

ランダム行列と非衝突過程

香取 眞理 種村 秀紀

0 はじめに

Dyson は, 対角成分が実ブラウン運動に従って変動し, 非対角成分が複素ブラウン運動に従って変動する, エルミート行列に値をもつ確率過程を考案した. 行列のサイズが $N \times N$ であるとすると, エルミート行列値なので N 個の固有値は実軸上を運動することになるが, Dyson はその運動を記述する N 連立の確率微分方程式を導いた. この固有値の確率過程を Dyson モデルとよぶことにする. 実軸上の固有値を, それぞれ 1 次元上の粒子の位置とみなすことにすると, Dyson モデルは 1 次元 N 粒子系を記述することになる. Dyson は, これはいかなる粒子間の衝突も起こらないという条件の下での N 個の 1 次元ブラウン運動 (非衝突ブラウン運動) に他ならないことを結論している [5].

Dyson の考察は, 量子力学における摂動論の考え方を応用したものであったが, 筆者らはこの数年, 確率論の立場から

- エルミート行列値過程の固有値が満たす方程式はどのようなものか
- 一般の非衝突過程をどのように特徴づけることができるか

という問題について, より数理的な研究を行ってきた.

上の第 1 の問題を, エルミート行列値過程の各成分がブラウン運動ではなく別の確率過程である場合に調べたものとして, Bru による研究がある [2, 3]. 本稿では, 彼女の結果を一般化した定理 [16, 17] を紹介し, その応用例を与えることにする.

第 2 の問題に一般的に答えるのは大変難しいので、本稿では『複数の独立な 1 次元確率過程に非衝突条件を課すと、どのような確率過程になるか』という設問を考えることにする。こうしても、一般には複雑であり簡単に調べることができないのであるが、取り扱う 1 次元確率過程が特に拡散過程である場合には、有効な手段がある。非衝突拡散過程の推移確率密度を、1 次元拡散過程の推移確率密度を成分とする行列式を用いて表すことができるのである (Karlin-McGregor の公式 [11])。本稿では、この行列式表示に対して、Gessel と Viennot によって与えられた組み合わせ論的な証明 [6, 30, 21] を紹介することにする。

1 ブラウン運動とその条件付き過程

1.1 拡散過程の推移確率密度

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする。次の性質を満たす確率過程 $\{B(t, \omega)\}_{t \in [0, \infty)}$ を 1 次元ブラウン運動 (Brownian motion) という。

1. $B(0, \omega) = 0$ が確率 1 で成り立つ。
2. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して、 ω を固定したとき $B(t, \omega)$ は t の関数として連続な実数値関数である。(この性質があるとき、道が連続であるという。)
3. 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_m$ ($m = 1, 2, \dots$) に対し、増分 $\{B(t_j) - B(t_{j-1})\}_{j=1, 2, \dots, m}$ は独立で、各々の分布は平均 0、分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従う。

したがって

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

とにおいて, $x_0 \equiv 0$ とすると, ブラウン運動が各時刻 t_j で区間 $[a_j, b_j]$ に滞在する確率 $P(B(t_j) \in [a_j, b_j], j = 1, 2, \dots, m)$ は

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_m}^{b_m} dx_m \prod_{j=1}^m G(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$$

で与えられることが導かれる. この積分核(熱核)である $G(s, x; t, y) = G(t - s, y - x)$ を, ブラウン運動の推移確率密度関数という. 任意の $0 \leq s < t$ を与えたとき, ブラウン運動は

$B(t)$ の分布は, $B(s)$ の値が与えられると

$$B(u), u < s \text{ の値に影響されずに定まる} \quad (1.1)$$

という性質, いわゆる マルコフ性をもつことが分かる. 正の値をとる確率変数 τ がマルコフ時刻であるとは, τ の値がある定数 u 以下であるかどうかは確率過程の時刻 u までの値だけで決まり, それ以降の時刻でとる値には影響されないことをいう. 例えば, ある領域を定めたとき, 確率過程が最初にその領域内に到達する時刻はマルコフ時刻である. ブラウン運動では, (1.1) において時刻 s とあるところを任意のマルコフ時刻 τ に替えたとしても, やはり (1.1) の主張が成り立つ. この性質を強マルコフ性という(例えば [25, 29] 参照).

独立な D 個 (D は自然数) の 1 次元ブラウン運動を各成分にもつ確率過程を D 次元ブラウン運動という. 一般に, 道が連続である確率過程で, 強マルコフ性をもつものを拡散過程という. 特に, ブラウン運動のように推移確率密度が時刻の差 $t - s$ で定まる拡散過程は時間的に斉次であるという. 本稿では, そのような場合には, 推移確率密度 $G(s, x; t, y)$ を $G(t - s, y|x)$ と表記して, 時刻の差 $t - s$ の関数であることを明示することにする.

時刻 T で原点に到達するという条件の下でのブラウン運動を考える。この条件付き過程の推移確率密度は

$$\frac{P(B(s) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], B(t) \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon], B(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon])}{2\varepsilon P(B(s) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], B(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon])}$$

に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限をとることにより

$$G^T(s, x; t, y) = \frac{G(T - t, 0|y)G(t - s, y|x)}{G(T - s, 0|x)}, \quad 0 \leq s < t \leq T, x, y \in \mathbb{R}$$

と求められる。この条件付き確率過程を $\beta(t)$, $t \in [0, T]$ と書くことにする。これは時間的に非斉次な拡散過程であり、期間 T のブラウン橋 (Brownian bridge) とよばれている。

1次元ブラウン運動は一般にはすべての実数値をとり得るが、「負の値はとらない」という条件を課すことにする。こうして得られる条件付き過程 $Y(t)$, $t \in [0, T]$ は、時間的に斉次な拡散過程であり、その推移確率密度関数を $G^{(1/2)}(t, y|x)$, $t > 0, x \geq 0, y \geq 0$ と書くことにすると

$$\begin{aligned} G^{(1/2)}(t, y|x) &= \frac{y}{x} \{ G(t, y|x) - G(t, -y|x) \}, \quad x > 0 \\ G^{(1/2)}(t, y|0) &= \frac{2}{t} y^2 G(t, y|0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

であることが導ける。3次元ブラウン運動 $B(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ の原点からの距離 $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2)^{1/2}$ も同じ推移確率密度関数をもつことが知られており、この拡散過程は3次元ベッセル過程 (Bessel process) とよばれている。つまり3次元ベッセル過程は、1次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と3次元ブラウン運動の動径方向への射影としての表現という二つの異なる表現をもつことが分かる。 $Y(t)$ は確率微分方程式

$$dY(t) = dB(t) + \frac{1}{Y(t)} dt, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

を満足する [25, 29].

1次元ブラウン運動において時刻 0 から T までの有限な時間区間に着目し、この間には負の値をとらないという条件を課した確率過程 $X(t), t \in [0, T]$ を考えると、今度は時間的に非斉次な拡散過程が得られる。その推移確率密度関数を $G_T^{(1/2)}(s, x; t, y), 0 \leq s < t \leq T, x, y \geq 0$ と書くと

$$G_T^{(1/2)}(s, x; t, y) = \frac{h(T-t, y)}{h(T-s, x)} \{G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x)\}, \quad x > 0$$

$$G_T^{(1/2)}(0, 0; t, y) = \frac{\sqrt{2\pi T}}{t} y G(t, y|0) h(T-t, y) \quad (1.4)$$

である。ただし $h(T-s, x), x > 0, s \in (0, T]$ は、時刻 s で x にいたブラウン運動が時間区間 $[s, T]$ の間は負の値をとらないでいる確率である。この条件付き過程はブラウン彷徨過程 (Brownian meander) とよばれている。互いに独立な 1次元ブラウン運動 $B_1(t), B_2(t)$ とそれらと独立である期間 T のブラウン橋 $\beta(t)$ を用いて $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \beta(t)^2)^{1/2}, t \in [0, T]$ で定義されたものもブラウン彷徨過程となることが知られており、ブラウン彷徨過程も、1次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と 3次元拡散過程の動径方向への射影としての表現の二つをもつことが分かる [32]。

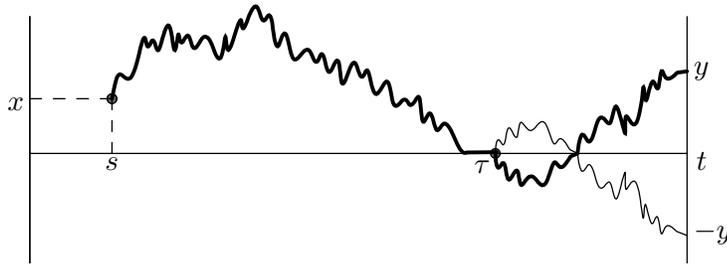


図 1 : 反射原理の図

それでは、上で述べた条件付き過程 $Y(t), t \in [0, T]$ の推移確率密度 (1.2) と $X(t), t \in [0, T]$ の推移確率密度 (1.4) を導いてみよう。これらはブラウン運動の反射原理 (reflection principle) というものを応用すると、簡単に計

算できるのである。時刻 s で $x > 0$ にいたブラウン運動が、時刻 t で $y > 0$ に到達するという状況を考えてみよう。ブラウン運動が、時間区間 $[s, t]$ の間も常に正の値をとりながら到達する場合と、その途中のある時刻で 0 の値をとった後に到達する場合とに場合分けできる。後者の場合を図 1 に示したが、この図にあるようにブラウン運動が最初に原点に到達した時刻を τ と書くことにする。 τ はマルコフ時刻である。したがって、上で述べたブラウン運動の強マルコフ性と対称性から、この時刻 τ 以降にブラウン運動がとる値の符号をすべて反転させるという変換（図 1 を参照）を行なっても、ブラウン運動の分布は変わらないことが導かれる。これが反射原理である。このことから、ある時刻 $\tau \in [s, t]$ で 0 の値をとった場合には、時刻 t で区間 $[y, y + \varepsilon]$ を訪問する確率と時刻 t で区間 $[-y - \varepsilon, -y]$ を訪問する確率とが等しくなることになるので、この場合にはそれぞれの確率密度の差は零になるはずである。ところが、そのような $\tau \in [s, t]$ がなければこの差は正である。つまり時刻 s で $x > 0$ にいたブラウン運動が、時間区間 $[s, t]$ の間は常に正の値をとりながら時刻 t で $y > 0$ に到達する確率密度は、

$$\hat{G}(t-s, y|x) = G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x) \quad (1.5)$$

で与えられることになる。この $\hat{G}(t-s, y|x)$ は、原点に吸収壁がありそこにブラウン粒子が到達すると消滅してしまうという、 $(0, \infty)$ 内の吸収壁ブラウン運動 (absorbing Brownian motion) とよばれる確率過程の推移確率密度となっている、という言い方もできる。(1.5) を用いると、時刻 t で $x > 0$ にいたブラウン運動が、時間区間 $[t, T]$ の間には負の値をとらない確率 $h(T-t, x)$ は

$$\int_0^{\infty} \hat{G}(T-t, y|x) dy = \int_{-x}^x G(T-t, u|0) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{T-t}}^{x/\sqrt{T-t}} e^{-u^2/2} du$$

となることが分かる。 $x/\sqrt{T-t} \rightarrow 0$ のときには、最右辺の被積分関数 $e^{-u^2/2}$ を 1 で近似できるので、 $h(T-t, x) \sim 2x/\sqrt{2\pi(T-t)}$ という漸近評価が得

られる .

$x > 0$ のときの $X(t)$ の推移確率密度 $G_T^{(1/2)}(s, x; t, y)$ は, 時刻 s で x にいたブラウン運動が, 時刻 T までの間には原点に到達することはないという条件の下で, 時刻 $t (\leq T)$ に y に到達する確率密度であるから, $h(T - s, x)^{-1} \hat{G}(t - s, y|x) h(T - t, y)$ であり, これが (1.4) の第 1 式である . 第 2 式は第 1 式で $s = 0$ とおいて, 上述の $h(T - s, x)$ の漸近評価と, やはり (1.5) から容易に導くことが出来る $x \rightarrow 0$ での $\hat{G}(t, y|x)$ の漸近評価, $\hat{G}(t, y|x) \sim (2xy/t)G(t, y|0)$ を適用すれば導ける .

(1.2) は (1.4) で $T \rightarrow \infty$ の極限をとれば得られるはずである . このことは上述の $h(T - t, x)$ の漸近評価を用いれば簡単に確かめることができる . (1.2) の第 1 式は, 3 次元ベッセル過程の推移確率密度は吸収壁ブラウン運動の推移確率密度 $\hat{G}(t, y|x)$ を $(1/x)\hat{G}(t, y|x)y$ と変換すれば得られることを示しているが, これは Doob の意味での優調和変換 [4] である .

(1.2) と (1.4) で与えられた 3 次元ベッセル過程とブラウン彷徨過程の推移確率密度を比較してみると, それらの分布は互いに絶対連続であって

$$P(X(\cdot) \in dw) = \sqrt{\frac{\pi T}{2}} \frac{1}{w(T)} P(Y(\cdot) \in dw) \quad (1.6)$$

となることが分かる . (1.6) は Imhof 関係とよばれている [9].

1.2 半マルチンゲ - ルと伊藤の公式

任意の $s > 0$ に対して $B(s)$ を与えたとき, その後のブラウン運動は

$$B(u), u < s \text{ の値に影響されず}$$

$$B(t) - B(s) \text{ は (条件付き) 平均が } 0 \text{ である}$$

という性質をもつ . これをマルチンゲ - ル性という . ブラウン運動に基づく確率積分などは, マルチンゲ - ル性をもつ確率過程 (以後単にマルチンゲ -

ルとよぶ) の例である. マルチンゲ - ルと有界変動過程の和で与えられる確率過程を半マルチンゲ - ルとよぶ.

確率過程 $Z(t)$ の二次変分 (quadratic variation) を $\langle Z \rangle_t$ とおく:

$$\langle Z \rangle_t = \sup \sum_{j=0}^m (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

ここで \sup は 時間の分割 $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} \equiv t$ についてとる. $Z(t)$ が有界変動過程である場合は $\langle Z \rangle_t = 0$ である. また, 確率過程 $Z(t), \hat{Z}(t)$ に対して

$$\langle Z, \hat{Z} \rangle_t \equiv \frac{1}{4} \left\{ \langle Z + \hat{Z} \rangle_t - \langle Z - \hat{Z} \rangle_t \right\}$$

と定義し, さらに $dZ(t)d\hat{Z}(t) = d\langle Z, \hat{Z} \rangle_t$ という記法を用いることにする. ブラウン運動の二次変分は $dB(t)dB(t) = dt$ であるが, 逆に二次変分が dt である連続マルチンゲ - ルはブラウン運動に限る. 一般に連続なマルチンゲ - ルは二次変分により一意的に定まる. $B_1(t)$ と $B_2(t)$ が互いに独立なブラウン運動であるとき $dB_1(t)dB_2(t) = 0$ となるので, D 次元ブラウン運動 $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_D(t))$ に対して $dB_i(t)dB_j(t) = \delta_{ij}dt$ が成立する. 多次元の場合でも $dM_i(t)dM_j(t), 1 \leq i, j \leq D$ が与えられるとマルチンゲ - ル $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_D(t))$ が一意的に決まることが知られている.

$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_D(t))$ をマルチンゲ - ル部分が $M(t)$, 有界変動部分が $A(t) = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_D(t))$ である D 次元半マルチンゲ - ルとする. F を \mathbb{R}^D 上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程 $F(Z(t))$ は,

$$\begin{aligned} dF(Z(t)) &= \sum_{i=1}^D \frac{\partial F}{\partial x_i}(Z(t)) (dM_i(t) + dA_i(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq D} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(Z(t)) dM_i(t)dM_j(t) \quad (1.7) \end{aligned}$$

と展開することができる. これを伊藤の公式という (例えば [25, 29] を参照). これを用いると $dB(t)^2 = 2B(t)dB(t) + dt$, つまりブラウン運動の 2 乗は, マルチンゲール部分が確率積分 $2 \int_0^t B(s)dB(s)$, 有界変動部分が t である半マルチンゲールであることが分かる. また, $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2)^{1/2}$ に適用することにより, 3 次元ベッセル過程 $Y(t)$ も半マルチンゲールであり, (1.3) の確率微分方程式で表されるようにそのマルチンゲール部分はブラウン運動, 有界変動部分は $\int_0^t ds/Y(s)$ であることが導かれる.

2 エルミート行列値過程

2.1 Bru の定理

$N \times N$ エルミート行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$, $N \times N$ 実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}(N)$ とおく. そして行列 A の転置行列を tA , 複素共役を \bar{A} , 随伴行列を $A^* \equiv \bar{{}^tA}$ と書くことにする. Bru は $\mathcal{H}(N)$ -値過程の一例である Wishart 過程について調べ, その固有値過程が満たす方程式を導いた [2, 3]. この結果は, 行列値過程の各要素 $\xi_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq N$ が複素数値連続半マルチンゲールである場合に拡張することができる [16, 17]. この節ではこの拡張の結果得られた一般化された Bru の定理を紹介し, 次節でその応用例を与えることにする.

$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ を $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi(t) = (\xi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ の固有値を成分にもつベクトルとする. ただし, 大小関係 $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ を満たすものとする. このとき $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ を

$$U(t)^* \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

というように, $\Xi(t)$ を対角化するユニタリ行列の族とする.

$$\Gamma_{ij,kl}(t)dt = \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{ij} \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{kl}$$

とおき, また $(U(t)^* d\Xi(t)U(t))_{ii}$ の有界変動部分を $d\Upsilon_i(t)$ と書くこととする. そして, 固有値 $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ が初めて重なる正の時刻を τ とおく:

$$\tau = \inf\{t > 0 : \lambda_i(t) = \lambda_j(t) \text{ となる } 1 \leq i \neq j \leq N \text{ が存在する}\}.$$

定理 2.1 [一般化された Bru の定理] ([2, 3, 16, 17]) 複素数値過程 $\xi_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq N$ を連続半マルチンゲールとする. このとき $\Xi(t)$ の固有値 $\lambda(t)$ は次の確率微分方程式を満たす.

$$d\lambda_i(t) = dM_i(t) + dJ_i(t), \quad t \in (0, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

ただし $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$ は $dM_i(t)dM_j(t) = \Gamma_{ii,jj}(t)dt$ であるマルチンゲールであり, $J(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_N(t))$ は

$$dJ_i(t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \mathbf{1}_{\{\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)\}} \Gamma_{ij,ji}(t) dt + d\Upsilon_i(t)$$

で与えられる有界変動過程である. ここで $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える「条件 ω の指示関数」である.

2.2 応用例

$\nu \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ として, $B_{ij}^R(t), B_{ij}^I(t), 1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N$ を $2N(N + \nu)$ 個の独立な 1 次元ブラウン運動とする. $1 \leq i, j \leq N$ に対して

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}^R(t), & i < j \\ B_{ii}^R(t), & i = j \\ \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ji}^R(t), & i > j \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}^I(t), & i < j \\ 0, & i = j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} B_{ji}^I(t), & i > j \end{cases}$$

とおく.

(i) GUE 型行列値過程

$\Xi^{\text{GUE}}(t) = (s_{ij}(t) + \sqrt{-1}a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$, $t \in [0, \infty)$ で定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を考える. 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ は $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数になるが, $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{U}(dH)$ に対する確率密度関数は

$$\mu^{\text{GUE}}(H, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{c_1(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} H^2\right), \quad H \in \mathcal{H}(N)$$

で与えられる. ここで, Tr は行列のトレースをとることを表す. また, $c_1(N) = 2^{N/2} \pi^{N^2/2}$ である. $N \times N$ ユニタリ行列全体の集合を $\mathbf{U}(N)$ とおくと, 任意の $U \in \mathbf{U}(N)$ に対して, 確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, t) \mathcal{U}(dH)$ はユニタリ変換 $H \rightarrow U^* H U$ の下で不変である. ランダム行列理論では, このような不変性をもつ $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数の統計集団をガウス型ユニタリ集団 (GUE) とよぶ [23, 26]. この GUE の固有値分布の密度関数は, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して

$$g^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}\right) h_N(\mathbf{x})^2 \quad (2.2)$$

で与えられる [23, 26]. ここで $h_N(\mathbf{x})$ は差積で表される $N \times N$ のヴァンデルモンドの行列式

$$h_N(\mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(x_j^{i-1}\right) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i)$$

である. また, $C_1(N)$ は正規化定数であり, $\Gamma(x)$ をガンマ関数として $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)$ と表せる.

一般化された Bru の定理を $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ に適用するために, $d\xi_{ij}(t) d\xi_{kl}(t)$ の値を計算しておくことにする. まず $d\xi_{ii}(t) d\xi_{ii}(t) = dB_{ii}^{\text{R}}(t) dB_{ii}^{\text{R}}(t) = dt$ がすぐに分かる. また $i < j$ のときには, $d\xi_{ij}(t) = dB_{ij}^{\text{R}}(t)/\sqrt{2} + \sqrt{-1} dB_{ij}^{\text{I}}(t)/\sqrt{2} = \overline{d\xi_{ji}(t)}$ であることに注意すると, $d\xi_{ij}(t) d\xi_{ij}(t) = dt/2 - dt/2 = 0$, $d\xi_{ij}(t) d\xi_{ji}(t) = dt/2 + dt/2 = dt$ となることも分かる. $(i, j) \neq$

$(k, \ell), (\ell, k)$ のときには, 独立性から $dB_{ij}^R(t)dB_{kl}^R(t) = dB_{ij}^I(t)dB_{kl}^I(t) = 0$ が成り立つので, $d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t) = 0$ となる. 以上をまとめると $d\xi_{ij}(t)d\xi_{kl}(t) = \delta_{i\ell}\delta_{jk}dt$, $1 \leq i, j, k, \ell \leq N$ となる. この結果を用いて $dM_i(t)dM_j(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii,jj}(t)dt &= \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{ii} \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{jj} \\ &= \sum_{k,\ell} \overline{u_{ki}} d\xi_{k\ell} u_{li} \sum_{m,n} \overline{u_{mj}} d\xi_{mn} u_{nj} \\ &= \sum_{k,\ell} \overline{u_{ki}} u_{kj} u_{li} \overline{u_{lj}} dt = \delta_{ij} dt\end{aligned}$$

となる. ここで最後の等式は, $U(t)$ がユニタリ行列であること ($U(t)^*U(t) = U(t)U(t)^* = I_N$) から導かれる. したがって, マルチンゲール部分は N 次元ブラウン運動であることが示されたことになる. 同様な計算により $\Gamma_{ij,ji}(t) = 1$, $1 \leq i, j \leq N$ が分かる. $(U(t)^* d\Xi(t) U(t))_{ii}$ には有界変動部分はないこと ($d\Upsilon_i(t) = 0$) に注意すると, 一般化された Bru の定理から, $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式が

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.3)$$

であることが導かれる. また, $\tau = \infty$ であることを示すことができる. 本稿の冒頭で述べた Dyson モデルの確率微分方程式は

$$dY_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{Y_i(t) - Y_j(t)} dt \quad (2.4)$$

($t \in (0, \infty)$, $1 \leq i \leq N$) の形であり, (2.3) はこの $\beta = 2$ の場合になっている.

(ii) **GOE 型行列値過程**

$\Xi^{\text{GOE}}(t) = (s_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$, $t \in [0, \infty)$ で定義される $S(N)$ -値過程を考える. 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ は, $S(N)$ の体積要素

$\mathcal{V}(dS)$ に対する確率密度関数が

$$\mu^{\text{GOE}}(S, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{c_2(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} S^2\right), \quad S \in \mathcal{S}(N)$$

であるような $\mathcal{S}(N)$ -値確率変数を与える。ここで $c_2(N) = 2^{N/2} \pi^{N(N+1)/4}$ である。 $N \times N$ 実直交行列全体の集合を $\mathbf{O}(N)$ とおくと、任意の $V \in \mathbf{O}(N)$ に対して、確率 $\mu^{\text{GOE}}(S, t) \mathcal{V}(dS)$ は直交変換 $S \rightarrow {}^t V S V$ の下で不変である。このような $\mathcal{S}(N)$ -値確率変数の統計集団はガウス型直交集団 (GOE) とよばれている。GOE の固有値分布の密度関数は、 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して、

$$g^{\text{GOE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_2(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}\right) h_N(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

で与えられる (ただし $C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i/2)$) [23, 26]. GUE 型行列値過程と同様な計算により、 $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式は

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad 1 \leq i \leq N$$

と定まる。この場合にも $\tau = \infty$ であることを示すことができる。これは Dyson モデルの方程式 (2.4) の $\beta = 1$ の場合に等しい。

(iii) Laguerre 過程

$(N + \nu) \times N$ 複素行列全体の集合を $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ と書くことにする。 $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ -値過程として、 $L(t) = (B_{ij}^{\text{R}}(t) + \sqrt{-1} B_{ij}^{\text{I}}(t))_{1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N}$ を考える。これは、任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して、確率密度関数が

$$\mu_{\nu}^{\text{chGUE}}(L, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)}}{c_3(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} L^* L\right), \quad L \in \mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$$

であるような $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{C})$ -値確率変数を与える ($c_3(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)}$)。このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型ユニタリ集団 (chGUE) とよばれている [26]. これに対して、 $\Xi^{\text{L}}(t) = L(t)^* L(t)$, $t \in [0, \infty)$ によつ

て定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を Laguerre 過程とよぶ [20]. 行列 $\Xi^L(t)$ は非負定値なので固有値はすべて非負である. 定義より $\xi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N+\nu} (B_{ki}^R(t) - \sqrt{-1}B_{ki}^I(t))(B_{kj}^R(t) + \sqrt{-1}B_{kj}^I(t))$ となるので, ブラウン運動の 2 乗について 1.2 節の最後に述べたことを思い出すと, $d\xi_{ij}(t)$ の有界変動部分は $2(N + \nu)\delta_{ij}dt, 1 \leq i, j \leq N$ であることがすぐに分かる (従って $d\Upsilon_i(t) = 2(N + \nu)dt$). また,

$$d\xi_{ij}(t)d\xi_{k\ell}(t) = 2\left(\xi_{i\ell}(t)\delta_{jk} + \xi_{kj}(t)\delta_{i\ell}\right)dt, \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq N$$

と計算できるので, $\Gamma_{ii,jj}(t) = 4\lambda_i(t)\delta_{ij}, \Gamma_{ij,ji}(t) = 2(\lambda_i(t) + \lambda_j(t)), 1 \leq i, j \leq N$ と求められる. したがって $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}dB_i(t) + 2(N + \nu)dt + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

($1 \leq i \leq N$) の解となっていることが導かれる. この場合も $\tau = \infty$ である.

(iv) Wishart 過程

$(N + \nu) \times N$ 実行列全体の集合を $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{R})$ とおく. $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{R})$ -値過程 $W(t) = (B_{ij}^R(t))_{1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N}$ は, 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, 確率密度関数が

$$\mu_\nu^{\text{chGOE}}(W, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)/2}}{c_4(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr } {}^t W W\right), \quad W \in \mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{R})$$

であるような $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbb{R})$ -値確率変数を与える ($c_4(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)/2}$). このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型直交集団 (chGOE) とよばれている [26]. これに対して, $\Xi^W(t) = {}^t W(t)W(t), t \in [0, \infty)$ によって定義される $\mathcal{S}(N)$ -値過程を Wishart 過程とよぶ [3]. Laguerre 過程のと

きと同様な計算により, $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}dB_i(t) + (N + \nu)dt + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

($1 \leq i \leq N$) の解となっていることが導かれる (この場合も $\tau = \infty$.)

3 非衝突拡散過程

3.1 Karlin-McGregor の公式

非衝突拡散過程を解析するには, 行列式を用いた密度関数の表示が有効である. この行列式表示は, 確率論では Karlin-McGregor の公式 [11], 組み合わせ論的表現論では Lindström-Gessel-Viennot の公式 [22, 6, 30, 21] とよばれる. またこの公式は, 量子力学で自由フェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版とみなすこともできる [31]. この節では, 時間も空間も離散的である場合を例にしてこの行列式表示を説明し, 公式の証明を与えることにする.

まず, $1+1$ 次元の時空平面を表す正方格子に, 頂点の集合 V と向き付けされた辺の集合 E を

$$V = \{(z, k) : z \text{ は整数, } k \text{ は非負整数, } z+k \text{ は偶数}\}$$

$$E = \left\{ \left((z, k) \rightarrow (z-1, k+1) \right), \left((z, k) \rightarrow (z+1, k+1) \right) : (z, k) \in V \right\}$$

と定義して, この二つを組とする有向グラフ $G = (V, E)$ を導入する.

n を自然数とする. $\mathbf{p} = \{v_k\}_{k=0}^n$ が道であるとは, $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対して $(v_k \rightarrow v_{k+1}) \in E$ が満たされることをいう. u から v への道があるとき $u \rightarrow v$ と書き, 道 $u \rightarrow v$ 全体の集合を $\mathcal{P}(u, v)$ と書くことにする. N 個の始点 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in V^N$ と N 個の終点 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in V^N$

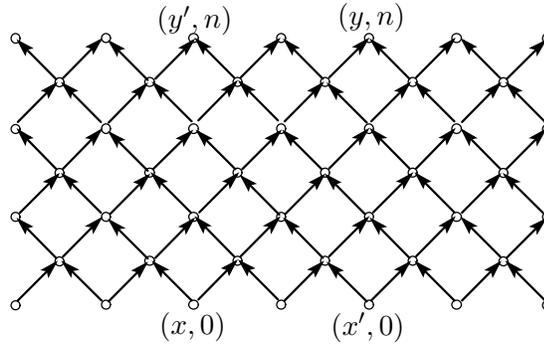


図 2 : グラフ G の図

が与えられたとき, N 本の道の組 $\{u_i \rightarrow v_i\}_{i=1}^N$ 全体の集合を $\mathcal{P}(u, v)$ とおく :

$$\mathcal{P}(u, v) = \left\{ \mathbf{p}^{(N)} = (p_1, p_2, \dots, p_N) : p_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i), i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

二つの道が同じ頂点をもつとき, それらは衝突するという. 以上の定義から, 有向グラフ $G = (V, E)$ 上の道が次の重要な性質をもつことは, 図 2 を見ると明らかであろう.

性質 ① $x < x', y > y'$ のとき,
 任意の $\mathbf{p} \in \mathcal{P}((x, 0), (y, n))$ と $\mathbf{p}' \in \mathcal{P}((x', 0), (y', n))$ は衝突する.

N 本の非衝突な道全体の集合

$$\mathcal{P}_0(u, v) \equiv \left\{ \mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}(u, v) : \mathbf{p}^{(N)} \text{の道は互いに非衝突} \right\}$$

を考える. 重み関数 $w : E \rightarrow (0, 1)$ を導入し, 各々の道に対して重み $w(\mathbf{p}) = \prod_{e \in \mathbf{p}} w(e)$ を与え, u から v への道のグリーン関数を

$$G(u, v) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(u, v)} w(\mathbf{p})$$

で定義する. N 本の道 $\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ に対する重みは $w(\mathbf{p}^{(N)}) = \prod_{i=1}^N w(p_i)$ で与えることにすると, $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ のグリーン関数は

$$G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{p}^{(N)})$$

で与えられる. 例えば, 重み関数が

$$w\left((z, k) \rightarrow (z-1, k+1)\right) + w\left((z, k) \rightarrow (z+1, k+1)\right) = 1, \quad (z, k) \in V$$

を満たすときは, 上で述べた道は, 時刻 k に z の状態にあったものが, 時刻 $k+1$ で状態 $z+1$ になる確率が $w((z, k) \rightarrow (z+1, k+1))$, 状態 $z-1$ になる確率が $w((z, k) \rightarrow (z-1, k+1))$ であるようなマルコフ連鎖を表すことになる. 一般に, グリーン関数 $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は時刻 0 で u から出発したマルコフ連鎖が時刻 n で v に到達する推移確率を与え, グリーン関数 $G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は時刻 0 で $u_i, i = 1, 2, \dots, N$ から出発した N 個の独立なマルコフ連鎖が互いに衝突することなく $v_i, i = 1, 2, \dots, N$ に到達する確率を与えることになる.

以上の設定の下で次の定理が成り立つ. $N = 2$ の場合はこの定理は 1.1 節で述べた反射原理と本質的に同じであることに注意すると, 反射原理の一般化とみなすことができる.

定理 3.1 [Karlin-McGregor の公式] ([11, 22, 6]) N 個の始点 $u_i = (x_i, 0), i = 1, 2, \dots, N$ と N 個の終点 $v_i = (y_i, n), i = 1, 2, \dots, N$ がそれぞれ $x_1 < x_2 < \dots < x_N, y_1 < y_2 < \dots < y_N$ を満たすとき, 次が成り立つ.

$$G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(u_i, v_j) \right) \quad (3.1)$$

【証明】 $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換全体の集合を \mathfrak{S}_N とする. 行列式の定義より,

$$\det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(u_i, v_j) \right) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\pi) G(u_1, v_{\pi(1)}) \cdots G(u_N, v_{\pi(N)}) \quad (3.2)$$

である. $\pi \in \mathfrak{S}_N$ に対して, これと N 本の道 $p_i \in \mathcal{P}(u_i, v_{\pi(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$ とからなる組を $(\pi, p_1, p_2, \dots, p_N)$ と書くことにする. まず $(\pi, p_1, p_2, \dots, p_N)$ として, 少なくとも 1 か所で衝突している場合を表すものを考えることにする. 図 3 に示したように, 衝突が起こった最初の頂点を x とおく. もしも, 最初の衝突が同時に 2 か所以上で起こった場合には最も左側のもの (位置の座標が最小のもの) を x とする. そして, この頂点 x で衝突する二つの道を p_i, p_j とする.

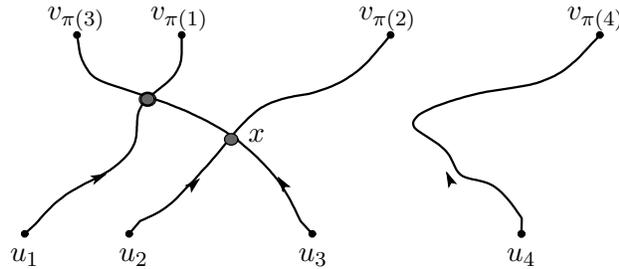


図 3: 衝突している道の例

道 p_i のうちの始点 u_i から x までの部分を $p_i(\rightarrow x)$, x から終点 $v_{\pi(i)}$ までの部分を $p_i(x \rightarrow)$ と書くことにする. 同様に, 道 p_j のうち始点 u_j から x までの部分を $p_j(\rightarrow x)$, x から終点 $v_{\pi(j)}$ までの部分を $p_j(x \rightarrow)$ と書く. そして, 図 4 に示したように, x でそれぞれの部分を入れ替えて

$$p'_i = p_i(\rightarrow x)p_j(x \rightarrow) \quad : \quad x \text{ までは } p_i, x \text{ からは } p_j \text{ を使った道}$$

$$p'_j = p_j(\rightarrow x)p_i(x \rightarrow) \quad : \quad x \text{ までは } p_j, x \text{ からは } p_i \text{ を使った道}$$

と定めることにする. また, $k \neq i, j$ に対しては, $p'_k = p_k$ と定める.

i と j の互換 (i, j) と置換 π との積置換を π' と書く. N 本の道の組

$$(\pi', p'_1, p'_2, \dots, p'_N) = p^{(N)'} \quad \text{と} \quad (\pi, p_1, p_2, \dots, p_N) = p^{(N)}$$

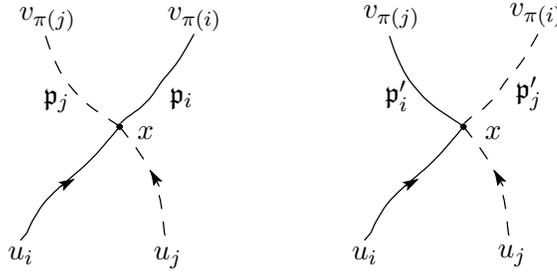


図 4 : p_i, p_j と p'_i, p'_j の例

とは, 同じ重みをもち, また, $\text{sgn}(\pi) = -\text{sgn}(\pi')$ であることから,

$$\text{sgn}(\pi)w(\mathbf{p}^{(N)}) = -\text{sgn}(\pi')w(\mathbf{p}^{(N)'})$$

となることが分かる. $\mathbf{p}^{(N)'}$ に対して再び同じ変換を施すと元の $\mathbf{p}^{(N)}$ に戻ることに注意すると, $\mathbf{p}^{(N)}$ と $\mathbf{p}^{(N)'}$ とは 1 対 1 に対応していることが分かる. グリーン関数 $G(u, v)$ は, 始点 u から終点 v までの道の重み付きの和であったので, (3.2) は, N 本の道のさまざまな配置を適当な重みと符号を付けて足し合わせた和と見なせるが, 上の考察から, この和をとると衝突がある場合の寄与 $\text{sgn}(\pi)w(\mathbf{p}^{(N)})$ はすべて相殺されてしまうことが結論される. とこ
ろが, 性質 ① より, 非衝突の場合には π は必ず恒等変換であるので

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\pi)G(u_1, v_{\pi(1)}) \cdots G(u_N, v_{\pi(N)}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \sum_{(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)} \text{sgn}(\pi)w(\mathbf{p}_1) \cdots w(\mathbf{p}_N) \\ &= \sum_{\mathbf{p}^{(N)} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{p}^{(N)}) = G_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, (3.2) より定理が証明された. ■

定理の証明で使われている道の重みに関する重要な性質は「衝突した後の道の部分を互いに入れ替えても, 二つの道の重みは同じ」というものである.

互いに独立で同分布である N 本の拡散過程について考えてみると, それらを成分とする N 次元確率過程も拡散過程となり, 異なる 2 本が最初に衝突する時刻はマルコフ時刻になる. このことから, この性質は強マルコフ性から導かれることになる. また重み関数を与えるときに, 時間的にも空間的にも斉次性は仮定していないので, 上の定理は時間的あるいは空間的に非斉次である拡散過程にも適用できることになる.

3.2 非衝突ブラウン運動

\mathbb{R}^N の部分集合 \mathbf{W}_N^A を $\mathbf{W}_N^A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}$ と定義する. これは, A_{N-1} 型の Weyl 領域とよばれているものである [7]. \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁ブラウン運動の推移確率密度, つまり時刻 0 で \mathbf{W}_N^A 内の点 \mathbf{x} から出発したブラウン運動が \mathbf{W}_N^A から出ることなく時刻 t で \mathbf{W}_N^A 内の点 \mathbf{y} へ到達する確率密度は, 定理 3.1 の Karlin-McGregor の公式より

$$f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(t, y_j|x_i) \right)$$

と表される. したがって, \mathbf{x} から出発したブラウン運動が, 時刻 t までの間 \mathbf{W}_N^A から出ないでいる確率は,

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N^A} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y}$$

で与えられることになる.

さて, 有限な時間区間 $(0, T]$ での非衝突ブラウン運動を定義することにしよう. この過程 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$, $0 \leq s < t \leq T$ は, 時刻 T まで衝突しないという条件の下で, 時刻 s で $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^A$ にいた N 個のブラウン運動が時刻 t で $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A$ に到達する確率密度であるので,

$$g_N(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s, \mathbf{x})} f_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

で与えられる. この非衝突ブラウン運動において, N 個のブラウン運動がすべて原点から出発する場合も考えたいが, (3.3) 式において $|x| \rightarrow 0$ とすると分母と分子がともに 0 になってしまう. この極限を正しく求めるためには, $f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ と $\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x})$ の $|x|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ での漸近評価が必要となる. それらは

$$\begin{aligned} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &\sim \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_1(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right) h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) h_N(\mathbf{y}) \\ \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) &\sim \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

で与えられる [14, 15, 17]. ただし, $C_1(N)$ と $C_2(N)$ はそれぞれ GUE と GOE の固有値分布の密度関数 (2.2) と (2.5) の表式に現れたものに等しい. これらを用いると, すべて原点から出発した非衝突ブラウン運動の推移確率密度を次のように与えることができる.

$$g_N^T(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) = \frac{T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2}}{C_2(N)} h_N(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right) \mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y}) \quad (3.5)$$

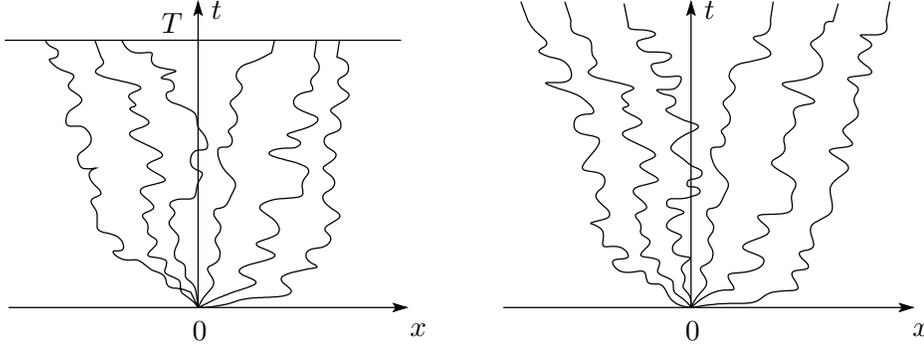


図 5 : 時間的に非斉次な過程 $X(t)$ と 斉次な過程 $Y(t)$

図 5 のように非衝突条件を課す時間間隔 T を無限大にすると, 非衝突ブラ

ウン運動 $X(t)$ は，推移確率密度関数が

$$\begin{aligned} p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^A \\ p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{0}) &= \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} h_N(\mathbf{y})^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $Y(t)$ に収束することも，上の漸近評価 (3.4) を用いると導くことができる．(3.6) の形から， $Y(t)$ は \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁ブラウン運動の優調和変換 [4] であり， $\beta = 2$ の場合の Dyson モデルの方程式 (2.4) を満足することは明らかである．GUE 型行列値過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程が，同じく $\beta = 2$ にあたる Dyson モデルの方程式 (2.3) を満たすことは，一般化された Bru の定理の応用例として 2.2 節で示した．したがってこれで，両者が確率過程としては等価であるという Dyson の結果が導かれたことになる．

ここで，(1.2) と (3.6)，(1.4) と (3.3) および (3.5) とをそれぞれ見比べていただきたい． $X(t)$ と $Y(t)$ は，それぞれ 1.1 節で説明したブラウン彷徨過程 $X(t)$ と 3 次元ベッセル過程 $Y(t)$ の自然な高次元（多成分，多粒子）拡張になっていることが頷けるであろう．また，(3.3)，(3.5) および (3.6) により， $X(t)$ と $Y(t)$ の分布には次の関係があることも分かる．

$$P(\mathbf{X}(\cdot) \in dw) = \frac{C_1(N)}{C_2(N)} T^{N(N-1)/4} \frac{1}{h(w(T))} P(\mathbf{Y}(\cdot) \in dw) \quad (3.7)$$

この関係式は，3 次元ベッセル過程とブラウン彷徨過程に対する Imhof 関係 (1.6) の一般化である [14, 15]．

4 時間的に非斉次な行列値過程

前節までで，GUE とよばれるランダム行列集団に対応する時間的に斉次な拡散過程が存在し，それは非衝突ブラウン運動で与えられるという Dyson

の結果を紹介することができた．複素行列の集団 GUE を実行列に制限すると GOE になるが，それではこの GOE に対応する時間的に斉次な拡散過程はどのようなものであろうか．

残念ながら，この問いに対しては詳しいことは分かっていない．そこで我々は，時間的に非斉次な場合にまで考える範囲を広げて，関連する非衝突拡散過程を探ってみることにした．というのは，時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in [0, T]$ を見てみると，非衝突条件の終点 T での分布は GOE の固有値分布と一致していることが分かるからである．（定義より $y \in \mathbf{W}_N^A$ に対しては $\mathcal{N}_N(0, y) = 1$ であるから，(3.5) で $t = T$ とすると，(2.5) で与えた g^{GOE} と等しくなる．）ただし $0 < t < T$ のときは $X(t)$ の分布は GOE の固有値分布とは異なる．特に $0 < t \ll T$ のときには GUE の固有値分布に近いものであるはずである．このことから， $X(t), t \in [0, T]$ は GUE から GOE への転移を示す行列値過程の固有値過程と見なせるのではないかと予想できる．

GOE 型行列過程 $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ の各成分は GUE 型行列過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の各成分の虚部を零としたものである．よって， $0 < t \ll T$ のときには非対角成分の実部と虚部が（零から出発して）ほぼ同じ大きさで時間発展して行くが， $t \nearrow T$ につれて虚部は再び零になっていくように $\mathcal{H}(N)$ -値過程をうまく与えてやることができれば， $X(t)$ をその固有値過程としてもつような行列値過程を実現できる可能性がある [24, 28, 14]．実際，各成分の虚部を期間 T のブラウン橋で与えてやればうまくいくことが分かる．すなわち，互いに独立なブラウン橋 $\beta_{ij}^T(t), 1 \leq i < j \leq N$ で $B_{ij}^R(t), 1 \leq i \leq j \leq N$ とも独立であるものを用意して

$$a_{ij}^T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ij}^T(t), & i < j \text{ のとき} \\ 0, & i = j \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ji}^T(t), & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき, $\mathcal{H}(N)$ -値過程を

$$\Xi^T(t) = \left(s_{ij}(t) + \sqrt{-1} a_{ij}^T(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, T] \quad (4.1)$$

と定義すると次の定理が成り立つ.

定理 4.1 ([16]) $\Xi^T(t), t \in (0, T]$ の固有値過程 $\lambda^T(t), t \in (0, T]$ は時間的に非斉次な拡散過程であり, すべてが原点から出発する時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in (0, T]$ と分布が等しい.

証明では $\Xi^T(t)$ の固有値過程 $\lambda^T(t)$ と $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程が一般化された Imhof 関係 (3.7) を満たすことを示す. $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程と時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $Y(t)$ の分布が等しいこと (Dyson の結果) はすでに示したので, このことより, $\lambda^T(t)$ が $X(t)$ と分布の意味で等価であることが結論できるのである.

この定理より, $X(t), t \in (0, T]$ という一つの拡散過程の推移確率密度に対して, Karlin-McGregor の公式を利用した (3.5) という表現と, (4.1) で定義された $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi^T(t)$ の固有値過程の推移確率密度という二つの異なる表現が与えられたことになる. これは, 3次元ベッセル過程やブラウン彷徨過程が1次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と3次元拡散過程の動径方向への射影としての表現という二つの表現をもつと同じ構造である. $X(t), t \in (0, T]$ に対する後者の表現は, $\mathcal{H}(N)$ -値過程をその固有値の部分 $\Lambda(t)$ とユニタリ行列部分 $U(t)$ に分解して, そのうちのユニタリ部分を積分したもので与えられる. 従って, 定理 4.1 の系として次の等式が得られることになる.

系 4.2 ([16]) dU を空間 $U(N)$ での Haar 測度とし, $\int_{U(N)} dU = 1$ と規格化されているものとする. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{W}_N^A$

に対して, $\Lambda_{\mathbf{x}} = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N), \Lambda_{\mathbf{y}} = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_N)$ とすると, 任意の $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して等式

$$\int_{\mathbf{U}(N)} dU e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr}(\Lambda_{\mathbf{x}} - U^* \Lambda_{\mathbf{y}} U)^2} = \frac{C_1(N) \sigma^{N^2}}{h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y})} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(\sigma^2, y_j | x_i) \right)$$

が成立する.

この等式は Harish-Chandra の積分公式 [8] あるいは Itzykson-Zuber の積分公式 [10] とよばれるものである. 上述の定理 4.1 からの導出は, この公式の確率解析的な導出方法であると言える.

5 おわりに

一般化された Bru の定理を, より高い対称性の条件を加えた $\mathcal{H}(N)$ -値過程に適用することにより, 固有値過程が $\beta = 4$ の Dyson モデルで与えられるガウス型シンプレクティック集団 (GSE) の他, Altland と Zirnbauer [1] によって導入された class C および class D とよばれるランダム行列集団に関連する行列値過程を導くこともできる [17].

Yor [32] はブラウン彷徨過程を特別な場合として含む拡散過程の族を導入し, generalized meanders と名付けた. ここではこれらを彷徨過程と総称することにする. 彷徨過程は二つのパラメータ $\nu \in (-1, \infty)$ と $\kappa \in [0, 2(\nu+1))$ をもち, ブラウン彷徨過程は $\nu = 1/2, \kappa = 1$ の場合に対応している. また κ の範囲の境界にあたる $\kappa = 0$ の場合はベッセル過程, $\kappa = 2(\nu+1)$ の場合はベッセル橋 (時刻 T で原点に到達するという条件の下でのベッセル過程) に対応している. 本稿では主に非衝突条件を課した 1 次元ブラウン運動を考えたが, ブラウン運動の代わりに彷徨過程を考えることもできる. この場合の状態空間は A_{N-1} 型の Weyl 領域ではなく, $\nu \geq 0$ のときには C_N 型, $\nu \in (-1, 0)$ のときには D_N 型の Weyl 領域となる. 本稿では非衝突ブラウ

ン運動が GUE と GOE のランダム行列と関係することを詳しく述べたが、非衝突彷徨過程は自然な形で、カイラル型ランダム行列、あるいは Altland と Zirnbauer により研究された Bogoliubov-de Gennes 型ランダム行列と関連することが示せる [17, 19].

本稿では議論しなかったが、拡散過程の本数（または行列の大きさ） N を無限大にしたときの系の漸近挙動を調べる問題がある [23, 26]. これは、ランダム行列理論を応用して無限粒子系を構成するという重要な課題に関するものであり、[27, 13, 18] およびそれらに引用されている文献を参考にしていただきたい。また、vicious walk とよばれる離散的な非衝突過程については、[12, 15] および [31] を参照していただきたい。

参考文献

- [1] A. Altland and M. R. Zirnbauer : Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structure, *Phys. Rev. B* **55** 1142-1161 (1997).
- [2] M. F. Bru : Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.* **29** 127-136 (1989).
- [3] M. F. Bru : Wishart processes, *J. Theor. Probab.* **4** 725-751 (1991).
- [4] J. L. Doob : *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, (Springer, New York, 1984).
- [5] F. J. Dyson : A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.* **3** 1191-1198 (1962).
- [6] I. Gessel and G. Viennot : Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math.* **58** 300-321 (1985).
- [7] D. J. Grabiner : Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **35** 177-204 (1999).
- [8] Harish-Chandra : Differential operators on a semisimple Lie algebra, *Am. J. Math.* **79** 87-120 (1957).
- [9] J. P. Imhof : Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel processes, and applications, *J. Appl. Prob.* **21** 500-510 (1984).

- [10] C. Itzykson and J.-B. Zuber : The planar approximation. II, *J. Math. Phys.* **21** 411-421 (1980).
- [11] S. Karlin and J. McGregor : Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.* **9** 1141-1164 (1959).
- [12] 香取眞理 : 非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列, 『応用数理』 **13** (No.4) 16-27 ([296]-[307]) (2003).
- [13] M. Katori, T. Nagao, and H. Tanemura : Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), pp.283-306; arXiv:math.PR/0301143.
- [14] M. Katori and H. Tanemura : Scaling limit of vicious walks and two-matrix model, *Phys. Rev. E* **66** 011105/1-12 (2002); arXiv:cond-mat/0203549.
- [15] M. Katori and H. Tanemura : Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.* **75** 369-390 (2003); arXiv:math.PR/0203286.
- [16] M. Katori and H. Tanemura : Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.* **8** 112-121 (2003); arXiv:math.PR/0306386.
- [17] M. Katori and H. Tanemura : Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* **45** 3058-3085 (2004); arXiv:math-ph/0402061.
- [18] M. Katori and H. Tanemura : Infinite systems of non-colliding generalized meanders and Riemann-Liouville differintegrals, to appear in *Probab. Th. Rel. Fields*; arXiv:math.PR/0506187.
- [19] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao and N. Komatsuda : Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices, *Phys. Rev. E* **68** 021112/1-16 (2003); arXiv:cond-mat/0303573
- [20] W. König and N. O’Connell : Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel process, *Elec. Comm. in Probab.* **6** 107-114 (2001).
- [21] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot : Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II. With a wall, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 8835-8866 (2000).
- [22] B. Lindström : On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.* **5** 85-90 (1973).
- [23] M. L. Mehta : *Random Matrices*, 3rd ed. (Elsevier Academic Press, London, 2004).

- [24] M. L. Mehta and A. Pandey : On some Gaussian ensemble of Hermitian matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 2655-2684 (1983).
- [25] 長井英生 : 『確率微分方程式』, 共立出版, 1999.
- [26] 永尾太郎 : 『ランダム行列の基礎』, 東京大学出版会, 2005.
- [27] T. Nagao, M. Katori, and H. Tanemura : Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett. A* **307** 29-35 (2003); arXiv:cond-mat/0202068.
- [28] A. Pandey and M. L. Mehta : Gaussian ensembles of random Hermitian matrices intermediate between orthogonal and unitary ones, *Commun. Math. Phys.* **87** 449-468 (1983).
- [29] D. Revuz and M. Yor : *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed. (Springer, New York, 1998).
- [30] J. R. Stembridge : Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.* **83** 96-131 (1990).
- [31] 鈴木淳史 : 『現代物理数学への招待, ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理』, サイエンス社, 2006.
- [32] M. Yor : *Some Aspects of Brownian Motion, Part I: Some Special Functionals*, (Birkhäuser, Basel, 1992).