集中講義
九州大学大学院工学府　エネルギー量子工学専攻
「応用物理学特別講義　II」
2006年6月5日（月）－7日（水）

『相転移と自己組織化臨界現象』
講義ノート　§1.3

か とり　ま こ と
香取　眞理
（中央大学理工学部物理学科）

研究分野　　統計物理学
　　　　　　数理物理学
　　　　　　確率論
　　　　　　数理生物学
　　　　　　経済物理学

講義の計画

6月5日（月）

１０：３０－１２：００：自己組織化臨界現象とは　（パワーポイント）

（以下講義は黒板で行います。）

１３：００－１４：３０：アーベル的砂山崩しモデル（ＡＳＭ）の定義

6月6日（火）

１０：３０－１２：００：再帰的配置と定常分布

１３：００－１４：３０：再帰的配置の総数

１５：００－１６：３０：講演会「量子ウォークの特異な拡散現象」

（パワーポイント）

6月7日（水）

１０：３０－１２：００：禁止部分配置と許容配置

なだれの伝播関数

１３：００－１４：３０：2次元正方格子上のＡＳＭ

§1．3　砂山崩しのモデル

安息角：その角度よりも傾斜がなだらかな間は
砂の堆積により傾斜が大きくなる。
しかしその角度を超えて傾斜が急になると**なだれ（土砂崩れ）**が起こる。

自然と安定な角度へ
砂山の形　：　相似形
これを保つため
・・・**なだれ(avalanche)の規模は大きく分布する（べき乗分布）**

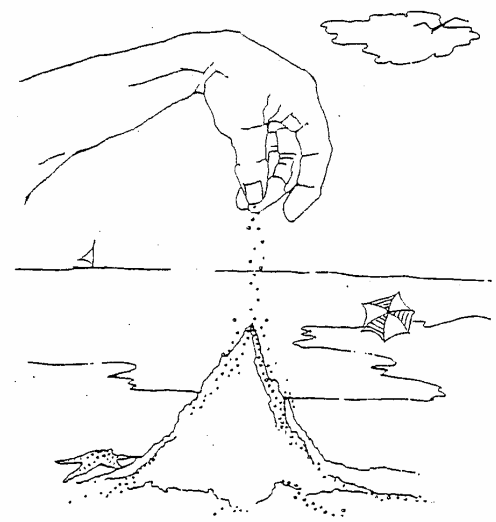


図 1: 砂山遊び [K.Wiesenfeld et al.,*J. Stat.Phys.* **54** (1989) 1441 より]

Bak, Tang, Wiesenfeld が 1987 年に導入し、今日でもSOCの理論的な研究の中心的な対象になっているのは・・・
砂山崩しのモデルとして提案されたある確率的セルオートマトン。
これがいわゆる sandpile model である。

砂山崩しのモデル化（1次元BTWモデル）

- まず1次元系（断面を考える）
- 粗視化（coarse graining）したモデル
  - 空間 ・・・・ 格子
  - 砂 ・・・・ ある集まりを1ブロックとする
  - 安息角 ・・・ 常に 45 °とする
- 転げ落ちる ＝ toppling という （topple: *vi* ぐらつく。倒れる。）

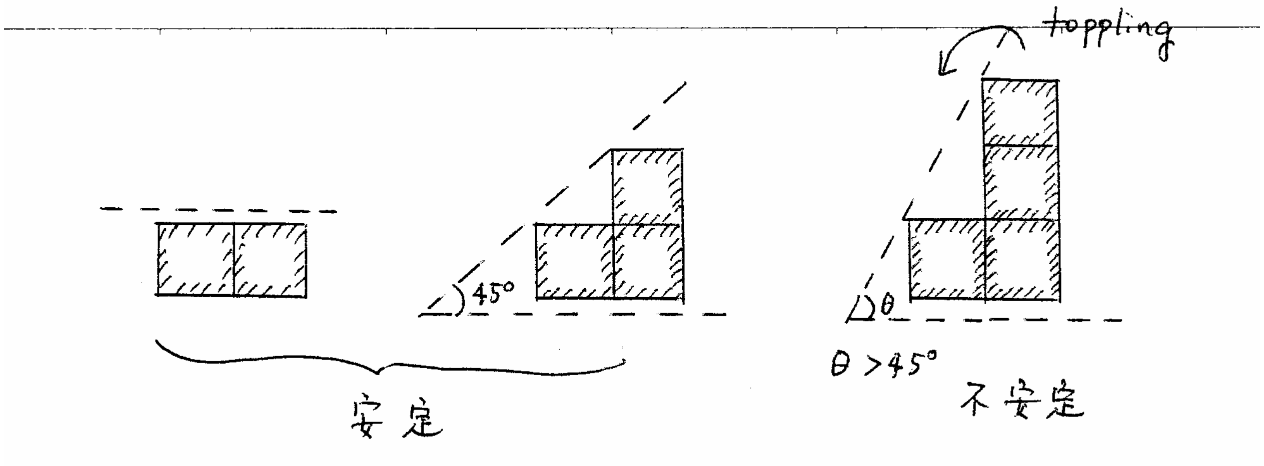


図 2: 安息角と toppling

1次元有限格子 (サイズ L)

砂山の高さ ： 各サイト x ごとに $h(x) = 1,2,3, \ldots$

傾斜 ＝ 隣接サイト間の高さの差

$$z(x) = h(x+1) - h(x)$$

$z(x) = 0, 1$ ・・・・・ 安定

$z(x) = 2, 3, \ldots$ ・・・・ 不安定 → toppling

プロセス

砂ブロックを加える (堆積)

↓

どこか少なくとも1箇所のサイトが不安定化

↓

toppling が起こる

↓

別のサイトが不安定化する

↓

toppling が起こる

↓

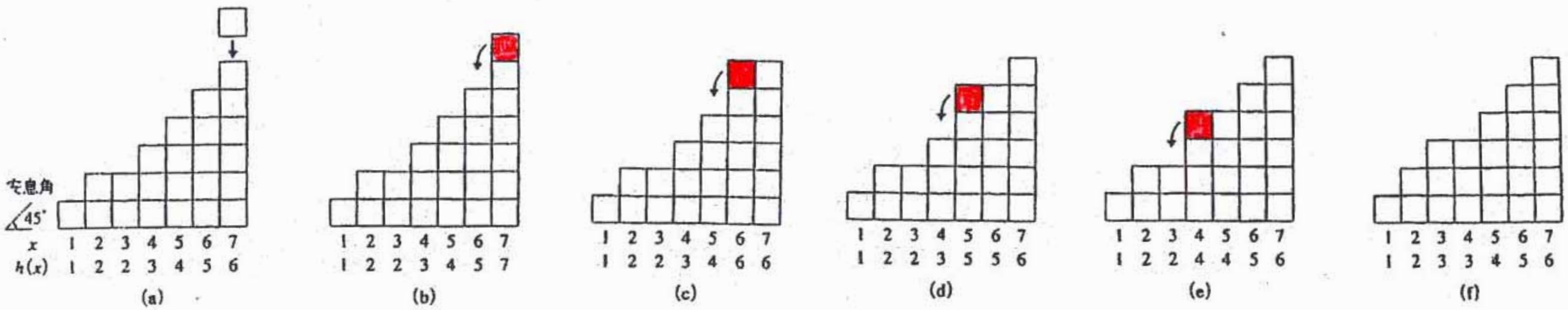
↓

↓

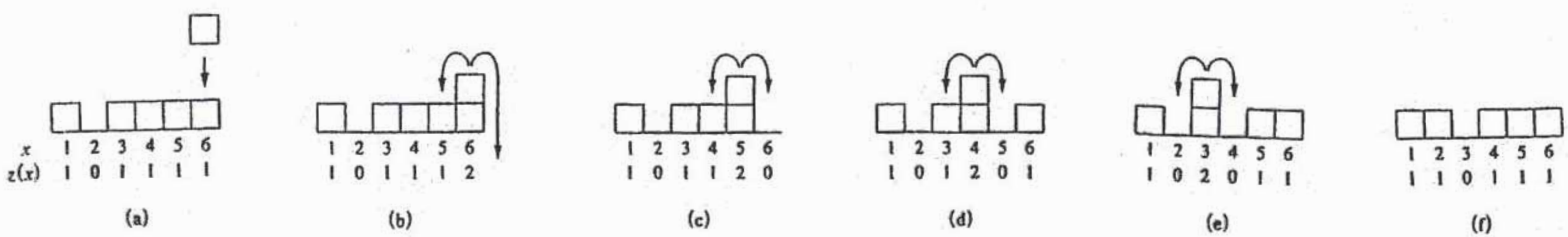
すべてのサイトが安定

＝ 一連の toppling

＝ なだれ (avalanche)



となりとの高さの差＝傾斜角の大きさ.



2次元 BTW モデル

はじめから $z(x,y)$ を考える.

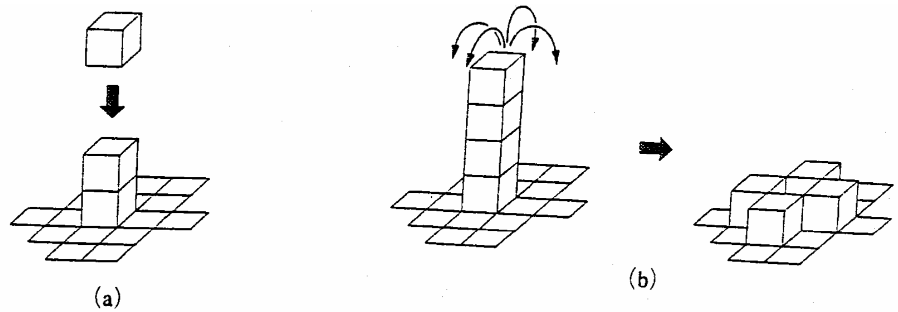


図 4: 2 次元 sandpile model(BTW model) の素過程

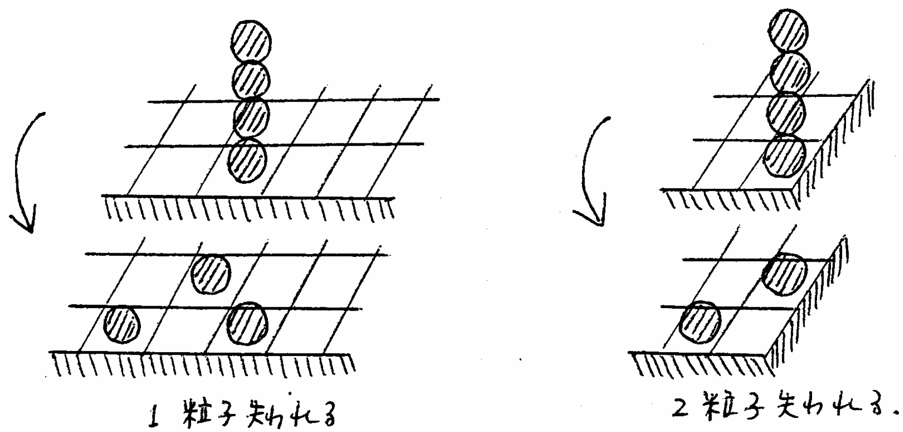


図 5: 開放境界条件:格子の外にこぼれ落ちた「粒子」は散逸して失われる.

- **特徴 1　　ランダムな摂動と決定論的な粒子の拡散** (全体としては，確率過程である.)
- **特徴 2　　摂動を与えるタイムスケールと toppling のタイムスケールとの完全な分離**
  (必ず，すべての toppling が終わってから (avalanche 終了後に) 摂動を加える.)
- **特徴 3　　パラメータが全くない.**

計算機シミュレーションの結果
(1) なだれの広がり方

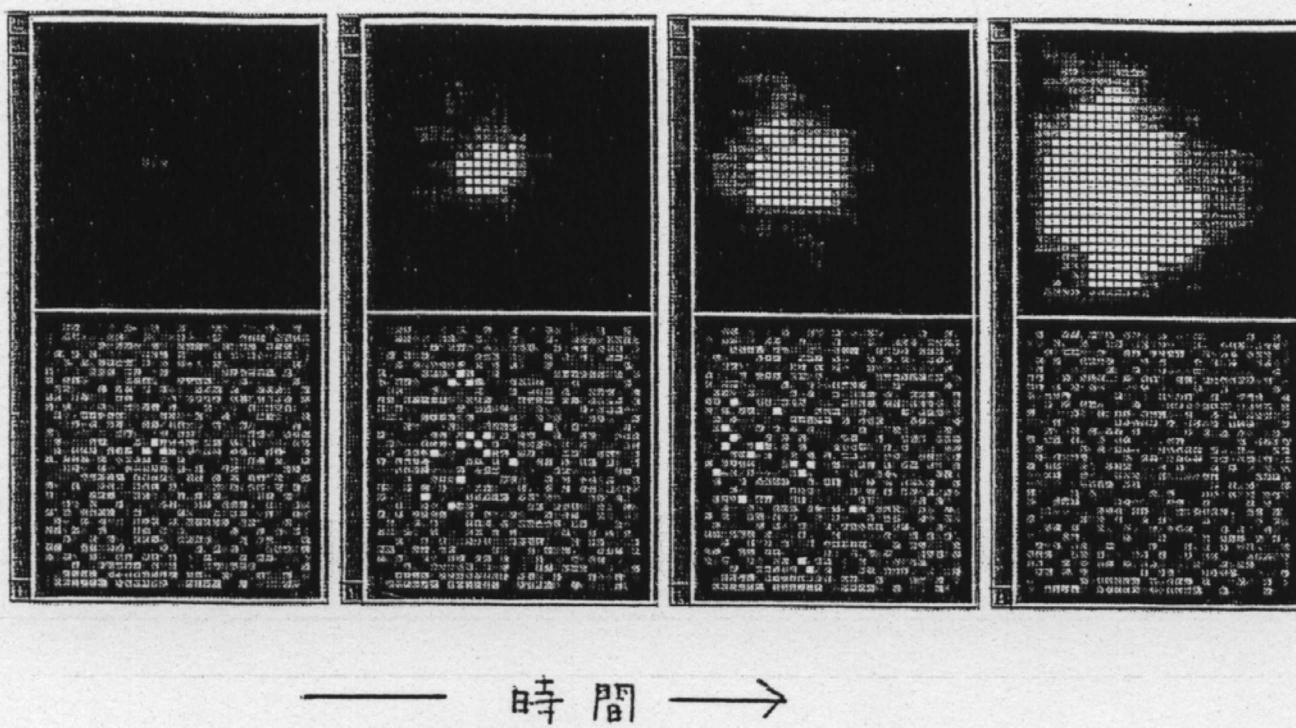


図 6: (a) 1 回の avalanche の最中に何回 toppling したかを表示. 回数が多いほど白い. (b) $z(x,y)$ の値を表示. 値が大きいほど白い.

計算機シミュレーションの結果

(2) 定常状態への収束

$p(k)$ = 全サイトに対する $z(x,y)=k$ であるサイトの割合

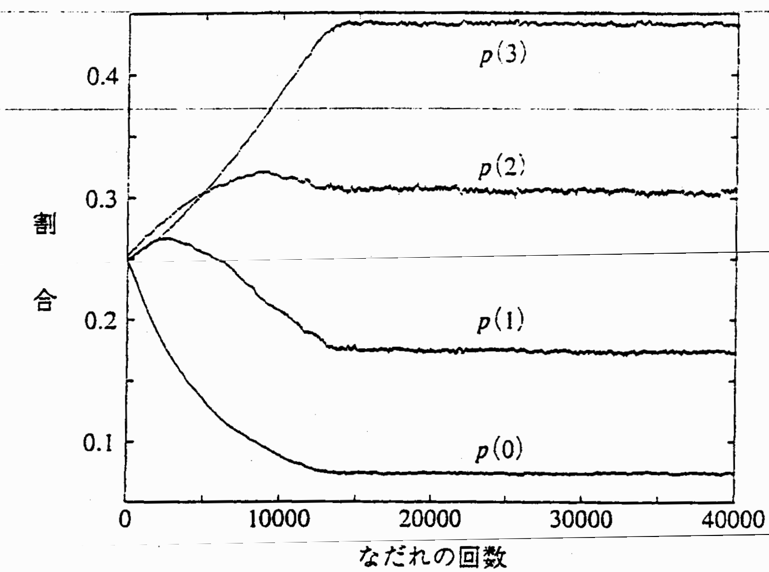


図 7: $p(k) = 1/4$ $(0 \le k \le 3)$ のランダムな配置からスタートして，avalanche 終了時に毎回 $p(k), k = 0, 1, 2, 3$, を計った．15000 回ほど繰り返すと，定常値に落ち着く．[K97]

計算機シミュレーションの結果

(3) なだれのサイズ分布

システムサイズを大きくすると、べき乗分布に従う領域が増す。

$$P(s) \approx s^{-\tau} \quad \text{for} \quad s \le s_0$$

$$(\, s_0 \to \infty \quad \text{as} \quad L \to \infty \,)$$

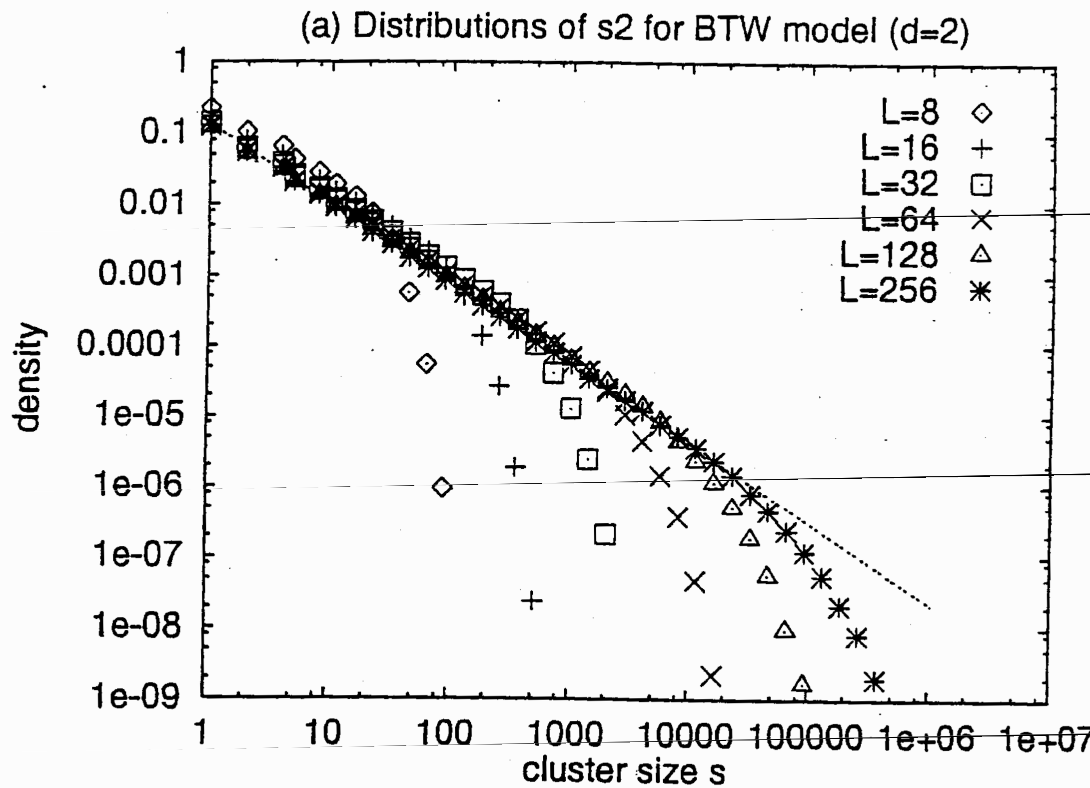


図 8: サイズ L を大きくしていくと，冪乗分布に従うサイズ領域が増していく．[KK97]

レポート課題1

自己組織化臨界現象と思われる例を一つ見つけ，レポートにせよ．

- 文献やインターネットなどを使って写真，データなどを集めてみる．
- 上の現象に対して，簡単なモデルを考案してみる．
- モデルの振る舞いを考察し（出来れば解析して），現象を説明してみる．

例
- 山火事の発生と広がり分布
- （コンピュータ）ウイルスの伝播
- 交通渋滞の規模と分布
- etc. etc.

参考文献

[BTW87] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld: Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381-384.

[D90] D. Dhar: Self-organized critical state of sandpile automaton model, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1613-1616.

[KK96] M. Katori and H. Kobayashi: Mean-field theory of avalanches in self-organized critical state, *Physica* **A229** (1996) 461-477.

[TK99] T. Tsuchiya and M. Katori: Exact results for the directed Abelian sandpile models, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 1629-1641.

[TK00] T. Tsuchiya and M. Katori: Proof of breaking of self-organized criticality in a nonconservative Abelian sandpile model, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 1183-1188.

[T86] **高安秀樹:『フラクタル』、朝倉書店、** 1986.

[B97] P. Bak: *How Nature Works*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.

[K97] **香取眞理:『複雑系を解く確率モデル』、講談社、** 1997.