\\ &= \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}DA\Big](x)+\Big[\Big[D,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big]A\Big](x)\end{aligned}$$

ここで，(2.8.8) と (2.8.14) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}Q(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(x,y)\left\{-\frac{y}{2t}A(y)+\sqrt{\frac{N}{t}}B(y)\right\}\\ &\quad -\frac{1}{2t}Q(x)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y)-\frac{1}{2t}P(x)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y)\\ &\quad +R(x,a)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(a,y)A(y)\end{aligned}$$

となる．そこで

$$\begin{aligned}u &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y)\\ &= \int_{a}^{\infty}dy\,Q(y)A(y), \qquad (2.8.15)\\ v &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y)\\ &= \int_{a}^{\infty}dy\,P(y)A(y), \qquad (2.8.16)\\ Q_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(x,y)yA(y) \qquad (2.8.17)\end{aligned}$$

と書くことにすると，この結果は次の等式にまとめられる．

$$\frac{d}{dx}Q(x)=-\frac{1}{2t}Q_1(x)+\sqrt{\frac{N}{t}}P(x)-\frac{1}{2t}vQ(x)-\frac{1}{2t}uP(x)+R(x,a)Q(a). \tag{2.8.18}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P(x) &= \Big[D(1-K_N^t(a))^{-1}B\Big](x)\\ &= \Big[(1-K_N^t(a))^{-1}DB\Big](x)+\Big[\Big[D,(1-K_N^t(a))^{-1}\Big]B\Big](x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(x,y)\left\{\frac{y}{2t}B(y)-\sqrt{\frac{N}{t}}A(y)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2t}Q(x)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)-\frac{1}{2t}P(x)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)\\
&+R(x,a)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(a,y)B(y)\\
=\quad&-\frac{1}{2t}P_1(x)-\sqrt{\frac{N}{t}}Q(x)-\frac{1}{2t}wQ(x)-\frac{1}{2t}vP(x)+R(x,a)P(a) \qquad (2.8.19)
\end{aligned}
$$

が得られる．ただしここで，(2.8.9) を途中用いて，最後に

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(x,y)yB(y), && (2.8.20)\\
w &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)=\int_{a}^{\infty}dy\,P(y)B(y) && (2.8.21)
\end{aligned}
$$

と置いた．また

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)\\
=\ &\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\rho(y,z)A(z)\\
=\ &\int_{-\infty}^{\infty}dz\,A(z)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,B(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\rho(y,z)\\
=\ &\int_{-\infty}^{\infty}dz\,A(z)P(z)\mathbf{1}_{\{z\geq a\}}\\
=\ &v \qquad (2.8.22)
\end{aligned}
$$

であることを用いた．(この導出には途中で (2.8.12) を用いた．)

実は $Q_1(x)$ と $P_1(x)$ は別の量で表わせる．(2.7.30) の等式

$$\rho(x,y)=\delta(x-y)+R(x,y)$$

を思い出すと

$$
\begin{aligned}
(x-y)\rho(x,y) &= (x-y)\delta(x-y)+(x-y)R(x,y)\\
&= (x-y)R(x,y)
\end{aligned}
$$

なので，

$$y\rho(x,y)=x\rho(x,y)-(x-y)R(x,y)$$

である．さらに (2.7.32)，すなわち

$$R(x,y)=\frac{Q(x)P(y)-P(x)Q(y)}{x-y}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}$$

なので，

$$y\rho(x,y)=x\rho(x,y)-\Big\{Q(x)P(y)-P(x)Q(y)\Big\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}$$

であるから，(2.8.17) 式，すなわち

$$Q_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(x,y)yA(y)$$

に代入すると,

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= x\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\rho(x,y)A(y) \\
&\quad -Q(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y) + P(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y) \\
&= xQ(x) - Q(x)v + P(x)u
\end{aligned} \tag{2.8.23}$$

を得る．この最後の等式で (2.8.22) を用いた．また

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\rho(x,y)yB(y) \\
&= x\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\rho(x,y)B(y) \\
&\quad -Q(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y) + P(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy\,Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y) \\
&= xP(x) - Q(x)w + P(x)v
\end{aligned} \tag{2.8.24}$$

を得る．(2.8.23) と (2.8.24) を (2.8.18) と (2.8.19) に代入すると

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{x}{2t}Q(x) + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)P(x) + R(x,a)Q(a), \tag{2.8.25}$$

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{x}{2t}P(x) - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)Q(x) + R(x,a)P(a) \tag{2.8.26}$$

となる．

以上を (2.7.33) に代入すると

$$\begin{aligned}
R(x,x) &= \left\{\frac{dQ(x)}{dx}P(x) - \frac{dP(x)}{dx}Q(x)\right\}\mathbf{1}_{\{x\geq a\}} \\
&= \left\{\left[-\frac{x}{2t}Q(x) + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)P(x) + R(x,a)Q(a)\right]P(x)\right. \\
&\quad \left. -\left[\frac{x}{2t}P(x) - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)Q(x) + R(x,a)P(a)\right]Q(x)\right\}\mathbf{1}_{\{x\geq a\}} \\
&= \left\{-\frac{x}{t}P(x)Q(x) + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)P(x)^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)Q(x)^2\right. \\
&\quad \left. +R(x,a)\Big(Q(a)P(x) - Q(x)P(a)\Big)\right\}\mathbf{1}_{\{x\geq a\}}
\end{aligned} \tag{2.8.27}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
R(a) &= R(x,x)\Big|_{x=a} \\
&= -\frac{a}{t}P(a)Q(a) + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)P(a)^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)Q(a)^2
\end{aligned} \tag{2.8.28}$$

次に a についての微分を考えることにする．

$$\begin{aligned}\frac{du}{da} &= \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, Q(y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}A(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\left\{\frac{\partial Q(y)}{\partial a}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} + Q(y)\frac{d}{da}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\right\}A(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\left\{\frac{\partial Q(y)}{\partial a}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} - Q(y)\delta(y-a)\right\}A(y) \qquad (2.8.29)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(y)}{\partial a} &= \frac{d}{da}\Big[(1-K_N^t(a))^{-1}A\Big](y) \\ &= \left[\left\{\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1}\right\}A\right](y) \qquad (2.8.30)\end{aligned}$$

であるが，恒等式

$$(1-K_N^t(a))(1-K_N^t(a))^{-1} = 1$$

の両辺を a で微分すると，

$$\left\{\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))\right\}(1-K_N^t(a))^{-1} + (1-K_N^t(a))\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1} = 0$$

であるから，

$$-\frac{dK_N^t(a)}{da}(1-K_N^t(a))^{-1} + (1-K_N^t(a))\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1} = 0$$

従って，

$$\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1} = (1-K_N^t(a))^{-1}\frac{dK_N^t(a)}{da}(1-K_N^t(a))^{-1} \qquad (2.8.31)$$

である．これを用いると

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1}\right](x,y) \\ =\;& \int_{-\infty}^{\infty} dz\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\,\rho(x,z)\left[\frac{dK_N^t(a)}{da}\right](z,\alpha)\rho(\alpha,y) \\ =\;& \int_{-\infty}^{\infty} dz\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\,\rho(x,z)\frac{d}{da}\Big\{K_N^t(z,\alpha)\mathbf{1}_{\{\alpha\geq a\}}\Big\}\rho(\alpha,y) \\ =\;& \int_{-\infty}^{\infty} dz\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\,\rho(x,z)\Big\{-K_N^t(z,\alpha)\delta(\alpha-a)\Big\}\rho(\alpha,y) \\ =\;& -\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\rho(x,z)K_N^t(z,a)\rho(a,y) \\ =\;& -R(x,a)\rho(a,y) \qquad (2.8.32)\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(y)}{\partial a} &= -R(y,a)\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\rho(a,z)A(z) \\ &= -R(y,a)Q(a) \qquad (2.8.33)\end{aligned}$$

となる．これを (2.8.29) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{da} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big\{ -R(y,a)Q(a)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} - Q(y)\delta(y-a)\Big\} A(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big\{ -R(y,a)Q(a)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} - Q(a)\delta(y-a)\Big\} A(y) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dy \Big\{ R(y,a) + \delta(y-a)\Big\} \mathbf{1}_{\{y\geq a\}} A(y)Q(a) \\
&= -Q(a)\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \rho(y,a)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}} A(y) \\
&= -Q(a)Q(a)\mathbf{1}_{\{a\geq a\}} \\
&= -Q(a)^2
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，最後から 2 番目の等号で (2.8.13) を用いた．

同様に

$$
\frac{\partial P(y)}{\partial a} = -R(y,a)P(a) \tag{2.8.34}
$$

なので,

$$
\frac{dw}{da} = -P(a)^2 \tag{2.8.35}
$$

を得る．

問題 2.8.1 (2.8.34) を示し, (2.8.35) を導きなさい..

以後,

$$
\begin{aligned}
p &= P(a), \\
q &= Q(a) \qquad (2.8.36)
\end{aligned}
$$

と書くことにすると，以上より

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{da} &= -q^2 \qquad (2.8.37)\\
\frac{dw}{da} &= -p^2 \qquad (2.8.38)
\end{aligned}
$$

が得られたことになる．

さて，(2.8.25) と (2.8.33) を並べて書くと,

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ(x)}{dx} &= -\frac{x}{2t}Q(x) + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right) P(x) + R(x,a)Q(a) \\
\frac{\partial Q(x)}{\partial a} &= -R(x,a)Q(a)
\end{aligned}
$$

である．これより，$Q(x)$ は実際は x と a の関数であり $Q = Q(x,a)$ と書くべきであった．そして特に $x = f(a)$ として,

$$
\frac{dQ(f(a),a)}{da} = \frac{df(a)}{da}\frac{\partial Q(x,a)}{\partial x}\Big|_{x=f(a)} + \frac{\partial Q(x,a)}{\partial a}\Big|_{x=f(a)}
$$

を考えることにする．この式で $f(a)=a$ としたものが $\dfrac{dQ(a)}{da}$ であると考える．

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(a)}{da} &= \Big\{-\frac{a}{2t}Q(a)+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)P(a)\Big\}+R(a,a)Q(a) \\
&\quad -R(a,a)Q(a) \\
&= -\frac{a}{2t}q+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p \qquad (2.8.39)
\end{aligned}$$

となる．同様に (2.8.26) と (2.8.34) より

$$\begin{aligned}
\frac{dP(a)}{da} &= \left\{\frac{a}{2t}p-\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q\right\}+R(a,a)p \\
&\quad -R(a,a)p \\
&= \frac{a}{2t}p-\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q \qquad (2.8.40)
\end{aligned}$$

となる．

以上をまとめると，次の微分方程式系になる．

$$R(a) = -\frac{a}{t}pq+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q^2 \qquad (2.8.41)$$

$$\frac{dq}{da} = -\frac{a}{2t}q+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p \qquad (2.8.42)$$

$$\frac{dp}{da} = \frac{a}{2t}p-\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q \qquad (2.8.43)$$

$$\frac{du}{da} = -q^2 \qquad (2.8.44)$$

$$\frac{dw}{da} = -p^2. \qquad (2.8.45)$$

2.9　R の微分方程式

(2.8.41) の両辺を a で微分すると

$$\begin{aligned}
R' &\equiv \frac{dR(a)}{da} \\
&= -\frac{1}{t}pq-\frac{a}{t}p'q-\frac{a}{t}pq'-\frac{u'}{t}p^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)\times 2pp'+\frac{w'}{t}q^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)\times 2qq'
\end{aligned}$$

(2.8.42)-(2.8.45) を代入すると

$$R' = -\frac{1}{t}pq \qquad (2.9.1)$$

を得る．

問題 2.9.1　(2.9.1) を確かめなさい．

もう一度 a で微分すると

$$R'' = -\frac{1}{t}(pq)' \tag{2.9.2}$$

であるが，ここで (2.8.42), (2.8.43) を用いると

$$\begin{aligned}(pq)' &= p'q + pq' \\ &= \left\{\frac{a}{2t}p - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right) q\right\} q + p\left\{-\frac{a}{2t}q + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right) p\right\} \\ &= \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right) p^2 - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right) q^2 \end{aligned}\tag{2.9.3}$$

他方，(2.8.44), (2.8.45) を用いると

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw\right)' &= \sqrt{\frac{N}{t}}\,(u'-w') + \frac{1}{t}(u'w + uw') \\ &= \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right) p^2 - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right) q^2 \end{aligned}\tag{2.9.4}$$

となるので，

$$\frac{d}{da}(pq) = \frac{d}{da}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw\right) \tag{2.9.5}$$

という方式が得られる．この両辺を a から ∞ まで積分する：

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty da'\,\frac{d}{da'}(pq) = \int_a^\infty da'\left(\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw\right) \\ \Longleftrightarrow\quad &\lim_{a\to\infty}(pq) - (pq) = \lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw\right) - \left(\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw\right). \end{aligned}\tag{2.9.6}$$

さて，

$$\left[K_N^t(a)\right](x,y) = K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}$$

なので，$a\to\infty$ では任意の $y\,(<\infty)$ に対して $\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}\to 0$ であるから $K_N^t(a)\to 0$ である．つまり

$$\rho(x,y)\to 0 \quad \text{in} \quad a\to\infty \tag{2.9.7}$$

である．従って

$$\begin{aligned}Q(x) &= \int_{-\infty}^\infty d\alpha\,\rho(x,\alpha)A(\alpha) &&\to\quad 0 \\ P(x) &= \int_{-\infty}^\infty d\alpha\,\rho(x,\alpha)B(\alpha) &&\to\quad 0 \\ u &= \int_a^\infty dy\,Q(y)A(y) &&\to\quad 0 \\ w &= \int_a^\infty dy\,P(y)B(y) &&\to\quad 0 \quad \text{in} \quad a\to\infty \end{aligned}\tag{2.9.8}$$

である．ゆえに (2.9.6) は

$$pq = \sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw \tag{2.9.9}$$

となる．

ここで少し戻って，(2.9.2) に (2.9.3) を代入すると，

$$R'' = -\frac{1}{t}\left\{\left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)p^2 - \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)q^2\right\}$$

である．これを再度 a で微分すると

$$\begin{aligned} R''' &= -\frac{2}{t^2}p^2q^2 - \frac{a}{t^2}\left\{\left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)p^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)q^2\right\} \\ &\quad + \frac{4}{t}pq\left\{\frac{N}{t} - \sqrt{\frac{N}{t}}\left(\frac{u}{t} - \frac{w}{t}\right) - \frac{uw}{t^2}\right\} \end{aligned}$$

が得られる．

(2.8.41) より

$$\left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)p^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)q^2 = R + \frac{a}{t}pq$$

であり，また (2.9.9) より

$$\sqrt{\frac{N}{t}}\,(u-w) + \frac{1}{t}uw = pq$$

なので，これらを代入すると

$$R''' = -\frac{a}{t^2}R - \frac{a^2}{t^3}pq + \frac{4N}{t^2}pq - \frac{6}{t^2}(pq)^2$$

となる．ここで (2.9.1) を用いて pq を消去すると

$$R''' = -\frac{a}{t^2}R + \frac{a^2}{t^2}R' - \frac{4N}{t}R' - 6(R')^2$$

すなわち，$R(a)$ に対して，次のような閉じた 3 階の微分方程式が得られたことになる．

$$R''' - \left(\frac{a^2}{t^2} - \frac{4N}{t}\right)R' + \frac{a}{t^2}R + 6(R')^2 = 0. \tag{2.9.10}$$

$(R')^2$ の項があるので，これは**非線形常微分方程式**である．

2.10　ソフト・エッジ スケーリング

$$a = \sqrt{2N} \times \sqrt{2t} + \sqrt{t}N^{-1/6}s \tag{2.10.1}$$

によって，$a \mapsto s$ の変数変換をする．(2.10.1) より

$$s = (a - 2\sqrt{Nt})t^{-1/2}N^{1/6}$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{ds}{da}\frac{\partial}{\partial s} = t^{-1/2}N^{1/6}\frac{\partial}{\partial s}$$

である．そこで

$$\tilde{R}(s) = R(a) \tag{2.10.2}$$

として

$$\frac{\partial \tilde{R}(s)}{\partial s} = \tilde{R}'$$

などと書くことにすると，R の 3 階の微分方程式 (2.9.10) は次の形に変換される．

$$\tilde{R}''' - 4s\tilde{R}' + 6t^{1/2}N^{-1/6}(\tilde{R}')^2 + \mathcal{O}(N^{-2/3}) = 0. \tag{2.10.3}$$

(2.7.5) より，最右端粒子の分布は

$$\mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = \exp\left(-\int_s^\infty da\, R_N^t(a)\right)$$

と書けるので，これに対しても (2.10.1) の変数変換をすると

$$\mathrm{Prob}\Big(Y_N(t) < s\Big) = \exp\left(-\int_{(s-2\sqrt{Nt})t^{-1/2}N^{1/6}}^\infty du\, \sqrt{t}N^{-1/6}\tilde{R}_N^t(u)\right)$$

となる．そこで

$$\sqrt{t}N^{-1/6}\tilde{R}_N^t(u) = \overline{R}(u)\Big(1 + o(1)\Big) \quad \mathrm{in} \quad N \to \infty \tag{2.10.4}$$

と書くことにして，変数を

$$(s - 2\sqrt{Nt})t^{-1/2}N^{1/6} = x \tag{2.10.5}$$

によって変換することにすると，

$$\begin{aligned} & Y_N(t) < s \\ \Longleftrightarrow \quad & Y_N(t) < t^{1/2}N^{-1/6}x + 2\sqrt{Nt} \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{Y_N(t) - 2\sqrt{Nt}}{t^{1/2}N^{-1/6}} < x \end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{Prob}\left(\frac{Y_N(t) - 2\sqrt{Nt}}{t^{1/2}N^{-1/6}} < x\right) = \exp\left(-\int_x^\infty dy\overline{R}(y)\Big(1 + o(1)\Big)\right)$$

となる．

また，(2.10.3) の両辺に $\sqrt{t}N^{-1/6}$ を掛けて，(2.10.4) の置き換えをすると，

$$\overline{R}''' - 4s\overline{R}' + 2\overline{R} + 6(\overline{R}')^2 + \mathcal{O}(N^{-5/6}) = 0$$

となる．以上より，次が結論される．

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\left(\frac{Y_N(t) - 2\sqrt{Nt}}{t^{1/2}N^{-1/6}} < x\right) = \exp\left(-\int_x^\infty dy\overline{R}(u)\right). \tag{2.10.6}$$

ただし，$\overline{R} = \overline{R}(u)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\overline{R}''' - 4s\overline{R}' + 2\overline{R} + 6(\overline{R}')^2 = 0 \tag{2.10.7}$$

2.11 パンルヴェ II と Tracy-Widom 分布

$$\overline{R}(u) = \int_u^\infty dx\,(q(x))^2 \tag{2.11.1}$$

と置くことにする．両辺を u で微分すると

$$\frac{d\overline{R}(u)}{du} = -(q(u))^2 \tag{2.11.2}$$

となる．これより

$$\begin{aligned}\overline{R}' &= -q^2 \\ \overline{R}'' &= -2qq' \\ \overline{R}''' &= -2(q')^2 - 2qq''\end{aligned}$$

であるから，微分方程式 (2.10.7), すなわち

$$\overline{R}''' - 4s\overline{R}' + 2\overline{R} + 6(\overline{R}')^2 = 0$$

は

$$(q')^2 + qq'' - 2uq^2 - \int_u^\infty (q(x))^2 dx - 3q^4 = 0 \tag{2.11.3}$$

となる．両辺を u で微分すると

$$\left(q\frac{d}{du} + 3q'\right)\left\{q'' - (uq + 2q^3)\right\} = 0 \tag{2.11.4}$$

となる．

問題 2.11.1　(2.11.3) の両辺を u で微分して (2.11.4) を導きなさい．

(2.11.4) を満たすものとして

$$q'' = uq + 2q^3 \tag{2.11.5}$$

を考えることにする．この非線形微分方程式は **パンルヴェ(Painlevé) II 型**とよばれる．

(2.11.1) より

$$\begin{aligned}\int_x^\infty du\,\overline{R}(u) &= \int_x^\infty du \int_u^\infty dy\,(q(y))^2 \\ &= \int_x^\infty dy\,(q(y))^2 \int_x^y du \\ &= \int_x^\infty (y-x)(q(y))^2 dy\end{aligned}$$

なので，(2.10.6) は

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\left(\frac{Y_N(t) - 2\sqrt{Nt}}{t^{1/2}N^{-1/6}} < x\right) = \exp\left(-\int_x^\infty (y-x)(q(y))^2 dy\right) \tag{2.11.6}$$

と書き直せる．

Painlevé II 方程式 (2.11.5) の解を特定するには $u \to \infty$ での漸近形を特定すればよい．

$$a = 2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u \tag{2.11.7}$$

なので，まず N を固定すれば

$$u \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \to \infty$$

である．このとき

$$\Big[K_N^t(a)\Big](x,y) = K_N^t(x,y)\mathbf{1}_{\{y \geq a\}} \quad \to \quad 0$$

であるから，$R(a)$ の定義式 (2.7.4) すなわち

$$R(a) = \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Tr}\log(1 - K_N^t(a))$$

において log の展開公式

$$\mathrm{Tr}\log(1 - K_N^t(a)) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(K_N^t(a))^k = -\mathrm{Tr}K_N^t(a) + \mathcal{O}(K_N^t(a)^2)$$

が使えて，$a \to \infty$ では

$$\begin{aligned}
R(a) &\simeq \frac{\partial}{\partial a}\Big(- \mathrm{Tr}K_N^t(a)\Big) \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[K_N^t(a)\Big](x,x)dx \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty}K_N^t(x,x)\mathbf{1}_{\{x \geq a\}}dx \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\int_{a}^{\infty}K_N^t(x,x)dx \\
&= K_N^t(a,a)
\end{aligned} \tag{2.11.8}$$

であることが分かる．

ここで $a \to u$ の変換 (2.11.7) をすると

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(u) &\equiv R(2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u) \\
&\simeq K_N^t(2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u, 2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u) \quad \mathrm{in} \quad u \to \infty
\end{aligned}$$

ということなので，$\tilde{R} \to \overline{R}$ の変換を行うと

$$\begin{aligned}
\overline{R}(u) &\equiv \lim_{N\to\infty}\sqrt{t}N^{-1/6}\tilde{R}(u) \\
&\simeq \lim_{N\to\infty}\sqrt{t}N^{-1/6}K_N^t(2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u, 2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u) \quad \mathrm{in} \quad u \to \infty
\end{aligned} \tag{2.11.9}$$

を得る．

そこで

$$I(x,y) \equiv \lim_{N\to\infty}\sqrt{t}N^{-1/6}K_N^t(2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u, 2\sqrt{Nt} + \sqrt{t}N^{-1/6}u) \tag{2.11.10}$$

を調べることにする．

Christoffel-Darboux の式 (2.5.13) より,

$$\begin{aligned}
&I(x,y)\\
=\ &\lim_{N\to\infty}\sqrt{t}N^{-1/6}\sqrt{\frac{N}{2}}\frac{1}{(2\sqrt{Nt}+\sqrt{t}N^{-1/6}x)-(2\sqrt{Nt}+\sqrt{t}N^{-1/6}y)}\\
&\quad\times\left\{\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}y\right)\right.\\
&\qquad\left.-\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}y\right)\right\}\\
=\ &\frac{1}{x-y}\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2}}\left\{\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}y\right)\right.\\
&\qquad\left.-\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}y\right)\right\}
\end{aligned}\tag{2.11.11}$$

である. ただし,

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2^N N!\sqrt{\pi}}}e^{-x^2/2}H_N(x)\tag{2.11.12}$$

であった.

ここで次の漸近評価を用いることにする

$$e^{-x^2/2}H_N(x)\sim\pi^{1/4}2^{(2N+1)/4}(N!)^{1/2}N^{-1/12}\mathrm{Ai}\Big(2^{1/2}N^{1/6}(x-\sqrt{2N})\Big)\quad\text{in}\quad N\to\infty\tag{2.11.13}$$

ここで Ai は **Airy 関数**

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(\frac{1}{3}s^3+xs\right)ds\tag{2.11.14}$$

であり, これは

$$\mathrm{Ai}''(x)=x\mathrm{Ai}(x)\tag{2.11.15}$$

を満たす. (2.11.13) を (2.11.12) に代入すると

$$\begin{aligned}
\varphi_N(x)\ &\sim\ \frac{1}{2^{N/2}(N!)^{1/2}\pi^{1/4}}\pi^{1/4}2^{(2N+1)/4}(N!)^{1/2}N^{-1/12}\mathrm{Ai}\Big(2^{1/2}N^{1/6}(x-\sqrt{2N})\Big)\\
&=\ 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}\Big(2^{1/2}N^{1/6}(x-\sqrt{2N})\Big),
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\sim 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(x)\quad\text{in}\quad N\to\infty\tag{2.11.16}$$

という漸近評価が得られる.

(2.11.16) の両辺を x で微分すると

$$\varphi'\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\times\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}\sim 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}'(x)$$

であるが, ここで (2.5.10), すなわち

$$\varphi_n'(x)=-x\varphi_n(x)+\sqrt{2n}\varphi_{n-1}(x)$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
&-\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\times\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}\\
&+\sqrt{2N}\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\times\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}\\
\sim\quad & 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}'(x)
\end{aligned}
$$

という等式を得る．ここで $N\to\infty$ では

$$
\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\sim\sqrt{2N}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&-\varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)+\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\\
\sim\quad & \frac{1}{\sqrt{2N}}\times\frac{\sqrt{2}}{N^{-1/6}}\times 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}'(x)\\
=\quad & 2^{1/4}N^{-5/12}\mathrm{Ai}'(x)
\end{aligned}
$$

である．よって

$$
\begin{aligned}
\varphi_{N-1}\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)\quad&\sim\quad \varphi_N\left(\sqrt{2N}+\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}x\right)+2^{1/4}N^{-5/12}\mathrm{Ai}'(x)\\
&\sim\quad 2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(x)+2^{1/4}N^{-5/12}\mathrm{Ai}'(x)
\end{aligned}
\tag{2.11.17}
$$

という漸近評価が得られる．(2.11.16) と (2.11.17) を (2.11.11) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&I(x,y)\\
=\quad&\frac{1}{x-y}\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2}}\Bigg[2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(x)\Big\{2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(y)+2^{1/4}N^{-5/12}\mathrm{Ai}'(y)\Big\}\\
&\qquad-\Big\{2^{1/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(x)+2^{1/4}N^{-5/12}\mathrm{Ai}'(x)\Big\}\Bigg]\\
&\frac{1}{x-y}\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{2}}\Bigg[2^{1/2}N^{-1/6}\Big(\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}(y)-\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}(y)\Big)+2^{1/2}N^{-1/2}\Big(\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y)-\mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)\Big)\Bigg]\\
=\quad&\frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y)-\mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}
\end{aligned}
$$

となる．以上より

$$
\lim_{N\to\infty}\sqrt{t}N^{-1/6}K_N^t\Big(2\sqrt{Nt}+\sqrt{t}N^{-1/6}x,2\sqrt{Nt}+\sqrt{t}N^{-1/6}y\Big)=\frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y)-\mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}\tag{2.11.18}
$$

が示せたことになる．以後

$$
K^{\mathrm{Airy}}(x,y)=\frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y)-\mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}\tag{2.11.19}
$$

と書き，これを**エアリー核 (Airy kernel)** とよぶ．

(2.11.19) で $y \to x$ の極限をとると，(2.5.5), (2.5.6) の議論より

$$
\begin{aligned}
K^{\mathrm{Airy}}(x,x) &= \left\{\frac{d}{dx}\mathrm{Ai}(x)\right\}\mathrm{Ai}'(x) - \left\{\frac{d}{dx}\mathrm{Ai}'(x)\right\}\mathrm{Ai}(x) \\
&= (\mathrm{Ai}'(x))^2 - \mathrm{Ai}''(x)\mathrm{Ai}(x) \\
&= (\mathrm{Ai}'(x))^2 - x(\mathrm{Ai}(x))^2 \qquad (2.11.20)
\end{aligned}
$$

を得る．ただしここで，(2.11.15) を用いた．

以上より, $u \to \infty$ で

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(u) &\simeq K^{\mathrm{Airy}}(u,u) \\
&= (\mathrm{Ai}'(u))^2 - u(\mathrm{Ai}(u))^2 \qquad (2.11.21)
\end{aligned}
$$

ということになるので，(2.11.2) より，このとき

$$
\begin{aligned}
(q(u))^2 &= -\frac{d\overline{R}(u)}{du} \\
&\sim -\frac{d}{du}\left\{(\mathrm{Ai}'(u))^2 - u(\mathrm{Ai}(u))^2\right\} \\
&= -2\mathrm{Ai}'(u)\mathrm{Ai}''(u) - (\mathrm{Ai}(u))^2 + 2u\mathrm{Ai}(u)\mathrm{Ai}'(u) \\
&= -2\mathrm{Ai}'(u)\Big\{\mathrm{Ai}''(u) - u\mathrm{Ai}(u)\Big\} + (\mathrm{Ai}(u))^2 \\
&= (\mathrm{Ai}(u))^2
\end{aligned}
$$

であることになる．ここで再び (2.11.15) を用いた．つまり

$$
q(u) \simeq \mathrm{Ai}(u) \quad \mathrm{in} \quad u \to \infty \qquad (2.11.22)
$$

という漸近形が定まったことになる．このような漸近形を持つ Painlevé II の解は唯一であることが知られている．q としてこれを採用したとき

$$
F_2(x) = \exp\left(-\int_x^\infty (y-x)(q(y))^2 dy\right) \qquad (2.11.23)
$$

を **Tracy-Widom の (累積) 分布関数**という．

付 録 A　補足

A.1　行列式について

A.1.1　定義

$n \times n$ の正方行列 $F = (F_{jk})_{1 \le j,k \le n}$ に対して，**行列式** $\det F$ は

$$\begin{aligned}\det F &= \det_{1 \le j,k \le n} \Big[F_{jk} \Big] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} F_{j\sigma(j)} \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

で定義される．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n この変数 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の**置換全体の集合**であり，これは位数 $|\mathfrak{S}_n| = n!$ の有限群 (置換群) を成す．また，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ が偶置換のとき}, \\ -1, & \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases} \tag{A.1.2}$$

である．

A.1.2　置換を巡回置換の積で表わす表式

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は一般に**巡回置換の積**として表わされる，例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である．置換 σ を巡回置換の積に分解したときに得られる巡回置換の数を $\ell(\sigma)$ と書くことにすると，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-\ell(\sigma)} \tag{A.1.3}$$

という関係が成り立つ．以上より，行列式 (A.1.1) は次のようにも表わされる．

$$\det F = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{n-\ell(\sigma)} \prod_{\mathsf{c}=1}^{\ell(\sigma)} (F_{ab} F_{bc} F_{cd} \cdots F_{\beta a}) \tag{A.1.4}$$

ただし，巡回置換を

$$\mathsf{c} = \begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & \beta \\ b & c & d & \cdots & a \end{pmatrix}$$

と表わした．

A.1.3 Heine の公式

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\left[\phi_j(x_k)\right] \det_{1\le \ell,m\le N}\left[\bar{\phi}_\ell(x_m)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^N \phi_j(x_{\sigma(j)}) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\tau)\prod_{\ell=1}^N \bar{\phi}_{\tau(\ell)}(x_\ell) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x}\prod_{k=1}^N \phi_j(x_{\sigma(j)})\prod_{\ell=1}^N \bar{\phi}_{\tau(\ell)}(x_\ell)
\end{aligned}
$$

を考える．ここで，任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して

$$
\prod_{\ell=1}^N \bar{\phi}_{\tau(\ell)}(x_\ell) = \prod_{\ell=1}^N \bar{\phi}_{\tau(\sigma(\ell))}(x_{\sigma(\ell)})
$$

である．そこで置換 σ と τ を合成したものを

$$
\rho = \tau(\sigma) = \sigma\circ\tau
$$

と書くと，

$$
\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\rho)
$$

なので，

$$
I = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\rho)\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x}\prod_{j=1}^N\left\{\phi_j(x_{\sigma(j)})\bar{\phi}_{\rho(j)}(x_{\sigma(j)})\right\}
$$

である．また

$$
\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x}\cdots = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\int_{\mathbb{R}^N_<}\prod_{j=1}^N dx_{\sigma(j)}\cdots = \int_{\mathbb{R}^N}\prod_{j=1}^N dx_j\cdots
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\rho)\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x}\prod_{j=1}^N\left\{\phi_j(x_j)\bar{\phi}_{\rho(j)}(x_j)\right\} \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\rho)\prod_{j=1}^N\int_{-\infty}^{\infty} dx_j\,\phi_j(y_j)\bar{\phi}_{\rho(j)}(x_j) \\
&= \det_{1\le j,k\le N}\left[\int_{\mathbb{R}} dx\,\phi_j(x)\bar{\phi}_k(x)\right]
\end{aligned}
$$

となる．すなわち

$$
\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{x} \det_{1\le j,k\le N}\left[\phi_j(x_k)\right] \det_{1\le \ell,m\le N}\left[\bar{\phi}_\ell(x_m)\right] = \det_{1\le j,k\le N}\left[\int_{\mathbb{R}} dx\,\phi_j(x)\bar{\phi}_k(x)\right] \tag{A.1.5}
$$

を得る．これは **Heine の公式**とよばれる．

A.1.4 特性多項式とフレドホルムの展開公式

$n\times n$ の単位行列を I_n と書く．F を $n\times n$ の正方行列としたとき，$\det(I_n-F)$ は次のように展開される．これを**フレドホルムの展開公式**という．

$$\begin{aligned}
&\det_{1\le j,k\le n}\Big[\delta_{jk}-F_{jk}\Big]\\
&= 1-\sum_{j=1}^{n}F_{jj}+\sum_{1\le j<k\le n}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk}\\ F_{kj} & F_{kk}\end{vmatrix}-\sum_{1\le j<k<\ell\le n}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk} & F_{j\ell}\\ F_{kj} & F_{kk} & F_{k\ell}\\ F_{\ell j} & F_{\ell k} & F_{\ell\ell}\end{vmatrix}+\cdots\\
&= 1-\sum_{j=1}^{n}F_{jj}+\frac{1}{2}\sum_{j\ne k}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk}\\ F_{kj} & F_{kk}\end{vmatrix}-\frac{1}{3!}\sum_{j\ne k\ne\ell}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk} & F_{j\ell}\\ F_{kj} & F_{kk} & F_{k\ell}\\ F_{\ell j} & F_{\ell k} & F_{\ell\ell}\end{vmatrix}+\cdots\\
&= 1-\sum_{j=1}^{n}F_{jj}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk}\\ F_{kj} & F_{kk}\end{vmatrix}-\frac{1}{3!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\begin{vmatrix}F_{jj} & F_{jk} & F_{j\ell}\\ F_{kj} & F_{kk} & F_{k\ell}\\ F_{\ell j} & F_{\ell k} & F_{\ell\ell}\end{vmatrix}+\cdots\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n}\det_{1\le\ell,m\le k}\Big[F_{j_\ell j_m}\Big].
\end{aligned}\tag{A.1.6}$$

この公式は，行列 $F=(F_{jk})_{1\le j,k\le n}$ に対する**特性多項式**

$$f_F(x)=\det[xI_n-F]=\det_{1\le j,k\le n}\Big[x\delta_{jk}-F_{jk}\Big]\tag{A.1.7}$$

の以下に示す表式で $x=1$ と置くことにより求められる．

2 項展開をすると

$$\begin{aligned}
&\det_{1\le j,k\le n}\Big[x\delta_{jk}-F_{jk}\Big]\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{N}\Big(x\delta_{j\sigma(j)}-F_{j\sigma(j)}\Big)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{n'=0}^{n}(-1)^{n'}x^{n-n'}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{n'}\le n}\prod_{k=1}^{n'}F_{j_k\sigma(j_k)}\prod_{1\le\ell\le n:\ell\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}}\delta_{\ell\,\sigma(\ell)}\\
&= \sum_{n'=0}^{n}(-1)^{n'}x^{n-n'}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{n'}\le n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n'}F_{j_k\sigma(j_k)}\prod_{1\le\ell\le n:\ell\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}}\delta_{\ell\sigma(\ell)}
\end{aligned}$$

となるが，

$$\prod_{1\le\ell\le n:\ell\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}}\delta_{\ell\sigma(\ell)}$$

は，$\ell\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}$ である $n-n'$ 個の ℓ に対して，$\sigma(\ell)=\ell$ でなければ零である．そこで $\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}$ という n' 個の変数に対する置換全体の集合を $\mathfrak{S}_{n'}(j_1,j_2,\cdots,j_{n'})$ と書くことにすると，

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n}F_{j_k\sigma(j_k)}\prod_{1\le\ell\le n:\ell\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_{n'}\}}\delta_{\ell\sigma(\ell)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n'}(j_1,j_2,\cdots,j_{n'})}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n'}F_{j_k\sigma(j_k)}$$

と書ける．これは，元の $n \times n$ の行列 $F = (F_{jk})_{1 \le j,k \le n}$ の j_1 行, j_2 行，..., $j_{n'}$ 行と j_1 列, j_2 列，..., $j_{n'}$ 列からなる部分だけを取り出して作られる小行列の行列式に他ならない．これを

$$\begin{vmatrix} F_{j_1 j_1} & F_{j_1 j_2} & \cdots & F_{j_1 j_{n'}} \\ F_{j_2 j_1} & F_{j_2 j_2} & \cdots & F_{j_2 j_{n'}} \\ & \cdots & \cdots & \\ F_{j_{n'} j_1} & F_{j_{n'} j_2} & \cdots & F_{j_{n'} j_{n'}} \end{vmatrix} = \det_{1 \le \ell, k \le n'} \left[F_{j_\ell, j_k} \right]$$

と書くと，特性多項式は

$$f_F(x) = \sum_{n'=0}^{n} (-1)^{n'} x^{n-n'} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n'} \le n} \det_{1 \le \ell, k \le n'} \left[F_{j_\ell, j_k} \right] \tag{A.1.8}$$

と書けることになる．この右辺のうち，特に $n' = 0$ の項は x^n であり，$n' = 1$ の項は

$$-x^{n-1} \sum_{1 \le j_1 \le n} F_{j_1 j_1} = -x^{n-1} \mathrm{Tr} F$$

である．ただし

$$\mathrm{Tr} F = \sum_{j=1}^{n} F_{j\,j}$$

は行列 F の**トレース**を表わす．また，$n' = n$ の項は $\det_{1 \le j,k \le n}(F_{jk})$ である．つまり

$$f_F(x) = x^n - x^{n-1} \mathrm{Tr} F + x^{n-2} \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} \begin{vmatrix} F_{j_1 j_2} & F_{j_1 j_2} \\ F_{j_2 j_1} & F_{j_2 j_2} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^n \det_{1 \le j,k \le n}(F_{jk}) \tag{A.1.9}$$

という展開になっている．ここで特に $x = 1$ と置くとフレドホルムの展開公式 (A.1.6) が得られる．

A.2　パンルヴェ方程式について

A.2.1　相似簡約

偏微分方程式の**相似簡約 (similarity reduction)** とそれによって得られる**自己相似解**について述べる．ここでは

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} u, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

といった略記を用いることにする．

例 1　熱伝導方程式 (拡散方程式) の場合

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx} \tag{A.2.1}$$

を考える．いまこの方程式のある解を $u(x,t)$ とすると，任意のパラメータ λ と α に対して

$$v(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t) \tag{A.2.2}$$

も (A.2.1) の解になる．つまり (A.2.2) は (A.2.1) の解を解に移す変換である．この変換で不変な解は

$$\lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t) = u(x,t) \tag{A.2.3}$$

を満たすことになる．このような解を**自己相似解**とよぶ．この条件式 (A.2.3) の両辺を，パラメータ λ で微分すると

$$\alpha\lambda^{\alpha-1}u(\lambda x,\lambda^2 t)+x\lambda^{\alpha}u_t(\lambda x,\lambda^2 t)+2\lambda t\times\lambda^{\alpha}u_t(\lambda x,\lambda^2 t)=0$$

となるが，ここで $\lambda=1$ とすると

$$\alpha u(x,t)+xu_x(x,t)+2tu_t(x,t)=0 \tag{A.2.4}$$

が得られる．(A.2.1) と (A.2.4) を連立させる．この 2 式より u_t を消去すると

$$\alpha u+xu_x+tu_{xx}=0$$

を得るが，ここでパラメータ $\alpha=1$ とすると

$$u+xu_x+tu_{xx}=0$$

つまり，

$$(xu)_x+tu_{xx}=0$$

となる．これを x で積分すると，t のみの関数を $C_1(t)$ として

$$xu+tu_x=C_1(t)$$

を得る．いま特に $C_1(t)=0$ とすると

$$u_x=-\frac{x}{t}u$$

となるので，再び x で積分すると

$$u=C_2(t)e^{-x^2/2t}$$

となる．t のみの関数である $C_2(t)$ を定めるには，これを (A.2.1) に代入してみればよい．すると

$$\frac{d}{dt}C_2(t)=-\frac{1}{2t}C_2(t)$$

となるので，c を定数として，

$$C_2(t)=\frac{c}{\sqrt{t}}$$

と定まる．よって，自己相似解として

$$u(x,t)=\frac{c}{\sqrt{t}}e^{-x^2/2t}$$

が得られる．これを

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=1$$

と規格化すると，

$$c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

と定まるが，これは**熱核** $G(t;x|0)$ に他ならない．

例 2　modified Korteweg-de Vries (mKdV) の場合

mKdV 方程式

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{A.2.5}$$

を考える．次の $u \mapsto v$ は解を解に移す変換である．

$$v(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^3 t) \tag{A.2.6}$$

この相似変換で不変であるための条件は

$$\lambda u(\lambda x, \lambda^3 t) = u(x,t) \tag{A.2.7}$$

である．これを λ で微分して $\lambda = 1$ とおくと

$$u + xu_x + 3tu_t = 0 \tag{A.2.8}$$

が得られる．(A.2.5) と (A.2.8) を連立させて u_t を消去すると

$$u + xu_x - 3t(u_{xxx} - 6u^2 u_x) = 0$$

すなわち

$$(ux)_x - 3t(u_{xxx} - 6u^2 u_x) = 0$$

となる．これを x で積分すると

$$xu - 3t(u_{xx} - 2u^3) = C(t) \tag{A.2.9}$$

となる．ここで，自己相似条件 (A.2.7) において特に

$$\lambda = (3t)^{-1/3}$$

とおくと

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(3t)^{1/3}} u\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}, \frac{t}{3t}\right) \\ &= \frac{1}{(3t)^{1/3}} u\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}, \frac{1}{3}\right) \\ &\equiv \frac{1}{(3t)^{1/3}} \eta(\xi) \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

となる．ただし，

$$\xi = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$$

である．こうすると，

$$u_{xx} = \frac{1}{(3t)^{1/3}} \eta'' \times \left(\frac{1}{(3t)^{1/3}}\right)^2 = \frac{1}{3t}\eta''$$

となるので，これらを (A.2.9) に代入すると

$$x\frac{1}{(3t)^{1/3}}\eta(\xi) - 3t\left(\frac{1}{3t}\eta'' - \frac{2}{3t}\eta^3\right) = C(t),$$

すなわち，

$$\xi\eta - (\eta'' - 2\eta^3) = C(t)$$

となる．ここで特に $C(t) = 0$ とすると

$$\eta'' = \xi\eta + 2\eta^3 \tag{A.2.11}$$

となる．これは **II 型のパンルヴェ方程式 (the second Painlevé equation)**

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha \tag{A.2.12}$$

で $\alpha = 0$ とした場合に等しい.

付 録B　問題解答

B.1　第 1 章

1.1.1

$$
\begin{aligned}
G(t-s;y|x)G(u-t;z|y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(t-s)(u-t)}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}-\frac{(z-y)^2}{2(u-t)}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{(t-s)(u-t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}-\frac{z^2}{2(u-t)}\right)\times\exp\Big(f(y)\Big),
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
f(y) = -\frac{y^2}{2(t-s)}+\frac{xy}{t-s}+\frac{yz}{u-t}-\frac{y^2}{2(u-t)}
$$

である．$f(y)$ を y について平方完成すると

$$
f(y) = -\frac{u-s}{2(t-s)(u-t)}\left[y-\frac{(u-t)x+(t-s)z}{u-s}\right]^2+\frac{\Big\{(u-t)x+(t-s)z\Big\}^2}{2(t-s)(u-t)(u-s)}
$$

となる．従って，y についてガウス積分を行うと

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}dy\,G(t-s;y|x)G(u-t;z|y)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{(t-s)(u-t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}-\frac{z^2}{2(u-t)}\right)\exp\left(\frac{\Big\{(u-t)x+(t-s)z\Big\}^2}{2(t-s)(u-t)(u-s)}\right)\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\exp\left(-\frac{u-s}{2(t-s)(u-t)}\left[y-\frac{(u-t)x+(t-s)z}{u-s}\right]^2\right)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{(t-s)(u-t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}-\frac{z^2}{2(u-t)}\right)\exp\left(\frac{\Big\{(u-t)x+(t-s)z\Big\}^2}{2(t-s)(u-t)(u-s)}\right)\\
&\qquad\times\sqrt{\frac{2\pi(t-s)(u-t)}{u-s}}
\end{aligned}
$$

この右辺を整理すると

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi(u-s)}}\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2(u-s)}\right) = G(u-s;z|x)
$$

に等しいことが分かる．

1.1.2 (1.1.1) より $p(t;x)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t;x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t;x)$$

を満たし，(1.1.2) より

$$\lim_{t\to 0} p(t;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\rho(y)dy = \rho(x)$$

であるから初期条件も満たす．また，(1.1.3) と (1.1.6) より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(t;x)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\rho(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, G(t;x|y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\rho(y) = 1\end{aligned}$$

であるから，正しく規格化されている．

1.2.1 定義より

$$\begin{aligned}g_{N,T}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})g_{N,T}(t,\mathbf{y};u,\mathbf{z}) &= \frac{f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})\mathcal{N}_N(T-t,\mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s;\mathbf{x})} \times \frac{f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y})\mathcal{N}_N(T-u,\mathbf{z})}{\mathcal{N}_N(T-t;\mathbf{y})} \\ &= \frac{\mathcal{N}_N(T-u;\mathbf{z})}{\mathcal{N}_N(T-s;\mathbf{x})} f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y}) \qquad \text{(B.1.1)}\end{aligned}$$

である．ここで行列式の定義を用いると

$$\begin{aligned}& f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y}) \\ =\ & \det_{1\le j,k\le N}\Big[G(t-s;y_k|x_j)\Big] \det_{1\le \ell,m\le N}\Big[G(u-t;z_m|y_\ell)\Big] \\ =\ & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{N} G(t-s;y_{\sigma(j)}|x_j) \times \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma')\prod_{\ell=1}^{N} G(u-t;z_{\sigma'(\ell)}|y_\ell) \\ =\ & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma')\prod_{j=1}^{N} G(t-s;y_{\sigma(j)}|x_j)\prod_{\ell=1}^{N} G(u-t;z_{\sigma'(\ell)}|y_\ell)\end{aligned}$$

である．任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して

$$\prod_{\ell=1}^{N} G(u-t;z_{\sigma'(\ell)}|y_\ell) = \prod_{\ell=1}^{N} G(u-t;z_{\sigma'(\sigma(\ell))}|y_{\sigma(\ell)})$$

が成り立つ．いま，置換 σ と σ' を合成したものを

$$\rho = \sigma'(\sigma) = \sigma\circ\sigma'$$

と書くと，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma') = \mathrm{sgn}(\rho)$$

であるから，

$$\begin{aligned}& f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y}) \\ =\ & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\rho)\prod_{j=1}^{N}\Big\{G(t-s;y_{\sigma(j)}|x_j)G(u-t;z_{\rho(j)}|y_{\sigma(j)})\Big\}\end{aligned}$$

となる．この両辺の積分 $\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y}\cdots$ を計算したい．ところが，ここで

$$\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y}\cdots = \int_{\mathbb{R}^N_<} \prod_{j=1}^{N} dy_j \cdots = \int_{\mathbb{R}^N_<} \prod_{j=1}^{N} dy_{\sigma(j)} \cdots$$

であるので，

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \int_{\mathbb{R}^N_<} \prod_{j=1}^{N} dy_{\sigma(j)} \cdots = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{N} dy_j \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_N \cdots$$

である．従って，積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y}\, f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y}) \\
= &\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^{N} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy_j\, G(t-s;y_j|x_j) G(u-t;z_{\rho(j)}|y_j) \right\}
\end{aligned}$$

となるが，各 $G(t-s;y_j|x_j)$ は Chapman-Kolmogorov の等式を満たすので，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y}\, f_N(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x}) f_N(u-t;\mathbf{z}|\mathbf{y}) \\
= &\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^{N} G(u-s;z_{\rho(j)}|x_j) \\
= &\det_{1\le j,k\le N} \Big[G(u-s;z_k|x_j) \Big] \\
= &f_N(u-s;\mathbf{z}|\mathbf{x})
\end{aligned}$$

が得られる．これを (B.1.1) と合わせると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_<} d\mathbf{y}\, g_{N,T}(s;\mathbf{x};t,\mathbf{y}) g_{N,T}(t,\mathbf{y};u,\mathbf{z}) &= \frac{\mathcal{N}_N(T-u;\mathbf{z})}{\mathcal{N}_N(T-s;\mathbf{z})} f_N(u-s;\mathbf{z}|\mathbf{x}) \\
&= g_{N,T}(s,\mathbf{x};u,\mathbf{z})
\end{aligned}$$

が証明される．

1.3.1

$$V_N(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \tag{B.1.2}$$

を考える．これは x_1 については次数 $N-1$ の多項式である．もしも $x_1 = x_j, \quad j = 2,3,\cdots N$, とすると，この行列式の第 1 列と第 j 列とが等しくなるので，零である．従って

$$V_N(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \prod_{2\le k\le N} (x_k - x_1)\tilde{V}(x_2,\cdots,x_N) \tag{B.1.3}$$

と書ける．ここで $\tilde{V}$ は $x_2, \cdots, x_N$ の多項式である．定義式 (B.1.2) より，$V_N(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の x_1^{N-1} の係数は，V_N の $(1, N)$-成分 x_1^{N-1} の余行列式

$$(-1)^{N+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \\ x_2^{N-2} & x_3^{N-2} & \cdots & x_N^{N-2} \end{vmatrix} = (-1)^{N+1} V_{N-1}(x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

である．他方 (B.1.3) を見ると，$V_N(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の x_1^{N-1} の係数は

$$(-1)^{N-1} \tilde{V}(x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

である．従って

$$\tilde{V}(x_2, x_3, \cdots, x_N) = V_{N-1}(x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

であり，(B.1.3) は漸化式

$$V_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_{2 \le k \le N} (x_k - x_1) V_{N-1}(x_2, \cdots, x_N)$$

を与える．ところが

$$V_2(x_{N-1}, x_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{N-1} & x_N \end{vmatrix} = x_N - x_{N-1}$$

であるから，この漸化式の答えは

$$V_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_{1 \le j < k \le N} (x_k - x_j)$$

と定められる．

B.2　第 2 章

2.2.1

$$\begin{aligned} \det_{1 \le j,k \le N} \Big[a_{jk} b_k \Big] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} \Big\{ a_{j\sigma(j)} b_{\sigma(j)} \Big\} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} a_{j\sigma(j)} \times \prod_{\ell=1}^{N} b_{\sigma(\ell)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} a_{j\sigma(j)} \times \prod_{\ell=1}^{N} b_{\ell} \\ &= \det_{1 \le j,k \le N} \Big[a_{jk} \Big] \times \prod_{\ell=1}^{N} b_{\ell}. \end{aligned}$$

同様に

$$\det_{1 \le j,k \le N} \Big[b_j a_{jk} \Big] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} \Big\{ b_j a_{j\sigma(j)} \Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{\ell=1}^{N} b_\ell \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} a_{j\sigma(j)} \\
&= \prod_{\ell=1}^{N} b_\ell \times \det_{1\le j,k\le N}\Big[a_{jk}\Big].
\end{aligned}
$$

2.2.2 行列式の多重線形性より，

$$
\begin{aligned}
h_N(\mathbf{x}) &= \det_{1\le j,k\le N}\Big[x_k^{j-1}\Big] \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \\
&= \Big\{\prod_{k=1}^{N} b_{k-1,\,k-1}\Big\}^{-1} \begin{vmatrix} b_{00} & b_{00} & \cdots & b_{00} \\ b_{11}x_1 & b_{11}x_2 & \cdots & b_{11}x_N \\ b_{22}x_1^2 & b_{22}x_2^2 & \cdots & b_{22}x_N^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{N-1\,N-1}x_1^{N-1} & b_{N-1\,N-1}x_2^{N-1} & \cdots & b_{N-1\,N-1}x_N^{N-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る．2 行目に 1 行目 $\times\dfrac{b_{10}}{b_{00}}$ を加えても，行列式はこのような基本変形で変わらないので，

$$
h_N(\mathbf{x}) = \Big\{\prod_{k=1}^{N} b_{k-1,\,k-1}\Big\}^{-1} \begin{vmatrix} b_{00} & b_{00} & \cdots & b_{00} \\ b_{11}x_1+b_{10} & b_{11}x_2+b_{10} & \cdots & b_{11}x_N+b_{10} \\ b_{22}x_1^2 & b_{22}x_2^2 & \cdots & b_{22}x_N^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{N-1\,N-1}x_1^{N-1} & b_{N-1\,N-1}x_2^{N-1} & \cdots & b_{N-1\,N-1}x_N^{N-1} \end{vmatrix}.
$$

次に 3 行目に 2 行目 $\times\dfrac{b_{21}}{b_{11}}$ を加えて，さらに 1 行目 $\times\left(\dfrac{b_{20}}{b_{00}}-\dfrac{b_{10}b_{21}}{b_{00}b_{11}}\right)$ を加えると，

$$
h_N(\mathbf{x}) = \Big\{\prod_{k=1}^{N} b_{k-1,\,k-1}\Big\}^{-1} \begin{vmatrix} b_{00} & b_{00} & \cdots & b_{00} \\ b_{11}x_1+b_{10} & b_{11}x_2+b_{10} & \cdots & b_{11}x_N+b_{10} \\ b_{22}x_1^2+b_{21}x_1+b_{20} & b_{22}x_2^2+b_{21}x_2+b_{20} & \cdots & b_{22}x_N^2+b_{21}x_N+b_{20} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{N-1\,N-1}x_1^{N-1} & b_{N-1\,N-1}x_2^{N-1} & \cdots & b_{N-1\,N-1}x_N^{N-1} \end{vmatrix}
$$

となる．以下同様に基本変形を繰り返すと

$$
h_N(\mathbf{x}) = \Big\{\prod_{k=1}^{N} b_{k-1,\,k-1}\Big\}^{-1} \begin{vmatrix} M_0(x_1) & M_0(x_2) & \cdots & M_0(x_N) \\ M_1(x_1) & M_1(x_2) & \cdots & M_1(x_N) \\ & \cdots & \cdots & \\ M_{N-1}(x_1) & M_{N-1}(x_2) & \cdots & M_{N-1}(x_N) \end{vmatrix}
$$

を得る．

2.3.1 $n=3$ の場合

$$
\begin{aligned}
&\det_{1\le j,k\le 3}\Big[\delta_{jk}-F_{jk}\Big] \\
=&\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{3}(\delta_{j\sigma(j)}-F_{j\sigma(j)}) \\
=&\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)(\delta_{1\sigma(1)}-F_{1\sigma(1)})(\delta_{2\sigma(2)}-F_{2\sigma(2)})(\delta_{3\sigma(3)}-F_{3\sigma(3)}) \\
=&\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\Bigg[\delta_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}\delta_{3\sigma(3)}-\Big\{F_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}\delta_{3\sigma(3)}+\delta_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}\delta_{3\sigma(3)}+\delta_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}\Big\} \\
&\qquad +\Big\{F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}\delta_{3\sigma(3)}+F_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}+\delta_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}\Big\}-F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}\Bigg] \\
=&\ 1-(F_{11}+F_{22}+F_{33}) \\
+&\ \Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}\delta_{3\sigma(3)}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}\Big] \\
-&\ \det_{1\le j,k\le 3}F_{jk}.
\end{aligned}
$$

ここで，文字 j,k の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_2(j,k)$ と書くことにすると，上の第 3 項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2(1,2)}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2(1,3)}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{3\sigma(3)}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2(2,3)}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)} \\
=&\ \begin{vmatrix}F_{11}&F_{12}\\F_{21}&F_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_{11}&F_{13}\\F_{31}&F_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_{22}&F_{23}\\F_{32}&F_{33}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，結局

$$
\begin{aligned}
&\det_{1\le j,k\le 3}\Big[x\delta_{jk}-F_{jk}\Big] \\
=&\ 1-(F_{11}+F_{22}+F_{33})+\left(\begin{vmatrix}F_{11}&F_{12}\\F_{21}&F_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_{11}&F_{13}\\F_{31}&F_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_{22}&F_{23}\\F_{32}&F_{33}\end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る．

2.4.1 (2.4.11) の正規直交性より

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\rho_N^t(\{x\})dx &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\sum_{j=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^2\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)dx \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^2(\xi)d\xi \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}1=N \qquad \text{(B.2.4)}
\end{aligned}
$$

となる．確かに N 粒子存在するのでこれは正しい結果である．

2.5.1 (2.5.8) のところで (2.5.1) を用いると

$$\begin{aligned}\varphi_n'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\Big\{-xe^{-x^2/2}H_n(x)+e^{-x^2/2}(2xH_n(x)-H_{n+1}(x))\Big\}\\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\Big\{xe^{-x^2/2}H_n(x)-e^{-x^2/2}H_{n+1}(x)\Big\}\\ &= x\varphi_n(x)-\sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1}(x).\end{aligned}$$

が得られる.

2.7.1

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\rho(\beta,y)=\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\Big\{(1-K_N^t(a))^{-1}\Big\}(\beta,y)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\Big\{K_N^t(a)\Big\}^k(\beta,y)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_{k-1}\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}K_N^t(\beta,x_1)\mathbf{1}_{\{x_1\ge a\}}\times\cdots\times K_N^t(x_{k-1},y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty}d\beta\int_{a}^{\infty}dx_1\cdots\int_{a}^{\infty}dx_{k-1}\,A(\beta)K_N^t(\beta,x_1)\times\cdots\times K_N^t(x_{k-1},y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\end{aligned}$$

となる. ここで

$$K_N^t(x,y)=K_N^t(y,x)$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\rho(\beta,y)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty}d\beta\int_{a}^{\infty}dx_1\cdots\int_{a}^{\infty}dx_{k-1}\,K_N^t(y,x_{k-1})\times\cdots\times K_N^t(x_1,\beta)A(\beta)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a}^{\infty}d\beta\left[\Big\{K_N^t(a)\Big\}^k\right](y,\beta)A(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}d\beta\left[(1-K_N^t(a))^{-1}\right](y,\beta)A(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}d\beta\rho(y,\beta)A(\beta)\times\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}\end{aligned}$$

となる. つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,A(\beta)\mathbf{1}_{\{\beta\ge a\}}\rho(\beta,y)=Q(y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}$$

が得られる.

2.8.1

$$\begin{aligned}\frac{dw}{da} &= \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,P(y)\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}B(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dy\left\{\frac{\partial P(y)}{\partial a}\mathbf{1}_{\{y\ge a\}}-P(y)\delta(y-a)\right\}B(y)\end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(y)}{\partial a} &= \left[\left\{\frac{d}{da}(1-K_N^t(a))^{-1}\right\}B\right](y) \\
&= -R(y,a)\int_{-\infty}^{\infty}\rho(a,y)B(y)dy \\
&= -R(y,a)P(a)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{da} &= -\int_{-\infty}^{\infty}dy\left\{R(y,a)+\delta(y-a)\right\}\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y)P(a) \\
&= -P(a)\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\rho(y,a)\mathbf{1}_{\{y\geq a\}}B(y) \\
&= -P(a)P(a)\mathbf{1}_{\{a\geq a\}} \\
&= -P(a)^2
\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後から 2 番目の等号で (2.8.12) を用いた.

2.9.1

$$\begin{aligned}
R(a) &= -\frac{a}{t}pq+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q^2 \\
\frac{dq}{da} &= -\frac{a}{2t}q+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p \\
\frac{dp}{da} &= \frac{a}{2t}p-\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q \\
\frac{du}{da} &= -q^2 \\
\frac{dw}{da} &= -p^2.
\end{aligned}$$

$R(a)$ の両辺を a で微分すると

$$\begin{aligned}
R' &\equiv \frac{dR(a)}{da} \\
&= -\frac{1}{t}pq-\frac{a}{t}p'q-\frac{a}{t}pq'-\frac{u'}{t}p^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)\times 2pp'+\frac{w'}{t}q^2+\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)\times 2qq' \\
&= -\frac{1}{t}pq-\frac{a^2}{2t^2}pq+\frac{a}{t}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)q^2 \\
&\quad +\frac{a^2}{2t}pq-\frac{a}{t}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p^2 \\
&\quad +\frac{1}{t}p^2q^2+\frac{a}{t}\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)p^2-\left(\sqrt{\frac{N}{t}}-\frac{u}{t}\right)\left(\sqrt{\frac{N}{t}}+\frac{w}{t}\right)\times 2pq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{t}p^2q^2 - \frac{a}{t}\left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right)q^2 + \left(\sqrt{\frac{N}{t}} - \frac{u}{t}\right)\left(\sqrt{\frac{N}{t}} + \frac{w}{t}\right) \times 2pq \\
= \quad & -\frac{1}{t}pq \qquad \text{(B.2.5)}
\end{aligned}
$$

2.11.1

$$(q')^2 + qq'' - 2uq^2 - \int_u^\infty (q(x))^2 dx - 3q^4 = 0$$

の両辺を u で微分すると

$$
\begin{aligned}
& 3q'q'' + qq''' - q^2 - 4uqq' - 12q^3q = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & q\Big\{q''' - (q + uq' + 6q^2q')\Big\} + 3q'\Big\{q'' - (uq + 2q^3)\Big\} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & q\Big\{q'' - (uq + 2q^3)\Big\}' + 3q'\Big\{q'' - (uq + 2q^3)\Big\} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \Big(q\frac{d}{du} + 3q'\Big)\Big\{q'' - (uq + 2q^3)\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

関連図書

[1] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, (Springer, New York, 1984).

[2] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1191-1198.

[3] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence properties of birth and death processes, *Pacific J. Math.* **9** (1959) 1109-1140.

[4] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.* **9** (1959) 1141-1164.

[5] 香取眞理, 「非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列」,『応用数理』**13** (No.4) (2003) 16-27 ([296]-[307]).

[6] M. Katori and H. Tanemura, Scaling limit of vicious walks and two-matrix model, *Phys. Rev.* E **66** (2002) 011105/1-12; arXiv:cond-mat/0203549

[7] M. Katori and H. Tanemura, Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.* **75** (2003) 369-390; arXiv:math.PR/0203286.

[8] 香取眞理, 種村秀紀,「時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動」立教大学 SFR 自由プロジェクト研究講究録 No.5 『ゲージ理論・行列模型と非平衡統計物理学』, pp. 36-76 (2005).

[9] 香取眞理, 種村秀紀,「ランダム行列と非交叉過程」,『数理物理 2005 予稿集』, pp.43–64, 東京大学 (2005); 小嶋泉編, 『数理物理への誘い 6』(遊星社) の一部として出版予定.

[10] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II. With a wall, *J. Phys. A: Math. Phys.* **33** (2000) 8835-8866.

[11] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3nd ed. (Elsevier Academic Press, London, 2004).

[12] 永尾太郎,「ランダム行列の基礎」, 東大出版会, 2005.

[13] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.* **83** (1990) 96-131.