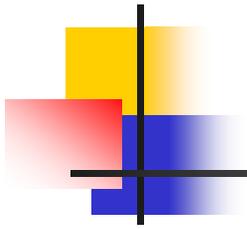


# 量子ウォークの特異な拡散現象

香取眞理 (中大理工)

九州大学大学院工学府 エネルギー量子工学専攻  
特別講演会  
2006年6月6日(火)

**M. Katori, S. Fujino, and N. Konno:**  
**Quantum walks and orbital states of a Weyl particle,**  
***Phys. Rev. A* 72, 012316 (2005)**

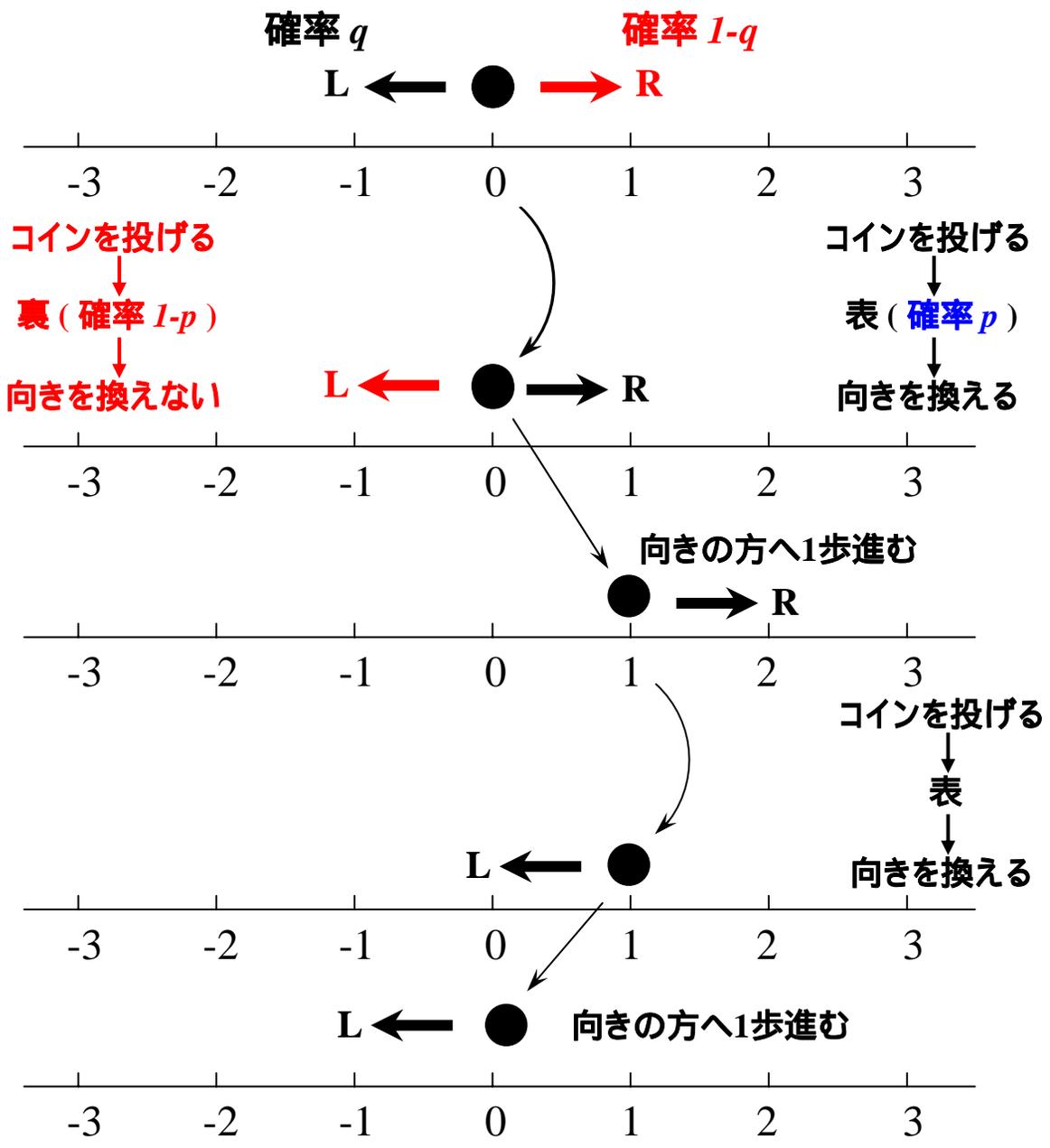


# 1. Introduction

---

## 1.1. ランダム・ターンモデル

量子ウォークモデルを導入するために、  
1次元古典ランダム・ウォークを  
ランダム・ターンモデルとして考え直してみる。



以上の動作をフーリエ積分を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} P_n^{(L)}(x) \\ P_n^{(R)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} W(k)^n \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

但し

$$W(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

もし表と裏の出る確率が等しいコイン( $p=1/2$ ) ならば、 $W(k)$  の固有値は  $\lambda = 0, \lambda = \cos k$  なので  $P_n^{(L)}(x) = P_n^{(R)}(x) \equiv P_n(x)/2$  となって粒子の初めの向き  $q$  には依らない。

この左右対称な場合は

$$P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \cos^n k = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} n \\ (n+x)/2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \cos^n k \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \left( \frac{e^{ik} + e^{-ik}}{2} \right)^n \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{\ell} e^{-i k \ell + i k (n - \ell)} \\
&= \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{i k (x + n - 2\ell)} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{(x+n)/2}
\end{aligned}$$

**2項分布**

## 連続極限 (拡散スケーリング極限)

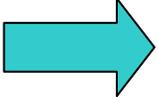
$$n = \frac{t}{\tau}, \quad x \Rightarrow \frac{x}{a}, \quad k \Rightarrow ak$$

$$(\cos k)^n \Rightarrow (\cos ak)^{t/\tau} = \left(1 - \frac{a^2 k^2}{2} + \dots\right)^{t/\tau} \rightarrow e^{-tk^2/2} \quad \text{as } \tau = a^2 \rightarrow 0.$$

$$p_t(x) = \lim_{\tau=a^2 \rightarrow 0} P_{t/\tau}(x/a)/a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left[-\frac{t}{2}k^2 + ikx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x) \quad \text{with} \quad \lim_{t \rightarrow 0} p_t(x) = \delta(x).$$

## 熱拡散方程式の解

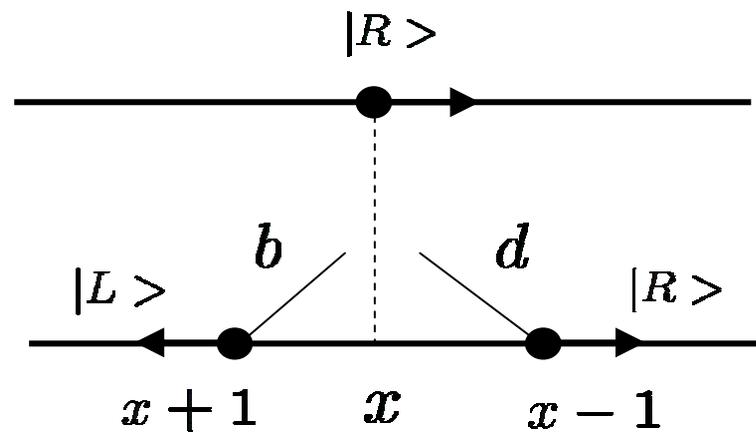
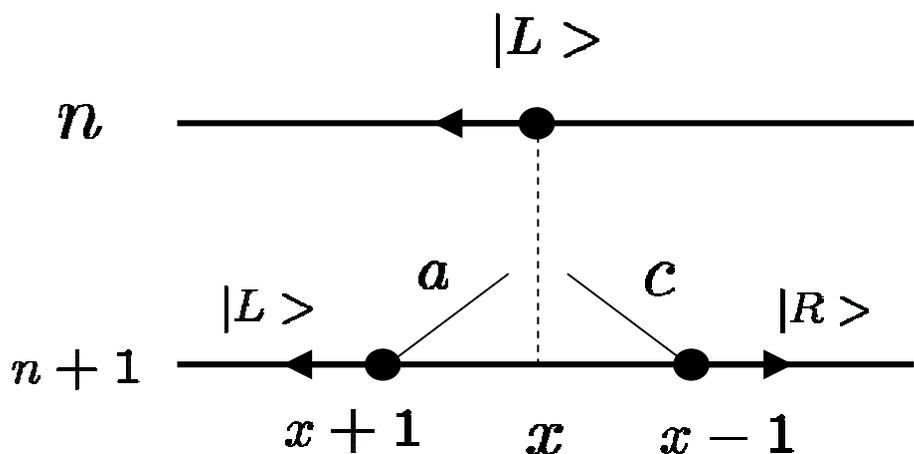
ランダム・ウォークの分布  ガウス分布  
『中心極限定理』の典型例

# 1.2. 量子ウォーク模型

## 量子ウォークの定義

$$A|L\rangle = a|L\rangle + c|R\rangle$$

$$A|R\rangle = b|L\rangle + d|R\rangle$$



**2つの内部状態**をもった波動関数を考えると、  
量子ウォークの1ステップは次のように表せる。

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(L)}(x) \\ \Psi_n^{(R)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} a\Psi_n^{(L)}(x+1) + b\Psi_n^{(R)}(x+1) \\ c\Psi_n^{(L)}(x-1) + d\Psi_n^{(R)}(x-1) \end{pmatrix}$$

ただし  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$   $2 \times 2$ のユニタリ行列

$$\text{典型的な例 : } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in U(2)$$

これをフーリエ変換すると、

$$\Psi_n(k) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(L)}(k) \\ \Psi_n^{(R)}(k) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Psi}_{n+1}(k) = U(k)\hat{\Psi}_n(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$U(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Psi}_0(k) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\Psi}_n(k) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} U(k)^n \hat{\Psi}_0(k) \end{aligned}$$

$$\hat{\Psi}_n(k) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} \Psi_n(x) e^{-ikx} \quad k \in [-\pi, \pi)$$

$k$  = 波数: 波数空間での表示,  $\mathbf{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

# 古典ランダム・ターンモデル

$$\begin{pmatrix} P_n^{(L)}(x) \\ P_n^{(R)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} W(k)^n \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

## 2状態波動関数

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(1)}(x) \\ \Psi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

## 初期量子ビット

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  (複素数)  
 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$U(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} A \quad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$$

よく使われている行列

**アダマール行列**

$$A = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 1.3. 確率密度と期待値

wavefunction

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(1)}(x) \\ \Psi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\Psi}_n(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} U(k)^n \hat{\Psi}_0(k)$$

probability density

$$\begin{aligned} P_n(x) &= |\Psi_n(x)|^2 \equiv \Psi_n^+(x) \Psi_n(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{i(k-k')x} \left\{ \hat{\Psi}_0^+(k') U^+(k')^n \right\} \left\{ U(k)^n \hat{\Psi}_0(k) \right\} \end{aligned}$$

**$X_n =$  時刻  $n (=0,1,2,\dots)$  での量子ウォーカーの位置**  
 **$\text{Prob}(X_n = x) = P_n(x)$**

$f : x \in \mathbf{Z}$  を考えると、 $f(X_n)$  の期待値は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\langle f(X_n) \rangle &= \sum_{x \in \mathbf{Z}} f(x) P_n(x) \\ &= \sum_{x \in \mathbf{Z}} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \hat{\Psi}_n^\dagger(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\Psi}_n(k)\end{aligned}$$

$f(x) = x^r, r = 0, 1, 2, \dots$  のときは、部分積分などを行って

$$\langle X_n^r \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{\Psi}_n^\dagger(k) \left( i \frac{d}{dk} \right)^r \hat{\Psi}_n(k)$$

$$\mathbf{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

# Formulas of Expectations

Consider a function  $f$  of  $x$  in  $\mathbf{Z}$ . The expectation of  $f(X_n)$  is defined as follows.

$$\langle f(X_n) \rangle = \sum_{x \in \mathbf{Z}} f(x) P_n(x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \hat{\Psi}_n^+(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\Psi}_n(k)$$

If  $f(x) = x^r$ ,  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \langle X_n^r \rangle &= \sum_{x \in \mathbf{Z}} x^r P_n(x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \hat{\Psi}_n^+(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} x^r e^{ikx} \hat{\Psi}_n(k) \\ &= \sum_{x \in \mathbf{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \hat{\Psi}_n^+(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left( -i \frac{\partial}{\partial k} \right)^r e^{ikx} \right\} \hat{\Psi}_n(k) \\ &= \sum_{x \in \mathbf{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \hat{\Psi}_n^+(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \left\{ \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right)^r \hat{\Psi}_n(k) \right\} \quad (\text{by partial integral}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk'}{2\pi} \hat{\Psi}_n^+(k') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right)^r \hat{\Psi}_n(k) \right\} \sum_{x \in \mathbf{Z}} e^{-i(k'-k)x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{\Psi}_n^+(k) \left\{ \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right)^r \hat{\Psi}_n(k) \right\} \\ &\quad \left( \text{since } \sum_{x \in \mathbf{Z}} e^{-i(k'-k)x} = 2\pi \delta(k'-k) \right) \end{aligned}$$

Then, if  $f(x)$  is analytic around  $x = 0$ ,

$$\langle f(X_n) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{\Psi}_n^+(k) \left\{ f \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right) \hat{\Psi}_n(k) \right\}$$

図1. 計算機シミュレーションの結果(対称な場合)

アダマール行列  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 初期量子ビット  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

( $n=200$  ステップでのシミュレーション)

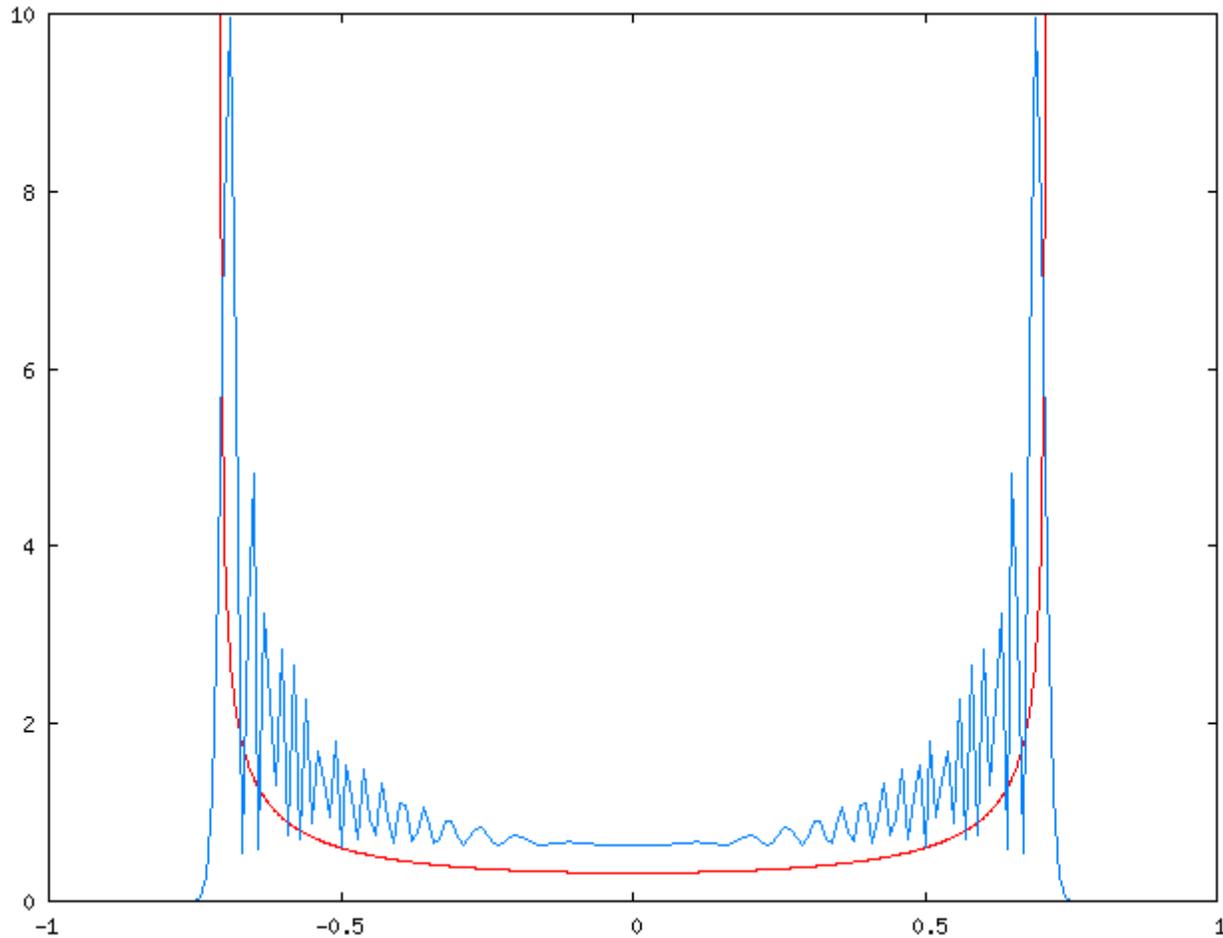
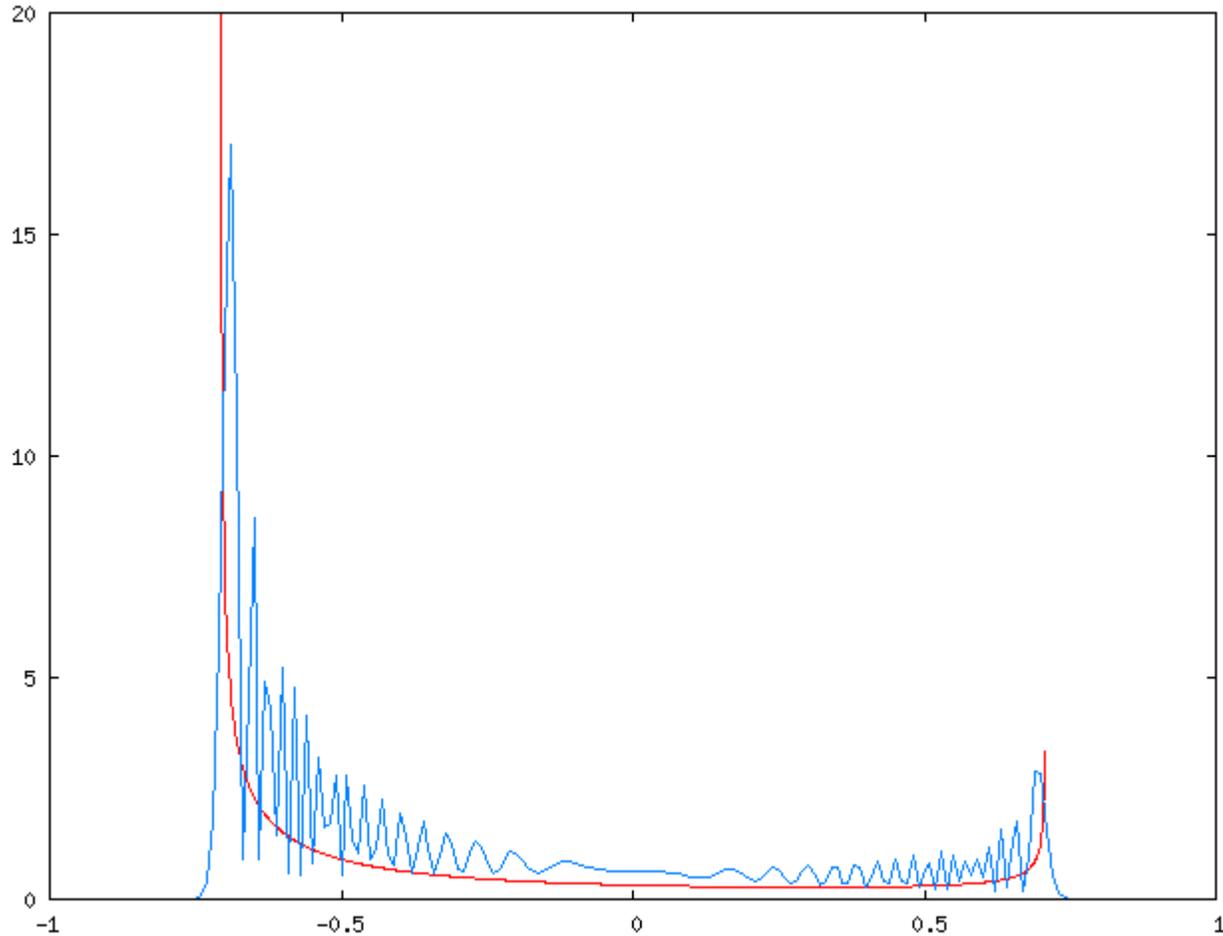


図2. 計算機シミュレーションの結果(非対称な場合)

アダマール行列  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 初期量子ビット  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
( $n=200$  ステップでのシミュレーション)



# 古典ランダム・ターンモデル

$$\begin{pmatrix} P_n^{(L)}(x) \\ P_n^{(R)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} W(k)^n \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

## 2状態波動関数

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(1)}(x) \\ \Psi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

## 初期量子ビット

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  (複素数)  
 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$U(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} A \quad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$$

よく使われている行列

**アダマール行列**

$$A = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

classical

quantum

$$W(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad U(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{U}(2)$$

しかし...

**ユニタリ行列の固有値の絶対値は1 ( $|\lambda| = 1$ )**

なので、波動関数  $\Psi_n(x)$  及び確率密度  $P_n(x)$  は、  
 $t \rightarrow \infty$  の極限をとっても収束しない。

**今野の定理** (今野紀雄氏 横浜国大工学部)

N.Konno : Quantum Inf. Process **1** (2002) 345

J. Math. Soc. Jpn. **57** (2005) 1779

**量子ウォークの擬速度  $X_n/n$  の任意のモーメントは  $t$  の極限において収束する。(弱収束)**

## 2 今野の弱収束定理

$$U(2) \Rightarrow SU(2) \quad U(2) = e^{i\phi} \times SU(2)$$

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} ue^{i\theta} & \sqrt{1-u^2}e^{i\phi} \\ -\sqrt{1-u^2}e^{-i\phi} & ue^{-i\theta} \end{pmatrix}; u \in [0, 1], \theta, \phi \in [-\pi, \pi) \right\} \end{aligned}$$

(ケーリー・クライン パラメータ)

$x = 0$  からスタートする量子ウォークの初期量子ビット (qubit)

$$\Psi_0(x) = \delta(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{\Psi}_0(k) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

## 今野の分布関数 ( 擬速度 $X_n/n$ に対して)

任意の  $r = 0, 1, 2, \dots$  に対して,

$$\langle (X_n/n)^r \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dy y^r \nu(y) \quad n \rightarrow \infty$$

ただしここで,  $\nu(y)$  は

$$\mu(y; |a|) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - y^2)\sqrt{|a|^2 - y^2}}$$

$$\mathcal{I}(y; a, b; \alpha, \beta) = 1 - \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{\alpha\beta^*ab^* + \alpha^*\beta a^*b}{|a|^2} \right) y$$

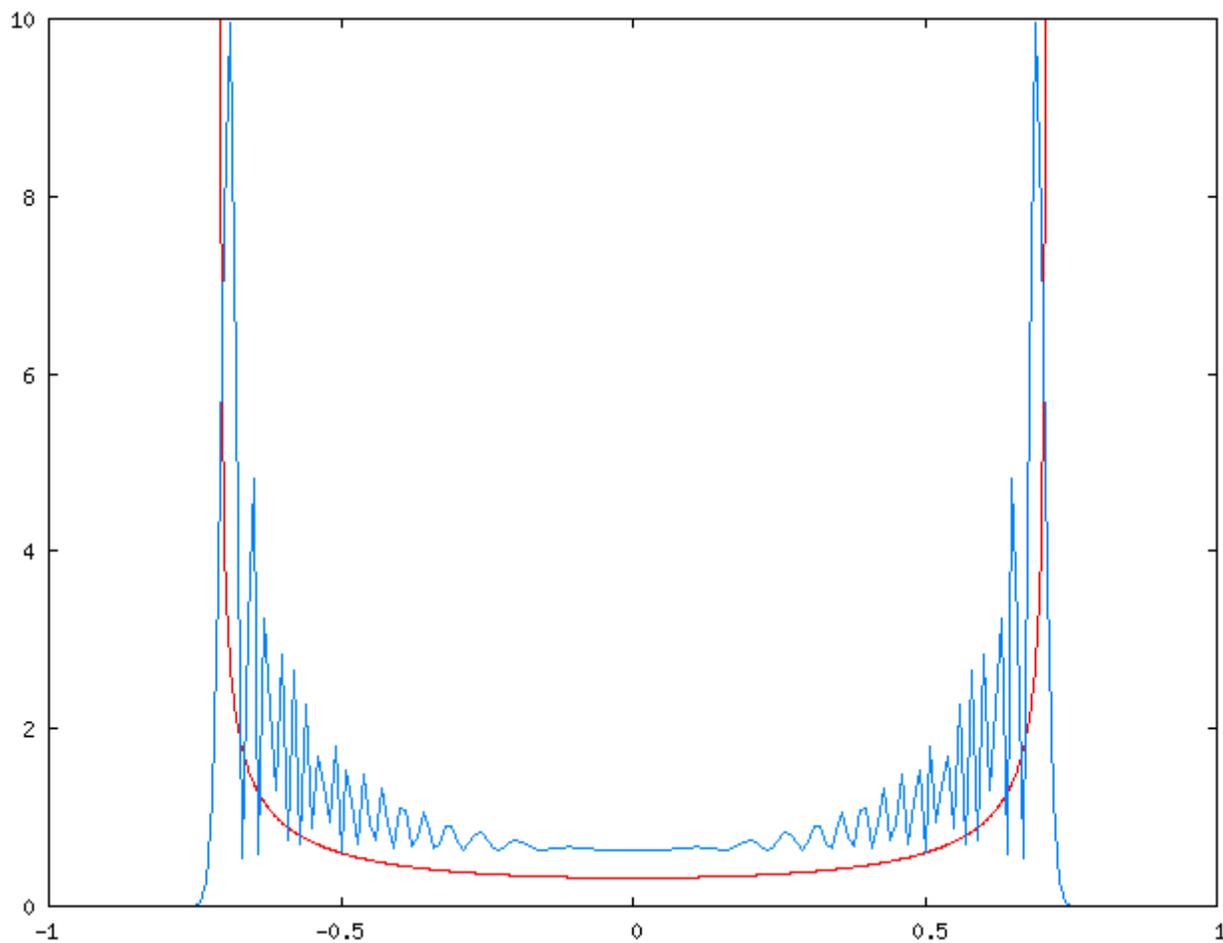
を用いて

$$\nu(y) = \mu(y; |a|)\mathcal{I}(y; a, b; \alpha, \beta)\mathbf{1}_{\{|y| < |a|\}}$$

図1 . 今野分布(赤実線)との比較 (対称な場合)

アダマール行列  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  , 初期量子ビット  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

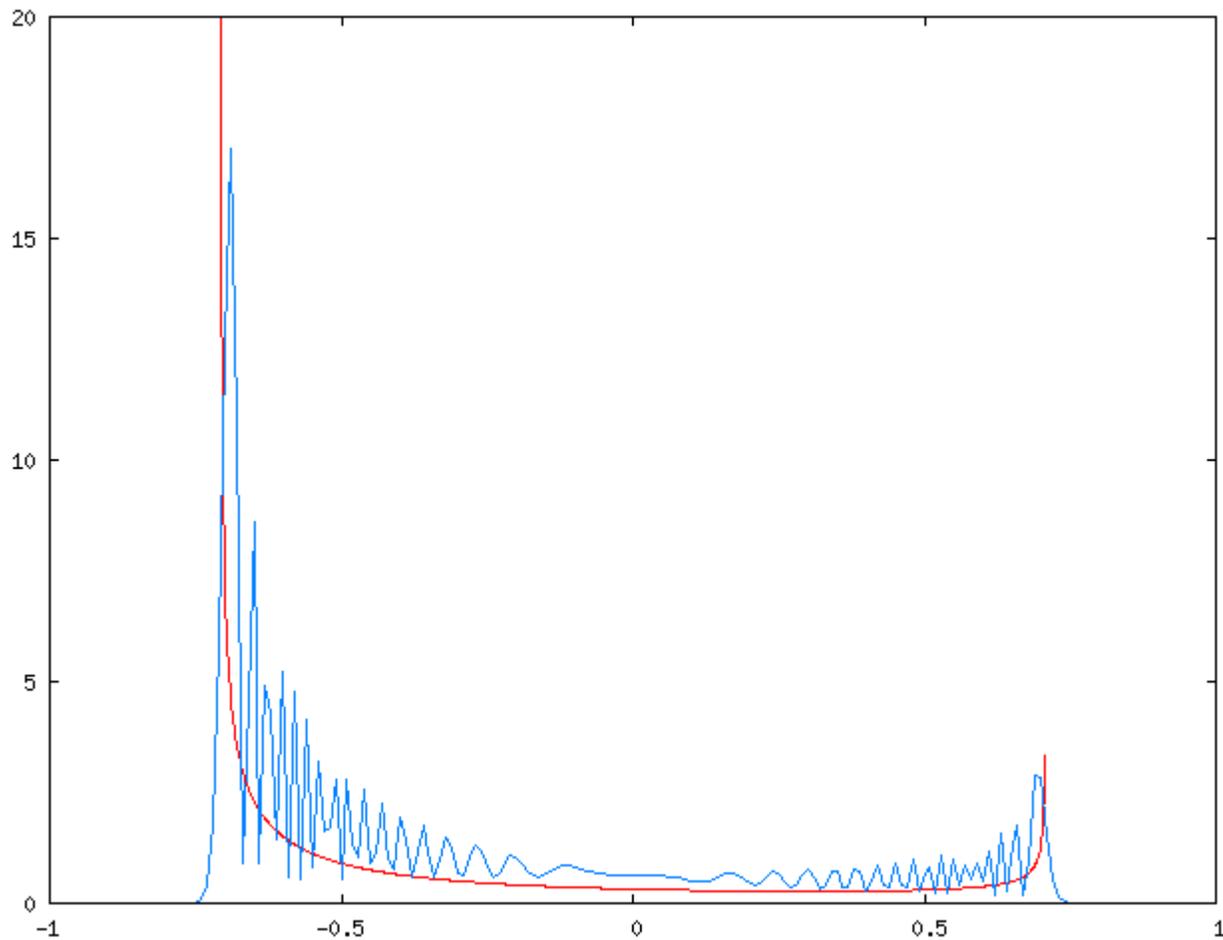
(n=200 ステップでのシミュレーション)

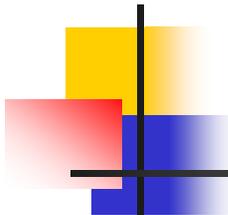


**図2 . 今野分布(赤実線)との比較 (非対称な場合)**

アダマール行列  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  , 初期量子ビット  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(n=200 ステップでのシミュレーション)





## 3. ワイル方程式への写像

### パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と任意の3次元ベクトル  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  を考える。  
すると簡単な計算により、

$$e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})^n = \left( I_2 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \tan q \right) \cos q$$

$I_2$  は  $2 \times 2$  の単位行列,  $q = |\mathbf{q}|$ ,  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$

波数空間から運動量空間への写像を行う。  
ユニタリ行列を  $U(k) = e^{-i\sigma \cdot q}$  のように表す。

$$\begin{aligned} U(k) &= \begin{pmatrix} ue^{i(k+\theta)} & \sqrt{1-u^2}e^{i(k+\phi)} \\ -\sqrt{1-u^2}e^{-i(k+\phi)} & ue^{-i(k+\theta)} \end{pmatrix} \\ &= u \cos(k+\theta) \\ &\quad \times \left[ I_2 + i \left( \frac{\sqrt{1-u^2} \sin(k+\phi)}{u \cos(k+\theta)} \sigma_1 + \frac{\sqrt{1-u^2} \cos(k+\phi)}{u \cos(k+\theta)} \sigma_2 + \tan(k+\theta) \sigma_3 \right) \right] \\ &= e^{-i\sigma \cdot q} \end{aligned}$$

となるように、うまく  $q(k)$  を選びたい。

$$q(k) = \arccos \left[ u \cos(k + \theta) \right] = \arctan \left[ \frac{1}{\cos(k + \theta)} \sqrt{\frac{1}{u^2} - \cos^2(k + \theta)} \right]$$

$$\hat{q}_1(k) = -\frac{\sqrt{1 - u^2}/u}{\sqrt{1/u^2 - \cos^2(k + \theta)}} \sin(k + \phi)$$

$$\hat{q}_2(k) = -\frac{\sqrt{1 - u^2}/u}{\sqrt{1/u^2 - \cos^2(k + \theta)}} \cos(k + \phi)$$

$$\hat{q}_3(k) = -\frac{1}{\sqrt{1/u^2 - \cos^2(k + \theta)}} \sin(k + \theta) \quad k \in [-\pi, \pi)$$

と、3次元運動量ベクトル  $q(k)$  が定まる。

$$q(k) = \left( q(k)\hat{q}_1(k), q(k)\hat{q}_2(k), q(k)\hat{q}_3(k) \right)$$

## なぜ3次元運動量空間へと写像したのか？

ユニタリ行列を  $U(k) = e^{-i\sigma \cdot \mathbf{q}}$  としたので、連続な時刻  $t \in [0, \infty)$  での波動関数は

$$\hat{\Psi}_t(k) = e^{-it\sigma \cdot \mathbf{q}(k)} \hat{\Psi}_0(k), \quad k \in [-\pi, \pi)$$

のように表すことができる。したがってこれは、 $\hbar = 1$  とした

### ワイル方程式 (Weyl equation)

(質量0の粒子に対する相対論的な方程式 [Dirac 方程式])

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_t(k) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(k)) \hat{\Psi}_t(k)$$

を満たす。ただし、**ハミルトニアン**は次で与えられる。

$$\mathcal{H}(p) = \sigma \cdot p$$

運動量  $p$  の自由ワイル粒子の固有値問題に帰着。  
自由粒子なので簡単に解くことができる。

固有値  $\lambda = \pm p$

固有ベクトル

$$\psi_+(\hat{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \psi_+^{(L)}(\hat{\mathbf{p}}) \\ \psi_+^{(R)}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_p/2) \\ \sin(\theta_p/2)e^{i\varphi_p} \end{pmatrix},$$

$$\psi_-(\hat{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \psi_-^{(L)}(\hat{\mathbf{p}}) \\ \psi_-^{(R)}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_p/2)e^{-i\varphi_p} \\ \cos(\theta_p/2) \end{pmatrix}$$

$$p = |\mathbf{p}|, \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$$

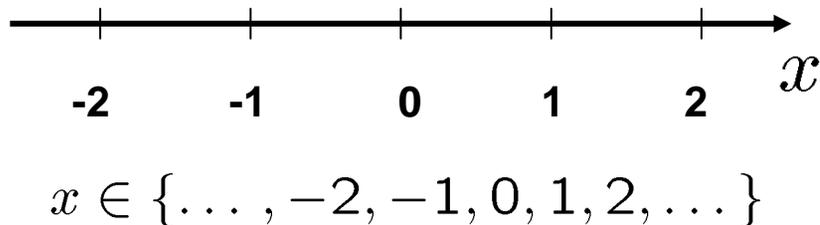
規格化と直交性

$$|\psi_+(\hat{\mathbf{p}})|^2 = \psi_+^\dagger(\hat{\mathbf{p}})\psi_+(\hat{\mathbf{p}}) = 1, |\psi_-(\hat{\mathbf{p}})|^2 = \psi_-^\dagger(\hat{\mathbf{p}})\psi_-(\hat{\mathbf{p}}) = 1,$$

$$\psi_+^\dagger(\hat{\mathbf{p}})\psi_-(\hat{\mathbf{p}}) = \psi_-^\dagger(\hat{\mathbf{p}})\psi_+(\hat{\mathbf{p}}) = 0.$$

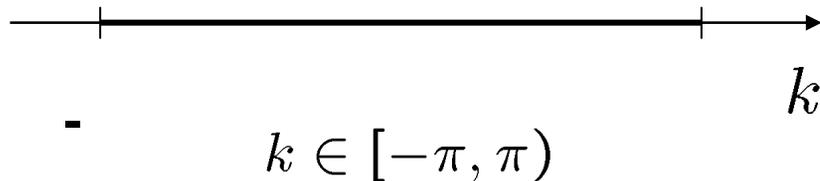
一連の変換を図示すると次のよう。

実空間

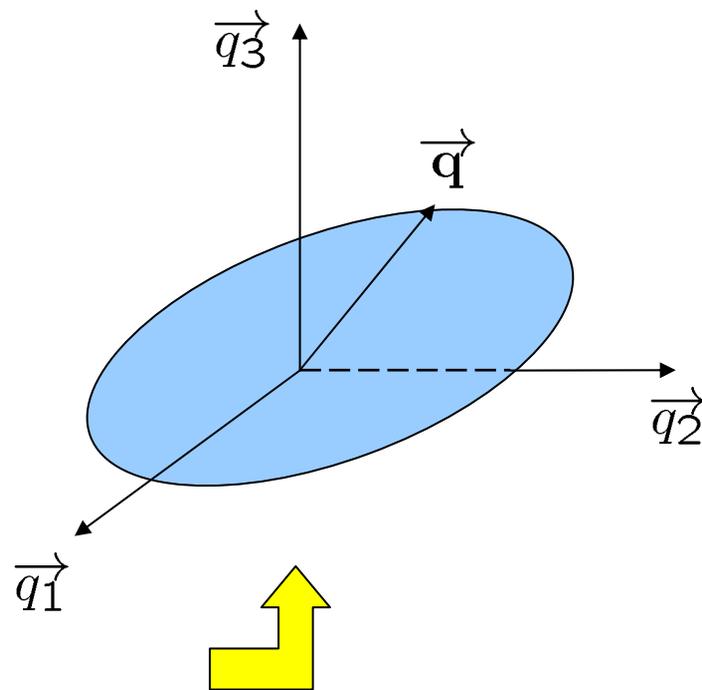


↓ フーリエ変換

波数空間



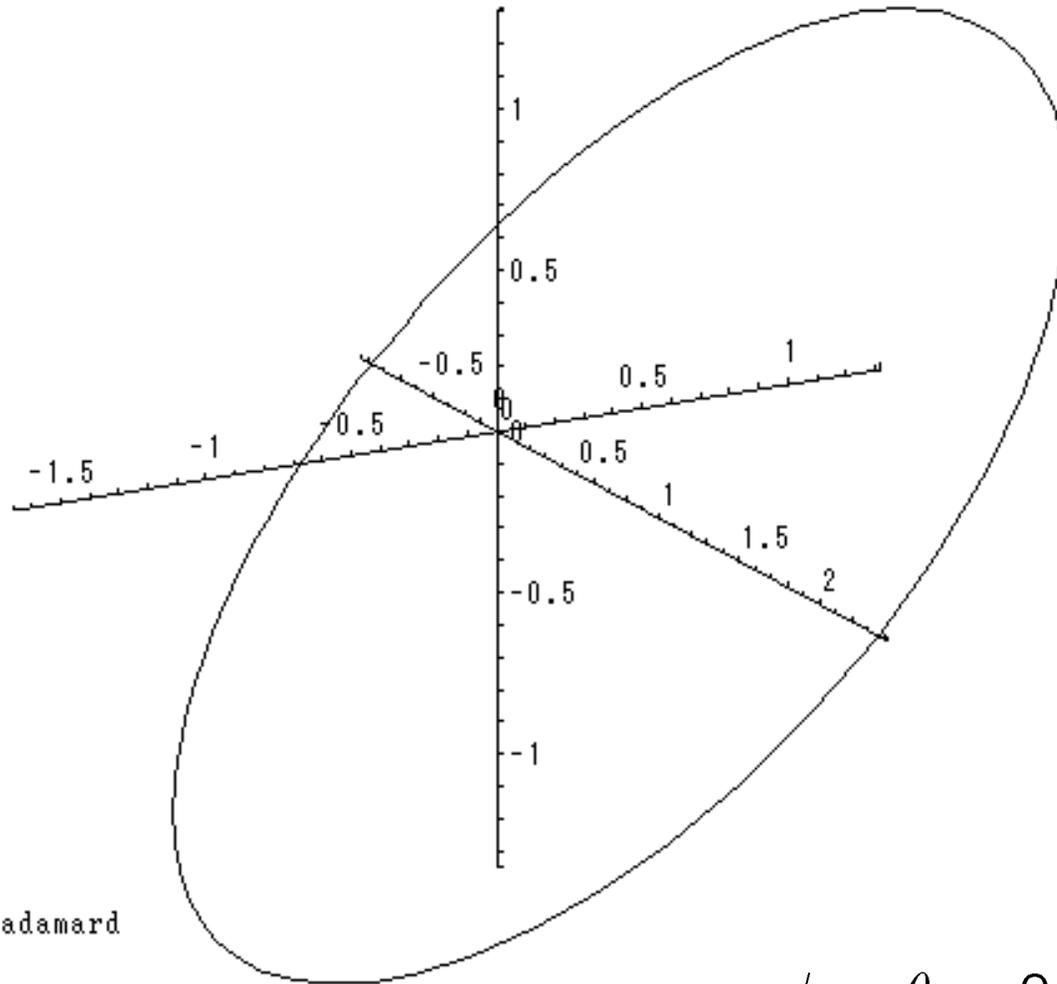
3次元運動量空間



$k \rightarrow q$  変換

$$\mathbf{q}(k) = \left( q(k)\hat{q}_1(k), q(k)\hat{q}_2(k), q(k)\hat{q}_3(k) \right)$$

# 図3. 3次元運動量空間中の $q(k)$



$u = \text{Hadamard}$

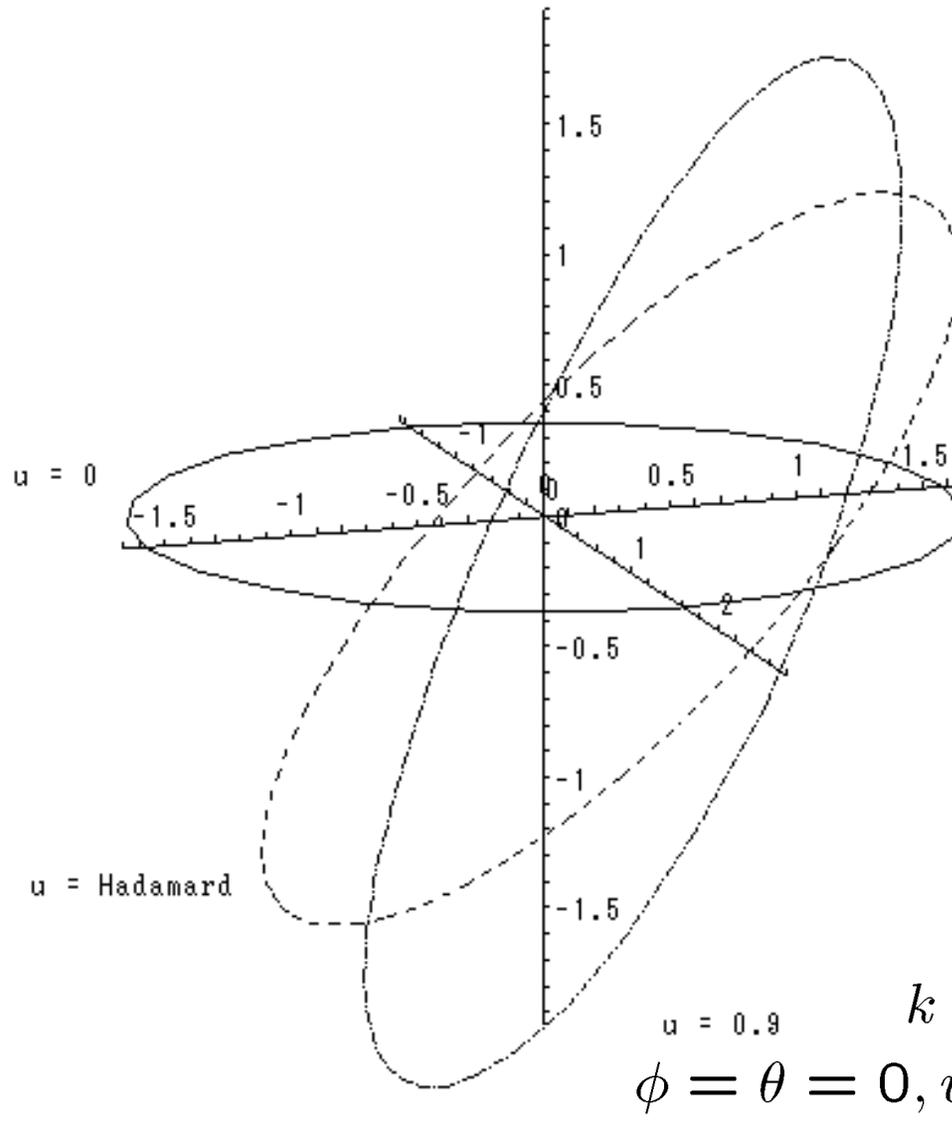
$$k \in [-\pi, \pi)$$

$$\phi = \theta = 0, u = 1/\sqrt{2}$$

以上の変換で1次元量子ウォークの量子状態が、3次元運動量空間における閉曲線に写像されることが分かった。

量子コインの特性を表すパラメータ  $u$  を変化させると閉曲線の形も変わる。  
実際にグラフを描いてみると次のようである。

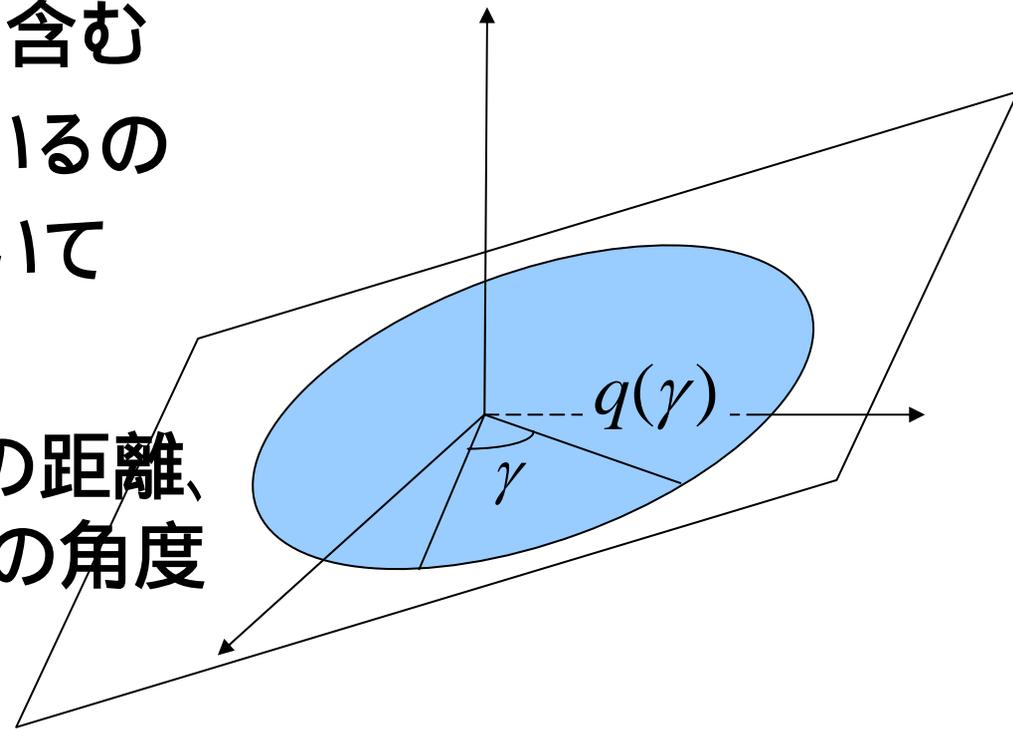
# 図4. $u$ の変化による軌道の変化の様子



## 4. 軌道平面上の極座標 ( $q, \gamma$ )

閉曲線  $q(k)$  は、原点を含む  
1つの平面上に乗っているの  
で、**極座標** ( $q, \gamma$ ) を用いて  
表す事が出来る。

ここで  $q(\gamma)$  は原点からの距離、  
 $\gamma$  はある基準方向からの角度  
である。



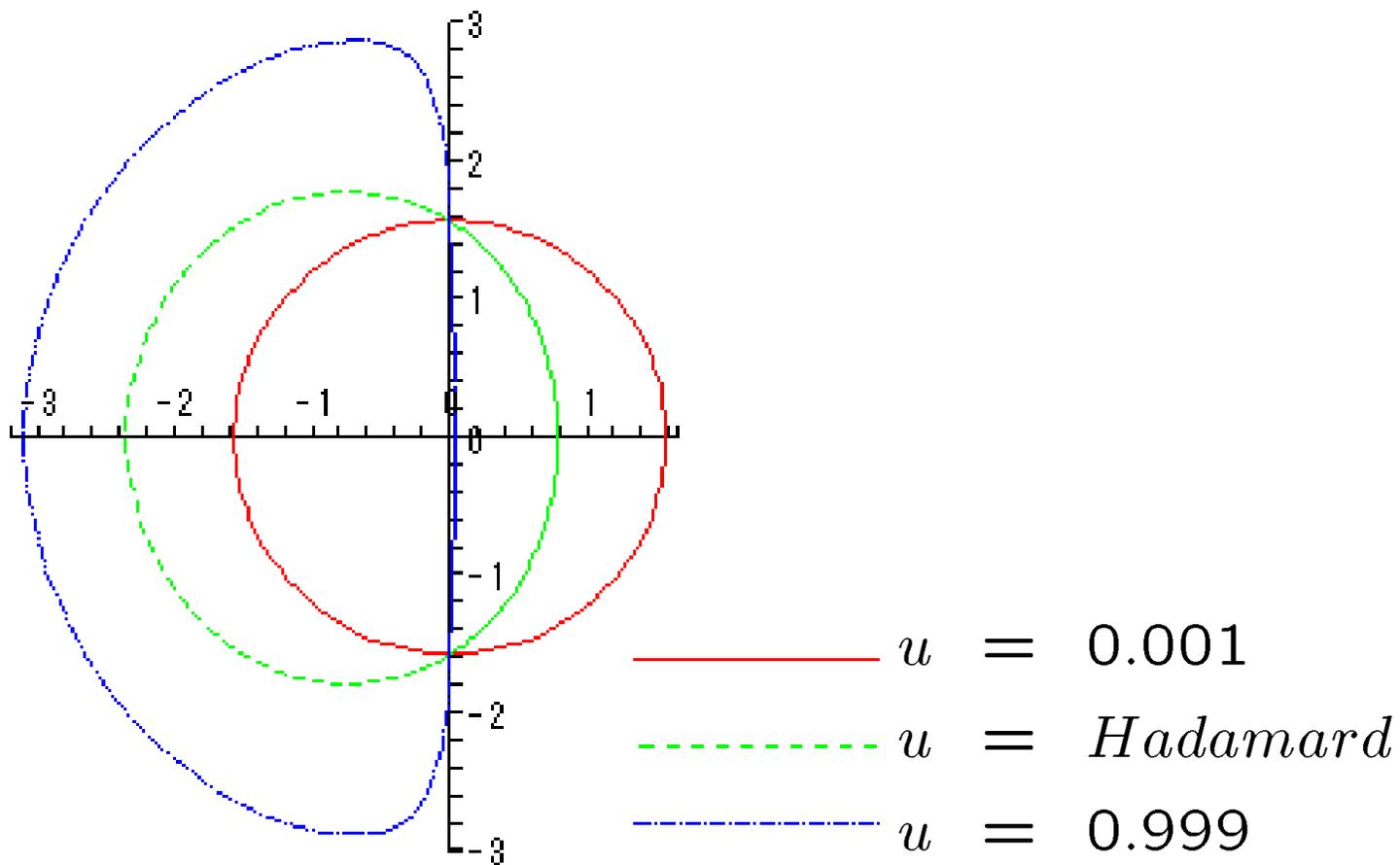
$$\cos \gamma = \frac{(\sqrt{1 - u^2/u}) \cos(k + \theta)}{\sqrt{1/u^2 - \cos^2(k + \theta)}}$$

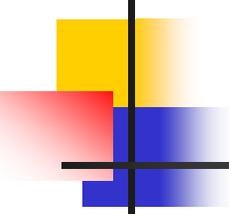
と定義すると、 $q(k)$ は  $(q, \gamma)$  極座標平面上  
の式

$$\tan q = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u} \frac{1}{\cos \gamma}$$

で表せられる。グラフに描いてみると次のようである。

## 図5. 極座標平面上の閉曲線





## 5. 軌道上の線積分

期待値  $\langle f(X_n) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{\Psi}_n^\dagger(k) f\left(i\frac{d}{dk}\right) \hat{\Psi}_n(k)$  を計算する。

波数  $k$  を動かすと、対応するWeyl 粒子量子状態は  
3次元運動量空間での軌道を1周する。

よって、**軌道上での線積分を計算すればよい。**

軌道上での線積分は、極座標  $(q, \gamma)$  における  
**角度** についての積分に他ならない。

$k$  から  $\gamma$  への変数変換に伴う ヤコビアン を導入する。

$$J = |dk/d\gamma|$$

簡単な計算により**ヤコビアン**は、

$$J = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 - u^2 \sin^2 \gamma}$$

となる。これを期待値の式に代入すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} f(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 - u^2 \sin^2 \gamma} f(k(\gamma))$$

となる。さらに、

$$\gamma \rightarrow y \quad ; \quad y = u \sin \gamma$$

と変数変換することにより、

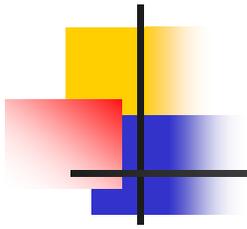
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} f(k) = 2 \int_{-u}^u \frac{dy}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{u^2 - y^2}} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 - y^2} f(k(y))$$

と変形することができる。

以上より**今野の密度関数**、

$$\langle (X_n/n) \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi (1 - y^2) \sqrt{|a|^2 - y^2}} dy \quad \{|y| < |a|\}$$

を導くことが出来た。



## 6. 初期量子ビット依存性

密度関数は求められたが、初期量子ビット依存性を求めるためには固有関数を用いて計算しなければならない。

$x = 0$  よりスタートする量子ウォークを考える。

初期量子ビットは、

$$\Psi_0(x) = \delta(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{\Psi}_0(k) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

この初期波動関数を2つの固有関数の線形結合として表すと、

$$\hat{\Psi}_0(k) = C_+(\hat{q}(k))\psi_+(\hat{q}(k)) + C_-(\hat{q}(k))\psi_-(\hat{q}(k))$$

$C_+(\hat{p})$  と  $C_-(\hat{p})$  は  $\hat{p} = p/|p|$  の関数。

すると  $\hat{\Psi}_n(k)$  は

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_n(k) &= e^{-i\mathcal{H}(\mathbf{q}(k))n} \\ &\quad \times \left\{ C_+(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_+(\hat{\mathbf{q}}(k)) + C_-(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_-(\hat{\mathbf{q}}(k)) \right\} \\ &= e^{-iq(k)n} C_+(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_+(\hat{\mathbf{q}}(k)) \\ &\quad + e^{iq(k)n} C_-(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_-(\hat{\mathbf{q}}(k))\end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}\left(i\frac{d}{dk}\right)^r \hat{\Psi}_n(k) &= \left(\frac{dq(k)}{dk}\right)^r e^{-iq(k)n} C_+(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_+(\hat{\mathbf{q}}(k))n^r \\ &\quad + \left(-\frac{dq(k)}{dk}\right)^r e^{iq(k)n} C_-(\hat{\mathbf{q}}(k))\psi_-(\hat{\mathbf{q}}(k))n^r + \mathcal{O}(n^{r-1})\end{aligned}$$

の関係と直交性に注意して期待値を求めると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n/n)^r \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ |C_+(\hat{q}(k))|^2 + (-1)^r |C_-(\hat{q}(k))|^2 \right\} \\ \times \left( \frac{\sin(k + \theta)}{\sqrt{1/u^2 - \cos^2(k + \theta)}} \right)^r$$

ここでさらに  $k \rightarrow \gamma$  と変数変換すると、

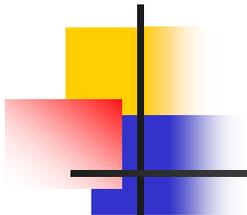
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n/n)^{2m} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u^2 \sin^2 \gamma} (u \sin \gamma)^{2m}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n/n)^{2m+1} \rangle = - \left\{ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) + \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} (\alpha\beta^* e^{-i(\phi-\theta)} + \alpha^* \beta e^{i(\phi-\theta)}) \right\} \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u^2 \sin^2 \gamma} (u \sin \gamma)^{2m+2}$$

となり、最後に  $\gamma \rightarrow y$  へと変数変換して、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n/n)^{2m} \rangle &= \int_{-u}^u dy \mu(y; u) y^{2m}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n/n)^{2m+1} \rangle &= - \left\{ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) + \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} (\alpha\beta^* e^{-i(\phi-\theta)} + \alpha^*\beta e^{i(\phi-\theta)}) \right\} \\ &\quad \times \int_{-u}^u dy \mu(y; u) y^{2m+2}.\end{aligned}$$

となる。

以上により**今野分布関数の初期量子ビット依存性も導くことができた。**



## 7. まとめ

---

$X_n$  を時刻  $n$  での量子ウォークの位置とする。  
量子コインの振る舞いを定めるユニタリ行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

$$a, b \in \mathbf{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1$$

初期状態を

$$\psi_0(x) = \delta(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$\mathbb{Z}$ 上の全ての解析的関数を  $f(x)$  とすると

$$\langle f(X_n/n) \rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \nu(y) \quad n \rightarrow \infty$$

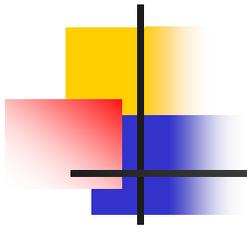
ただしここで,  $\nu(y)$  は

$$\mu(y; |a|) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - y^2)\sqrt{|a|^2 - y^2}}$$

$$\mathcal{I}(y; a, b; \alpha, \beta) = 1 - \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{\alpha\beta^*ab^* + \alpha^*\beta a^*b}{|a|^2} \right) y$$

を用いて

$$\nu(y) = \mu(y; |a|)\mathcal{I}(y; a, b; \alpha, \beta)\mathbf{1}_{\{|y| < |a|\}}$$



## 8. 今後の展望 (理論)

( ) 3状態, 4状態,  $\dots$ ,  $n$  状態

- N. Inui, Y. Konishi, and N. Konno, *Phys. Rev. A* **69** (2004).
- N. Inui, and N. Konno, *Physica A* **353** (2005).
- S.E. Venegas-Andraca, J.L. Ball, K. Burnett, and S. Bose, *New J. Phys.* **7** (2005).

**SU(2)**  $\Rightarrow$  **SU(3)**  $\Rightarrow$  **SU(n)**

**SU(2) の  $s=1/2$  表現**  $\Rightarrow$   **$s=1$  表現**  $\Rightarrow$  **高次元表現**

( ) 2粒子, 3粒子,  $\dots$ ,  $N$  粒子への拡張

$\Rightarrow$  ランダム行列理論

# 実験的検証の可能性

Bouwmeester et al. : **Optical Galton board**, PRA 61 (1999).  
 光を使って, エネルギー準位の Landau-Zener 交差をたどる

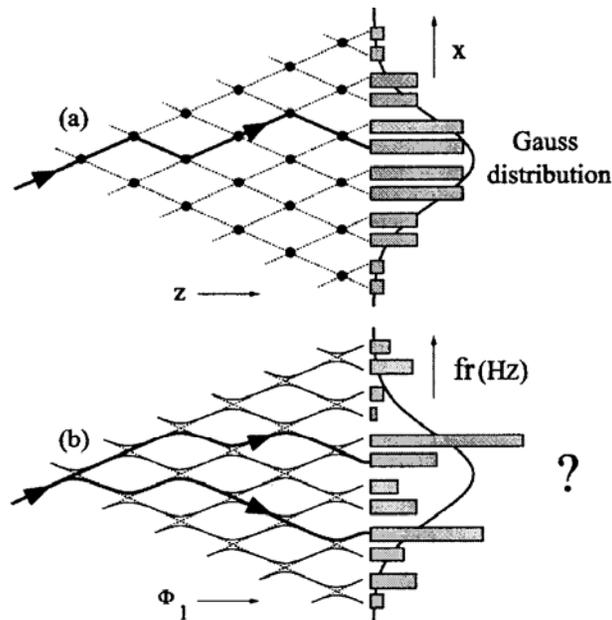


FIG. 1. (a) The classical Galton board, sloping downwards in the  $z$  direction, yields a Gaussian distribution function for the final position of the particle along the  $x$  axis. The dots represent pins at which the balls are scattered. (b) The grid of Landau-Zener crossings which is the quantum- or wave-mechanical analog of the classical Galton board:  $fr$  indicates the frequency axis, and  $\phi_1$  is a control parameter which is proportional to time.

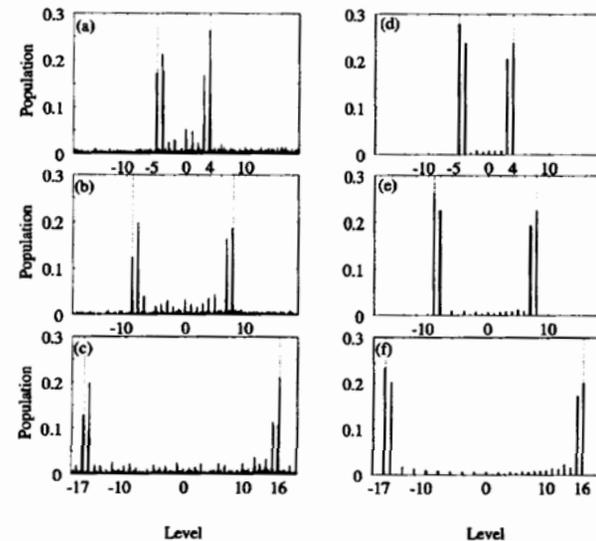


FIG. 6. Experimental test of the coherence quality of the system. After the initial population of level 1 the grid parameters  $\alpha$  and  $\Delta$  were tuned such that each individual Landau-Zener crossing had a transition amplitude of approximately 0.5 and each double crossing (back and forth through the same crossing as illustrated in Fig. 5) had a transition amplitude close to 1 [ $\alpha = 3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta = (0.2 \pm 0.02)\pi$ ]. The spectral distributions after (a) eight, (b) 16, and (c) 32 columns of crossings are shown. Graphs (d), (e), and (f) show the corresponding numerical results, based on the treatment of the optical Galton board as an array of pointlike beamsplitters in the spectral domain. The dashed lines indicate the outermost levels which can be populated.

**Knight, Roldan and Sipe : QW on the line as an **interference phenomenon**, PRA 68 (2003).**

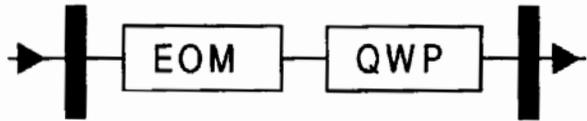


FIG. 2. Scheme for the optical implementation of the QW in a Fabry-Perot cavity. The electro-optic modulator (EOM) shifts the field frequency up or down in  $\bar{\omega}/2$  depending on its polarization, and a quarter-wave plate (QWP) with its axis forming an angle  $\pi/8$ , with respect to the  $x$  axis, performs the Hadamard transformation (notice that light passes twice through each intracavity element every round-trip).

$$\vec{E} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \vec{E}_m \exp[i(\omega_0 + m\bar{\omega})t - ik_m z] + \text{c.c.}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-\ell}^{\ell} [R_m |m, x\rangle + L_m |m, y\rangle]$$

**electrooptic modulator (EOM)**

$$\hat{V} |m, x \text{ (or) } y\rangle = |m \pm 1, x \text{ (or) } y\rangle$$

by means of a **quarter - wave plate(QWP)**

$$\hat{H} |m, x \text{ (or) } y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|m, x\rangle \pm |m, y\rangle]$$

(Hadamard transformation)

**Oka, Konno, Arita and Aoki : Breakdown of an Electric-Field Driven System:  
A Mapping to a Quantum Walk, PRL 94 (2005).**

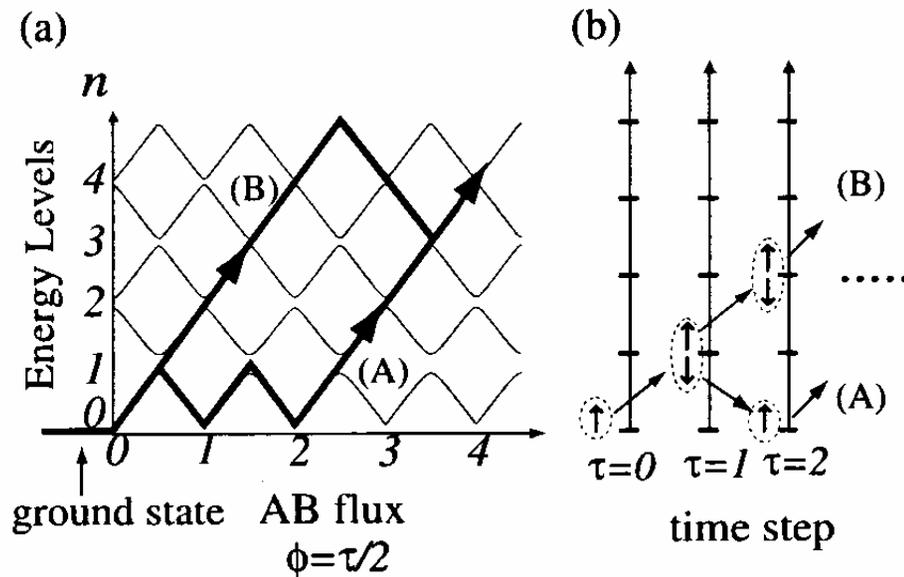


FIG. 1. (a) Idealized energy levels of an electron system on a ring plotted against the AB flux  $\phi = FLt/h$ , which increases linearly with time after the electric field  $F$  is turned on at  $t = 0$ . Two paths (A and B) for the Landau-Zener transition among neighboring levels are shown. (b) A mapping to a quantum walk, where the energy levels are mapped to sites of the qubits and the ground state to a reflecting boundary.