中央大学大学院理工学研究科

数理物理学特論　2006 年度後期

共形変換と Loewner 方程式

(version 7 : 15 January 2007)

香取眞理 (中央大学理工学部) *

2006 年 9 月 25 日～ 2007 年 1 月 22 日
毎週月曜日　13:00-14:30　 理工 3 号館　3308 教室にて

*Electronic mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

目 次

記号について

$\mathbb{R}$	実数全体のつくる集合.
$\mathbb{C}$	複素数全体のつくる集合.
$\mathbf{1}_{\{\omega\}}$	条件 ω の指示関数. 条件 ω が満たされていれば 1, それ以外は 0 を与える.
$\mathbb{H}$	上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.
$\mathbb{D}$	単位円 $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$.
$\mathcal{B}(w, r)$	$w \in \mathbb{C}$ を中心とした半径 r の円の内点からなる集合, $i.e.$, $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - w\rvert < r\}$.

第1章　Cauchy-Riemann 条件と Cauchy の積分公式

1.1　複素数

- $\mathbb{R} \equiv$ real number（実数）全体の集合
- $x, y \in \mathbb{R}$ のとき，$z = x + \mathrm{i}\,y$ を **complex number（複素数）** という．
  ただし，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
  $\mathbb{C} \equiv \{$ 複素数全体の集合 $\} = \{z = x + \mathrm{i}\,y : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- **複素平面** $\Longleftrightarrow$ 実 2 次元平面

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

  とすると

$$z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\,\theta}.$$

  このとき $r = \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z|$ を z の **absolute value（絶対値）** または **modulus** という．
  $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ としたとき, $\theta \equiv \arg z$ を z の **argument** という．ただし，$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．
- **complex conjugate（複素共役）** $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y = re^{-\mathrm{i}\,\theta}$
  このとき

$$|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 = r^2.$$

- **real part（実部）** と **imaginary part（虚部）**
  $z = x + \mathrm{i}\,y, x, y \in \mathbb{R}$ のとき，$\mathrm{Re}\,z = x, \mathrm{Im}\,z = y$ と書く．

1.2　用語の定義

以下，すべて複素平面上で考えることにする．

- 点 z_0 の **近傍**：ある（小さな）正の数 ε に対して

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

  である点 z の集合. (**Remark**：$|z - z_0| = \varepsilon$ は含まない.）
- **interior point（内点）**：$\mathcal{S}$ を点集合とする．$z_0 \in \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ に完全に含まれるような近傍を持っているとき，z_0 は集合 $\mathcal{S}$ の interior point であるという．

- **open set（開集合）**：集合 $\mathcal{S}$ に含まれる点がすべて interior point であるとき，$\mathcal{S}$ は open set であるという．

- **boundary point（境界点）**：点 z のすべての近傍が $\mathcal{S}$ に含まれる点を少なくとも 1 つ含み，かつ $\mathcal{S}$ に含まれない点も少なくとも 1 つ含むとき，その点を $\mathcal{S}$ の boundary point という．

- **region**：open set そのもの，あるいはそれに，その open set の boundary points の一部，あるいは全部を加えたもの．

- **bounded region（有界領域）**：ある定数 $M > 0$ があり，region に含まれるすべての点 z に対して $|z| \le M$ となるもの．

- **closed（閉）**：region がその boundary points をすべて含むとき, closed であるという．

- **compact**：region が closed であり，かつ bounded であるとき compact であるという．
  領域 $|z| \le 1$ は compact である．
  領域 $|z| < 1$ は open かつ bounded.
  半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ は open で unbounded.

- **connected（連結）**: complex plane 上に適当な個数の点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ をとって，それらを線分 $\overline{z_1 z_2}, \overline{z_2 z_3}, \cdots \overline{z_{n-1} z_n}$ で結ぶと「折れ線」ができる．open region の任意の 2 点が，その region に含まれる「折れ線」で結ぶことができるとき，その region は connected であるという．
  $S = \{z : |z| < 1, |z| > 2\}$ は disconnected.

- **domain**：connected な open region のこと．
  $0 \le \theta_0 < \theta_0 + \alpha < 2\pi$ のとき，$S = \{z = re^{\mathrm{i}\,\theta} : \theta_0 < \arg z < \theta + \alpha\}$ は domain である．これは unbounded である．

1.3　解析関数

z_0 の近傍を含むある region $\mathcal{R}$ に対して，複素関数

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y) \tag{1.3.1}$$

が与えられているものとする．ただし，$z = x + \mathrm{i}\, y$ であり，u と v は x と y の 2 変数実関数である．このとき，極限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.3.2}$$

が一意的に存在するとき，これを $f(z)$ の $z = z_0$ における **derivative（微分）** とよび，$f'(z_0)$ あるいは $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ と書く．

(1.3.2) の極限として，特別な場合として次の 2 つの場合を考えてみることにする．(以下 $z_0 = z$ とする.)

- $\Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}$ の場合：$u(x, y), v(x, y)$ がそれぞれ x で微分可能であり，偏微分

$$u_x(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \qquad v_x(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$$

が存在するならば,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\,\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right) \\ &= u_x(x,y)+\mathrm{i}\,v_x(x,y) \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

である.

- $\Delta z=\mathrm{i}\,\Delta y$ (ただし $\Delta y\in\mathbb{R}$) の場合：$u(x,y), v(x,y)$ がそれぞれ y で微分可能であり，偏微分

$$u_y(x,y)\equiv\frac{\partial}{\partial y}u(x,y),\qquad v_y(x,y)\equiv\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

  が存在するならば,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\mathrm{i}\,\Delta y}+\mathrm{i}\,\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\mathrm{i}\,\Delta y}\right) \\ &= -\mathrm{i}\,u_y(x,y)+v_y(x,y) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

  である.

したがって，f が微分可能であるならば，この 2 つは一致しなければならないので,

$$u_x=v_y,\qquad v_x=-u_y \tag{1.3.5}$$

が成り立たなければならないことになる．この連立の微分方程式は **Cauchy-Riemann condition** とよばれる.

上の議論から Cauchy-Riemann condition (1.3.5) は $f(z)$ が微分可能であるための **necessary condition（必要条件）**であることがわかる．実はこれは **sufficient condition（十分条件）**でもある．つまり，次の定理が成り立つ.

定理 1.3.1 複素平面上のある *region* に含まれる点 $z=x+\mathrm{i}\,y$ で複素関数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ が微分可能であるための必要かつ十分条件は，偏微分 u_x,u_y,v_x,v_y が連続であり，点 $z=x+\mathrm{i}\,y$ で *Cauchy-Riemann condition (1.3.5)* を満たすことである.

Proof. u_x,u_y,v_x,v_y が連続である場合には，Cauchy-Riemann condition が sufficient condition であることを示せばよい．つまり，(1.3.5) が成り立てば，f の微分 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ が $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y\to 0$ の極限のとり方に依らずに (1.3.3) に等しいことをいえばよい．実関数 u_x,u_y,v_x,v_y が, 点 (x,y) で連続ならば,

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y) \\ \Delta v &\equiv v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y) \end{aligned}$$

は,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon_1=0,\qquad \lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon_2=0 \tag{1.3.6}$$

となる $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ を用いて

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_x\Delta x+u_y\Delta y+\varepsilon_1|\Delta z| \\ \Delta v &= v_x\Delta x+v_y\Delta y+\varepsilon_1|\Delta z| \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

と書ける．ただしここで，$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ である．$\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\,\Delta v$ なので，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u}{\Delta z} + \mathrm{i}\,\frac{\Delta v}{\Delta z} \\
&= \left(u_x \frac{\Delta x}{\Delta z} + u_y \frac{\Delta y}{\Delta z}\right) + \mathrm{i}\,\left(v_x \frac{\Delta x}{\Delta z} + v_y \frac{\Delta y}{\Delta z}\right) + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\,\varepsilon_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}, \quad |\Delta z| \neq 0
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\Delta z / |\Delta z| = e^{\mathrm{i}\varphi}$ とおくことにして，Cauchy-Riemann condition (1.3.5) を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= (u_x + \mathrm{i}\,v_x)\frac{\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y}{\Delta z} + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\,\varepsilon_2)e^{-\mathrm{i}\varphi} \\
&= f'(z) + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\,\varepsilon_2)e^{-\mathrm{i}\varphi}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$f'(z)$ は (1.3.3) で与えられたものに等しい．この表式で，どのように $\Delta z \to 0$ をとっても，(1.3.6) より，極限は $f'(z)$ に等しいことになり，題意が証明されたことになる．∎

関数 $f(z)$ が，点 z_0 の近傍で微分可能であるとき，**analytic（解析的）**であるという．また，ある region $\mathcal{R}$ 内のすべての点で analytic であるときは，関数 $f(z)$ は region $\mathcal{R}$ で analytic であるという．
Remark：analytic と同じ意味で **holomorphic** という言葉も使われることがある．

問題 1.1 f が analytic ならば，次が成り立つことを示せ．

$$
|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \tag{1.3.8}
$$

問題 1.2 u, v の gradient（勾配）は

$$
\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)
$$

で与えられる．u と v が Cauchy-Riemann condition を満たすならば

$$
\nabla u \cdot \nabla v = 0 \tag{1.3.9}
$$

が成り立つことを示しなさい．またこのことより，c_1, c_2 を定数としたとき，一般に 2 つの曲線 $u(x,y) = c_1$ と $v(x,y) = c_2$ は互いに直交することを結論しなさい．

1.4 Schwarz の鏡像原理と解析接続

補題 1.4.1 (Schwarz reflection principle) 上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ 内の *domain* D において f が *analytic* であるとする．この *domain* D の実軸に対する鏡像を $\widetilde{D}$ とすると，*domain* $\widetilde{D}$ において関数 $\widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ は *analytic* である．

証明. $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ とすると，与条件より $z = x + \mathrm{i}\,y \in D$ で Cauchy-Riemann の関係式

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.4.1}
$$

が成り立つことになる．また，

$$
\widetilde{f}(z) = u(x,-y) - \mathrm{i}\,v(x,-y)
$$

であるが，これを

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y') + \mathrm{i}\,\widetilde{v}(x, y'), \quad z = x + \mathrm{i}\,y' \in \widetilde{D}$$

と書くことにする．すると

$$\widetilde{u}(x, y') = u(x, -y), \quad \widetilde{v}(x, y') = -v(x, -y) \tag{1.4.2}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

であるから，(1.4.1) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'}, \\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

となるので，$\widetilde{f}$ は $\widetilde{D}$ 内で Cauchy-Riemann の条件を満たすことになる．∎

これより，domain D の境界の一部として実軸があり，その実軸上の境界では f の値が実数であるならば (このとき $x \in \mathbb{R}$ で $\widetilde{f}(x) = \overline{f(x)} = f(x)$ なので), f は domain $\widetilde{D}$ に**解析接続**できることになる．

1.5 Cauchy の積分公式

用語

- **simple curve (Jordan arc)**: 自分自身と交わらない曲線 $z(s) = x(s) + \mathrm{i}\,y(s), a \leq s \leq b$. すなわち

$$z(s_1) \neq z(s_2) \quad \text{if} \quad s_1 \neq s_2 \quad \text{for} \quad s_1, s_2 \in [a, b].$$

  ただし，$z(a) = z(b)$ のときは simple closed curve (Jordan curve) とよばれる．

- **連続性** : C が曲線 (curve) あるいは弧 (arc) のとき，C 上で関数 $f(z)$ が連続であるとは，$f(z(s))$ が $a \leq s \leq b$ に対して連続であることをいう．$z'(s)$ があり，これが連続であるとき曲線 C は **smooth** であるという．

- **contour**: 部分的には smooth な (picewise smooth) 弧を contour という．simple closed contour は **Jordan contour** ともよばれる．

次の定理は，学部での「解析」の講義で習ったであろう．

定理 1.5.1 (Cauchy の積分公式) *simple closed contour* C の中と上で $f(z)$ が *analytic* であるとする．このとき，C の *interior point* z では

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.5.1}$$

が成り立つ．

定理 1.5.2 *simple closed contour* C の中と上で $f(z)$ が *analytic* であるとする．このとき，C の内部の *domain* D ではすべての階数の微分 $f^{(k)}(z), k=1,2,\cdots$ が存在し，次式で与えられる．

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \tag{1.5.2}$$

が成り立つ．

いま $f(z)$ がある domain D で analytic であるとすると，1 階微分が存在することになるが，Cauchy-Riemann 方程式より

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}\, v_x = v_y - \mathrm{i}\, u_y$$

となる．上の Theorem 1.5.2 より，$f''(z)$ も与えられるので，$f'(z)$ は analytic である．つまり continuous(連続) である．したがって u_x, v_x, v_y, u_y は連続であることになる．(同様の議論により，高階の偏微分 $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \ldots$ も連続であることが保障される.）この結果を定理の形で与えておくことにする．

定理 1.5.3 $f = u + \mathrm{i}\, v$ が *analytic* である点においてはかならず，u と v のすべての偏微分は連続である．

1.6 平均値の公式, 最大値の原理および Schwarz の補題

Cauchy の積分公式 (定理 1.5.1) で contour として特に z を中心とした半径 r の円の円周をとると，$\xi - z = re^{\mathrm{i}\,\theta}, d\xi = \mathrm{i}\, re^{\mathrm{i}\,\theta} d\theta$ なので，(1.5.1) は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}\,\theta}) d\theta \tag{1.6.1}$$

となる．この式は，analytic function f の z での値は，その周りの円周上の値の平均値で与えられるということを意味しており，**平均値の公式 (mean-value formula)** と呼ばれる．

この式の両辺に rdr を掛けて r について 0 から R まで積分すると

$$f(z) \int_0^R rdr = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}\,\theta}) rdrd\theta$$

となる．したがって

$$f(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{D_0} f(z + re^{\mathrm{i}\,\theta}) dA \tag{1.6.2}$$

となる．ただし D_0 は中心が z で半径が R の円であり，右辺はこの円について面積分することを表す．この円の面積は πR^2 であるから，右辺はこの円の中

$$\xi = z + re^{\mathrm{i}\,\theta} \in D_0$$

での $f(\xi)$ の値の平均値であり，それが円の中心 z での値 $f(z)$ に等しいのである．

この平均値の公式を用いると，**最大値の原理 (maximum principles)** とよばれる定理を証明することができる．

定理 1.6.1 (最大値の原理) (i) $f(z)$ がある *domain* D で *analytic* であるとすると，$|f(z)|$ は D の中では最大値をとることはできない．仮に D の中で最大値をとったとすると，$f(z)$ は実は D 内のすべての点でその値をとり，したがって $f(z) = const.$ ということになる．

(ii) $f(z)$ が *bounded region* D で *analytic* であり，*closed region* $\overline{D}$ で連続ならば，$|f(z)|$ はこの *region* の境界でのみ最大値をとり得る．

<u>証明.</u>　いま z は D の内点であり，$\xi \in D$ なるすべての ξ に対して

$$|f(\xi)| \leq |f(z)| \tag{1.6.3}$$

であると仮定する．z を中心とする半径 R の円 D_0 を描く．ただし，この円は完全に D に含まれるものとする．この円 D_0 の中の点は $\xi = z + r^{\mathrm{i}\,\theta}, 0 \leq r < R, 0 \leq \theta < 2\pi$ である，(1.6.2) より

$$f(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{D_0} f(\xi) dA$$

と書ける．したがって

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{D_0} f(\xi) dA \tag{1.6.4}$$

が成り立つ．さて, 仮定 (1.6.3) より

$$(\mathrm{RHS}) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{D_0} f(\xi) dA = |f(z)|$$

となるが，もしも (1.6.3) の等号が成り立たず $|f(\xi)| < |f(z)|$ という不等式が成り立つ部分領域 $\{\xi\}$ が D_0 内にあるとすると (RHS) $< |f(z)|$ ということになるから，(1.6.4) は $|f(z)| < |f(z)|$ となってしまい矛盾する．したがって (1.6.3) は常に等号で成り立っていなければならない．Cauchy-Riemann の条件式より，analytic function では $|f(z)| =$ 一定ならば，$f(z) =$ 一定であることが結論されるので，定理の (i) が円 D_0 に対しては証明されたことになる．

円 D_0 は完全に D に含まれるようにとったので，$f(z)$ が円 D_0 の中と円周上で analytic である．よって $|f(z)|$ はそこで連続な実関数であることになる．有界領域で連続な実関数は，その領域の（境界もふくめた）どこかで最大値をとる．上で $|f(z)|$ は D_0 の内点では最大値を取れないことを示したので，最大値は円 D_0 の境界（円周上）で最大値をとることになる．

円を少しずつずらしながら重ねていくことで，任意の domain D を覆うことができるので，上の定理は一般の domain D で証明できる．∎

原点を中心とする半径 1 の円（単位円）を

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\} \tag{1.6.5}$$

と書くことにする（円周は含まず domain とする）. 次の補題が成り立つ.

補題 1.6.2 (Schwarz の補題) f が $\mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ の *analytic* な写像で $f(0) = 0$ であるものとする．すると

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{1.6.6}$$

が成り立つ．さらに，等式 $|f(z_0)| = |z_0|$ が $z_0 \neq 0$ である $z_0 \in \mathbb{D}$ で成り立つとすると，f は

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} z \quad (\theta \text{ は実定数})$$

という形に定まってしまう（つまり回転である）.

証明.　$z=0$ では与条件より $f(0)=0$ なので OK. 以下では $z\neq 0$ とする．f は analytic であり $f(0)=0$ なので,

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,\quad c_j\in\mathbb{C}$$

と Tayler 展開できる．ここで

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}f(z)$$

と定義すると

$$\varphi(z)=c_1+c_2z+\cdots+c_nz^{n-1}+\cdots$$

となり，$\varphi(z)$ も analytic function である．この φ に対して, $\overline{\mathbb{D}}=\{z:|z|\leq 1\}$ において最大値の原理を適用すると

$$\begin{aligned}\max\Big\{|\varphi(z)|:|z|\leq 1\Big\} &= \max\Big\{|\varphi(z)|:|z|=1\Big\}\\ &= \max\Big\{\frac{|f(z)|}{|z|}:|z|=1\Big\}\\ &= \max\Big\{|f(z)|:|z|=1\Big\}\end{aligned}$$

であるが，f は $\mathbb{D}\mapsto\mathbb{D}$ なる写像なので $|f(z)|\leq 1$ である．したがって

$$|\varphi(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}\leq 1$$

ということになるので，$|f(z)|\leq|z|$ である．

原点以外の $z_0\in\mathbb{D}$ で等号が成り立つとすると，この点で $\varphi(z)$ は最大値をとることになるので，最大値の定理より $\varphi(z)$ は定数ということになる．ところが, この点では $|\varphi(z_0)|=1$ であるから，この定数の絶対値は 1 であり，よって $\varphi(z)=e^{\mathrm{i}\theta}$ と書けることになる．したがって $f(z)=\varphi(z)z=e^{\mathrm{i}\theta}z$ と定まる．∎

1.7　ラプラス方程式，調和関数

$f=u+\mathrm{i}\,v$ が analytic なら，Theorem 1.5.3 より，実関数 u,v は 連続な 2 階微分を持ち

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

が成り立つことになる．ところが，Cauchy-Riemann condition (1.3.5) より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\tag{1.7.1}$$

なので,

$$\nabla^2 u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\tag{1.7.2}$$

が成り立つ．また同様にして,

$$\nabla^2 v\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\tag{1.7.3}$$

も成り立つ.

問題 1.3　(1.7.1) が成り立つことを示せ．また，(1.7.3) を導け．

一般に偏微分方程式

$$\nabla^2 w = 0 \tag{1.7.4}$$

を **Laplace's equation（ラプラス方程式）**という．実関数 $w(x, y)$ がある domain D においてLaplace's equation を満たすとき，この関数は D での **harmonic function（調和関数）**という．上の考察から，domain D 内の analytic function の実部と虚部は，ともに harmonic function であることになる．このとき，実関数 u と v は互いに相手の **harmonic conjugate** であるという.（この 2 つは Cauchy-Riemann condition (1.3.5) で互いに関係付けられている.）したがって，定理 1.3.1 は『$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ が analytic function であるための必要十分条件は，u と v がともに調和関数であり，v が u の harmonic conjugate であることである.』と言い直すことができる．

第2章　共形変換

2.1　共形性

複素平面 z 上の曲線 C を考える．$f(z)$ を z の analytic function として，

$$w = f(z)$$

によって，複素変数 z を別の複素変数 w に変換することを考える．この変換によって，複素平面 z 上の曲線 C は複素平面 w 上の曲線 C^* に変換される．変換された後の曲線 C^* の詳細を知るためには，当然，変換されるまえの曲線 C と変換 f を知らなければならないが，それらの詳細には依らずに，曲線 C と曲線 C^* の間に成り立つ一般的な関係がある．いま，曲線上のある 1 点に着目して，そこを z_0 とする．ただし $f'(z_0) \neq 0$ とする．このとき，点 z_0 における曲線 C の接線は，変換によって反時計回りに $\arg f'(z_0)$ だけ回転されるのである．(図 2.1 を参照．ただし，$w_0 = f(z_0)$ とする.)

このことをまず，変換 f が線形，すなわち

$$f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C} \tag{2.1.1}$$

であり，C が原点を通る直線である場合に示してみることにする．C が，原点を通る直線であり，その直線が実軸となす角が φ であるとすると，

$$z(s) = se^{\mathrm{i}\,\varphi}, \quad \varphi = \text{const.} \quad s \in \mathbb{R}$$

と表せる．この直線は, 線形変換 (2.1.1) によって

$$\begin{aligned} w(s) &= f(z(s)) = az(s) + b \\ &= |a| \exp(\mathrm{i} \arg(a)) se^{\mathrm{i}\,\varphi} + b \\ &= |a| s \exp\Big[\mathrm{i}\,(\varphi + \arg(a))\Big] + b \end{aligned}$$

に変換される．これは，複素平面上の点 $b = f(0)$ を通る直線であり，その直線が実軸となす角は $\varphi + \arg(a)$ になっている (図 2.2 参照)．今の場合，$\arg(f'(z(s))) = \arg(a), s \in \mathbb{R}$ であるから，確かに上の主張は成り立っている．

次に一般の曲線と変換に対して調べてみる．複素平面上の曲線 C は，$z = x + \mathrm{i}\,y$ の実部 x と虚部 y をある関係式で関係付けることによって指定できる．これはまた，x と y がある実パラメータ s の関数として与えることによっても指定できる．パラメータ s を媒介して x と y が関係付けられるからである．いま，変換を表す関数 $f(z)$ がある domain D で analytic であるとする．そして，この domain D 内で曲線 C が

$$C: \qquad z(s) = x(s) + \mathrm{i}\,y(s), \qquad s \in [a, b] \tag{2.1.2}$$

と表せるものとする．ここで $x(s)$ も $y(s)$ も s について連続であり，微分可能とする．$f(z)$ が analytic なので，$w(t) = f(z(s)) \equiv u(x(s), v(s)) + \mathrm{i}\, v(x(s), v(s))$ も s に対して連続であり，微分可能である．

$$\frac{dz(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} + \mathrm{i}\,\frac{dy(s)}{ds}$$

とする．$f(z)$ が，$z_0 \equiv f(s_0)$ の開近傍を含む domain で analytic であるとする．曲線 C の像は $w(s) = f(z(s))$ なので

$$\left.\frac{dw(s)}{ds}\right|_{s=s_0} = f'(z_0)\ \left.\frac{dz(s)}{ds}\right|_{s=s_0} \tag{2.1.3}$$

となる．よってもしも

$$f'(z_0) \neq 0, \quad z'(s_0) \neq 0$$

であるならば，$w'(s_0) \neq 0$ であり，(2.1.3) の両辺の argument を見比べることにより，

$$\arg\left(w'(s_0)\right) = \arg\left(z'(s_0)\right) + \arg\left(f'(z_0)\right) \tag{2.1.4}$$

という関係式が成り立つことになる．したがって，上の主張が一般的に証明されたことになる．

上の事柄から，$f'(z) \neq 0$ である点においては，変換 f によって，角度は不変であることが結論される．なぜならば，いま，そのような点 z で 2 つの曲線がある角度 θ で交わっているものとすると，変換 f によって，2 つの曲線はともに等しい角度 $\arg\left(f'(z)\right)$ だけ回転されるので，やはり 2 つの曲線のなす角は θ のままだからである．このように，変換が角度を不変に保つとき，その変換は **conformal(共形的)** であるという．以上のことを，定理の形に纏めておく．

定理 2.1.1 複素平面上のある *domain* D で $f(z)$ は *analytic* であり，また $f(z) = const.$ ではないものとする．D 内の $f'(z) \neq 0$ である任意の点 z において，変換 $f(z)$ は *conformal* である．すなわち，任意の *2* つの曲線の間の角度は変換 $f(z)$ で不変である．

Remark 2.1. analytic な関数 $f(z)$ による変換で，各点 z_0 の近傍は，その大きさが $|f'(z_0)|$ 倍だけ拡大 ($|f'(z_0)| > 1$ の場合), あるいは縮小 ($|f'(z_0)| < 1$ の場合) される．このことは，z を z_0 の近傍の点とし，$f(z_0) = w_0$ としたとき

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

であるが，この式は z が z_0 の近傍のときには $|w - w_0|$ が $|f'(z_0)||z - z_0|$ に近似的に等しいことを表していることから明らかである．

2.2 共形変換の簡単な例

例 1. D を複素平面上の $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ および $y = 1$ で囲まれた長方形領域とする．変換 $w = f(z) = (1 + \mathrm{i}\,)z + (1 + 2\mathrm{i}\,)$ によって，この領域 D は，$w = u + \mathrm{i}\, v$ 平面上の $u + v = 3, u - v = -1, u + v = 7$, および $u - v = -3$ で囲まれた長方形領域に写像される．

問題 2.1 上のことを確かめよ．

例 2. D を $x = 1, y = 1$, および $x + y = 1$ で囲まれた三角形の領域とする．この領域は，変換 $w = f(z) = z^2$ によって，共形的に変換される．

問題 2.2　上の例では，D は w 平面上のどのような領域に変換されるか．もとの三角形領域の頂点をそれぞれ $a=(0,1), b=(1,0), c=(1,1)$ とすると $\angle abc$ は直角である．この角は，w 平面ではどの角に変換されるか．変換後も角度は直角であることを確かめよ．

2.3　Critical points

$f'(z_0)=0$ となる点 z_0 では，変換 f の共形性は破れる．このような点は **critical point** とよばれる．このような点は，孤立点である．いま z を z_0 の近傍の点として $\delta z = z - z_0$ とする．z_0 は critical point であり，この点では f の微分は $n-1$ 階まですべて零であり，n 階ではじめて零でないものとする．$\delta w = f(z) - f(z_0)$ をテイラー展開すると

$$\delta w = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(\delta z)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z_0)(\delta z)^{n+1} + \cdots$$

となる．したがって，$\delta z \to 0$ の極限をとると

$$\arg(\delta w) \quad \to \quad n \arg(\delta z) + \arg\left(f^{(n)}(z_0)\right)$$

となることが分かる．この式より，このような critical point z_0 を通る 2 つの微小線分のなす角は，変換によって n 倍されることがわかる．つまり，次が証明できる．

定理 2.3.1 複素平面上のある *domain* D で $f(z)$ は *analytic* であり，また $f(z) = const.$ ではないものとする．D 内の点 z_0 で $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ であり，$f^{(n)}(z_0) \neq 0$ であるとする．このとき，点 z_0 で交わる *2* つの異なる曲線のなす角は，変換 f によって n 倍される．

例.　D を $x=0, y=0, x+y=1$ で囲まれる 3 角形の領域とする．3 角形の 3 頂点を $a=(0,1), b=(0,0), c=(1,0)$ とする．この 3 角形領域を $w=f(z)=z^2$ で変換すると，$\angle abc$ の角度は 2 倍になる．

問題 2.3　上の例で D はどのような領域に変換されるか図示せよ．点 b はどの点に写像されるか．

2.4　複素ブラウン運動，調和測度，ポアソン核

$B_t^j, j=1,2$ を 2 つの独立な **1 次元標準ブラウン運動 (one-dimensional standard Brownian motion)** とする．このとき，**(標準) 複素ブラウン運動 ((standard) complex Brownian motion)** は

$$B_t = B_t^1 + \sqrt{-1} B_t^2 \tag{2.4.1}$$

で定義される．以下では，この複素ブラウン運動を単にブラウン運動と呼ぶことにする．いま，領域 D に対して，この内点からスタートさせたブラウン運動に対して

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\} \tag{2.4.2}$$

とする．これはブラウン運動が領域 D の境界 ∂D にはじめて到達した時刻である．ブラウン運動の初期位置が $z \in \mathbb{H}$ であるという初期条件の下でのブラウン運動に関する確率分布を $\mathbf{P}^z[\cdots]$ と書き，また期待値を $\mathbf{E}^z[\cdots]$ と書くことにする．

次の命題が知られている．

命題 2.4.1 D が *(regular な) domain* であり，その境界に対して有界で連続な関数 $F : \partial D \to \mathbb{R}$ が与えられているものとする．このとき，D の中では *harmonic* であり，∂D 上では F に一致するような $\overline{D}(= D \cup \partial D) \to \mathbb{R}$ の関数 u が一意的に定まり，これは D 内の各点 $z \in \mathbb{D}$ において

$$u(z) = \mathbf{E}^z[F(B_{\tau_D})] \tag{2.4.3}$$

で与えられる．

以下では，領域 D の境界 ∂D がいくつかの条件を満たしているものとして話を進めることにする．
$z \in D$ に対して，∂D に対する確率測度 $\mathrm{hm}(z, D; \cdot)$ を

$$\mathrm{hm}(z, D; V) = \mathbf{P}^z[B_{\tau_D} \in V] \tag{2.4.4}$$

で定義する．これは**調和測度 (harmonic measure (in D from z))** とよばれる．これを用いると，(2.4.3) は

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w)\mathrm{hm}(z, D; dw) \tag{2.4.5}$$

と書き直せる．さらにこれが，境界 ∂D に沿った線積分によって

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w)H_D(z, w)|dw| \tag{2.4.6}$$

と書けるとき，積分核 $H_D(z, w)$ を**ポアソン核 (Poisson kernel)** という．このポアソン核は次の性質を持つ．

- 各 $w \in \partial D$ に対して，$H_D(z, w)$ は z に関して D 内で調和関数である．
- 境界の任意の点 $w_0 \in \partial D$ に対して，$z \in D$ を $w_0 \in \partial D$ に近づけていくと，$H_D(z, w)$ はデルタ関数 $\delta(w - w_0)$ になる:

$$\lim_{z \to w_0} H_D(z, w) = \delta(w - w_0), \quad w_0, w \in \partial D.$$

(複素) ブラウン運動は共形変換不変性を持つ．このことより，調和測度に対して次のことが成り立つ．

命題 2.4.2 $f : D \to D'$ が共形変換であるとする．これは $\overline{D} = D \cup \partial D$ で連続であり，*1* 対 *1* である．$z \in D, V \subset \partial D$ であるとき，

$$\mathrm{hm}(f(z), D'; f(V)) = \mathrm{hm}(z, D; V) \tag{2.4.7}$$

が成り立つ．

このことより，ポアソン核の定義 (2.4.6) から直ちに，次が導かれる．

$$H_{D'}(f(z), f(w)) = |f'(w)|^{-1} H_D(z, w), \quad z \in D, w \in \partial D. \tag{2.4.8}$$

2.5 ポアソン核の計算例

半無限帯領域 (half-infinite strip)

$$D = \{z = x + \mathrm{i}\, y : x > 0, 0 < y < \pi\} \tag{2.5.1}$$

を考える．この境界として $\partial D = \{\mathrm{i}\,q : q \in (0,\pi)\}$ を考えることにする．このときの $H_D(z,\mathrm{i}\,q), z \in D, q \in (0,\pi)$ を求めたい．

まず，各 $q \in (0,\pi)$ に対して，$H_D(z,\mathrm{i}\,q)$ は z に関して調和関数であるので，ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) = 0, \quad x+\mathrm{i}\,y \in D$$

を解く必要がある．これは**変数分離法 (separation of variables)** で解くことができる．(q は固定して)

$$H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) = X(x)Y(y)$$

と置くと，$c =$ 定数として，

$$\begin{aligned} & X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ \iff \quad & \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c \end{aligned}$$

つまり，

$$X''(x) = cX(x), \tag{2.5.2}$$

$$Y''(y) = -cY(y) \tag{2.5.3}$$

という二つの常微分方程式に分離できる．(2.5.3) の一般解は

$$Y(y) = a\sin(\sqrt{c}y) + b\cos(\sqrt{c}y)$$

の形であるが，$y = 0, \pi$ では $Y(y) = 0$ であることから，

$$b = 0, \quad \sqrt{c} = n,\, n = 1,2,3,\cdots$$

と定まる．つまり

$$Y(y) = a\sin(ny), \quad n = 1,2,3,\cdots$$

である．したがって (2.5.2) は

$$X''(x) = n^2 X'(x)$$

となるが，この解のうち $x \to \infty$ で発散しないものを選ぶ必要があるので，

$$X(x) = \text{const.} \times e^{-nx}$$

の形に定まる．以上より

$$H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(q) e^{-nx} \sin(ny)$$

となる．ここで $a_n(q)$ は q の関数であり，これは

$$\lim_{x\to 0} H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) = \delta(y-q) \tag{2.5.4}$$

という条件より

$$a_n(q) = \frac{2}{\pi}\sin(nq)$$

と定まる．実際こうすると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} H_D(x+\mathrm{i}\,y, \mathrm{i}\,q) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq)\sin(ny) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,n(q+y)} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,n(q-y)}\end{aligned}$$

となるが，デルタ関数に対する

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,nx}$$

というフーリエ級数表示と，$q, y > 0$ という条件より，(2.5.4) の成立が確かめられる．つまり

$$H_D(x+\mathrm{i}\,y, \mathrm{i}\,q) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin(ny)\sin(nq), \quad x+\mathrm{i}\,y \in D,\, q \in (0,\pi) \tag{2.5.5}$$

という結果が得られた．

ここで，$r \in R, R > 0$ として，次の変換を考えることにする．

$$z = x + \mathrm{i}\,y \mapsto \zeta = \alpha + \mathrm{i}\,\beta : \zeta = f(z) = r + Re^z. \tag{2.5.6}$$

この変換は，半無限帯領域 D を

$$\begin{aligned} D' &= \{\zeta = \alpha + \mathrm{i}\,\beta : |\zeta - r| > R, \beta > 0\} \\ &= \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(r, R) \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

に写す共形変換である．境界は

$$\begin{aligned} \{x : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha > r + R\} \\ \{x + \mathrm{i}\,\pi : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha < r - R\} \\ \{\mathrm{i}\,q : q \in (0,\pi)\} &\mapsto \{r + Re^{\mathrm{i}\,q}; q \in (0,\pi)\} \end{aligned}$$

と変換される．

変換 (2.5.6) より

$$e^{x+\mathrm{i}\,y} = \frac{\zeta - r}{R}, \quad e^x = \frac{|\zeta - r|}{R}, \quad e^{\mathrm{i}\,y} = \frac{\zeta - r}{|\zeta - r|}$$

なので，

$$e^{-x}e^{\mathrm{i}\,y} = \frac{R}{\overline{\zeta} - r}$$

という関係式が得られる．この両辺を n 乗すると

$$e^{-nx}e^{\mathrm{i}\,ny} = \left(\frac{R}{\overline{\zeta} - r}\right)^n$$

となるが，この両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned} e^{-nx}\sin(ny) &= \mathrm{Im}\left[\left(\frac{R}{\overline{\zeta} - r}\right)^n\right] \\ &= -R^n \mathrm{Im}\left[\frac{1}{(\zeta - r)^n}\right] \end{aligned}$$

が得られる．また，$q \in (0, \pi)$ に対して，

$$f(\mathrm{i}\, q) = r + Re^{\mathrm{i}\, q}, \quad \mathrm{i}\, q \in \partial D$$

なので，$f'(\mathrm{i}\, q) = Re^{\mathrm{i}\, q}$ であり，したがって

$$|f'(\mathrm{i}\, q)| = R$$

である．以上を (2.4.8) に代入すると，

$$\begin{aligned} H_{D'}(\zeta, r + Re^{\mathrm{i}\, q}) &= \frac{1}{R} \times \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -R^n \mathrm{Im} \left[\frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \right\} \sin(nq) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq) R^{n-1} \mathrm{Im} \left[\frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \qquad (2.5.8) \end{aligned}$$

という結果が得られる．

第3章　Möbius 変換

3.1　Möbius 変換

次の特別な形の変換は，共形変換の中で重要なクラスを構成する．

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0. \tag{3.1.1}$$

ただし，$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ である．この変換は **メビウス変換 (Möbius transformation)**, あるいは **双線形変換 (bilinear transformation)**, または **linear fractional transformation** とよばれる．以下では，このメビウス変換の特性を説明することにする．

まず，特別な場合を調べてみる．

(1): $c = 0$ の場合 (線形変換) $c = 0$ の場合は

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \tag{3.1.2}$$

となる．$a/d = |a/d|e^{\mathrm{i}\,\theta}$ とする．この変換は，複素平面上の各点を b/d だけ平行移動させて，さらに $|a/d|$ 倍の膨張・縮小をし，$\theta = \arg(a/d)$ だけ回転させるものである．これを**線形変換 (linear transformation)** という．

(2): $a = d = 0, b/c = 1$ の場合 (反転) $a = d = 0, b/c = 1$ のときには

$$f(z) = \frac{1}{z} \tag{3.1.3}$$

となる．

$$f(0) = \infty, \qquad f(\infty) = 0, \qquad f(re^{\mathrm{i}\,\theta}) = \frac{1}{r}e^{-\mathrm{i}\,\theta}, \quad r, \theta \in \mathbb{R}$$

である．つまり，単位円上の点は単位円上に写し，単位円内の点は外に，逆に単位円の外の点は内に写す．この変換は特に，**反転 (inversion)** とよばれる．

3.2　共形性

$c = 0$ のときには $f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ なので

$$f'(z) = \frac{a}{d} \neq 0.$$

また，$c \neq 0$ のときには

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2}$$

であり，これは $z \neq -d/c$ ならば有限である．無限遠点 $z = \infty$ の変換を見るために，$\tilde{z} = 1/z$ とおくと

$$w = f(z) = f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = \frac{b\tilde{z} + a}{d\tilde{z} + c}$$

となる．これより，$\tilde{z} = 0$ つまり $z = \infty$ でも変換は問題なく定義されていることがわかる．$z = -d/c$ で $w = f(z)$ が発散するが，$\tilde{w} = 1/w$ とおくと，

$$\tilde{w} = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$$

であり，これから

$$\frac{d\tilde{w}}{dz} = -\frac{ad - bc}{(az + b)^2}$$

となる．したがって

$$\left.\frac{d\tilde{w}}{dz}\right|_{z=-d/c} = -\frac{(ad - bc)c^2}{(ad + bc)^2} \neq 0$$

である．以上より，Möbius 変換は，無限遠点をふくめて全複素平面上で零でない微分 $f'(z)$ を持つことが分かった．よって，$z = \infty$ を含めた全複素平面を共形的に変換する共形変換である．複素平面に無限遠点 ∞ を加えたものを **Riemann sphere(リーマン球)** という．これを

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{3.2.1}$$

と書くことにする．Möbius 変換は Riemann sphere 全体を共形的に変換する変換である．

3.3 分解公式

$c = 0$ の場合は，上で述べたように線形変換に帰着される．

$c \neq 0$ の場合は,

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \times \frac{1}{cz + d} \tag{3.3.1}$$

と式変形できる．そこで，次の 3 つの変換を考えることにする．

$$\begin{aligned}
&z \to z_1 : \quad z_1 = cz + d \qquad \text{(線形変換)}\\
&z_1 \to z_2 : \quad z_2 = \frac{1}{z_1} \qquad \text{(反転)}\\
&z_2 \to z_3 : \quad z_3 = -\frac{ad - bc}{c} z_2 + \frac{a}{c} \qquad \text{(線形変換)}
\end{aligned}$$

この 3 つの変換を合成すると

$$w = z_3(z_2(z_1(z))) = -\frac{ad - bc}{c}\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = f(z)$$

となり，Möbius 変換が得られる．つまり，

$$(\text{Möbius 変換}) = (\text{線形変換}) \times (\text{反転}) \times (\text{線形変換})$$

と分解されることが分かった．

3.4　群構造

Möbius 変換からなる集合

$$G = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\, ;\, ad-bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} \tag{3.4.1}$$

は，**群**を成す．

(1)　$b = c = 0, a = d = 1$ とすると $f(z) = z$ となり，恒等変換が得られる．これが**単位元**である．

(2)　**逆元**は

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

を z について解くと

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

となることから，

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

と定まる．つまり, 逆元は

$$a \to d, \quad b \to -b, \quad c \to -c, \quad d \to a \tag{3.4.2}$$

と変換することによって得られる．この変換で $ad-bc \neq 0 \to da-bc \neq 0$ なので，条件は不変である．

(3)　$a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0, \quad a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$ のとき，

$$f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, \quad f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

として，

$$w = f_1(f_2(z)) = f_3(z)$$

を計算すると

$$\begin{aligned} f_3(z) = \frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}\, ; & \\ a_3 = a_1a_2 + b_1c_2, &\quad b_3 = a_1b_2 + b_1d_2, \\ c_3 = c_1a_2 + d_1c_2, &\quad d_3 = c_1b_2 + d_1d_2, \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

となり，確かに $f_3 \in G$ であることが示せる．

(3)　結合法則

$$f_3 \circ f_2(f_1(z)) = f_3(f_2) \circ f_1(z)$$

が成り立つことは明らか.

Möbius 変換の集合が群を成すことは，次のような 2×2 の正則な行列との対応に注意すると理解しやすい.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.4.4}$$

この行列 T の逆行列は

$$T^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるが，この行列成分をみると (3.4.2) の関係がすぐに見てとれる．(**Remark:** 行列式が $\det T = ad - bc = 1$ と特殊化されている場合を考えると，T^{-1} はまさに $f^{-1}(z)$ に対応することになる．) また，

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

であるが，これから (3.4.3) の関係が分かる．つまり，Möbius 変換の成す群はサイズ 2 の**一般線形群 (general linear group)**

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \tag{3.4.5}$$

と同型であることになる．

Möbius 変換のうちの線形変換と反転はそれぞれ

$$f_1(z) = a_1 z + b_1 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

というように行列と対応するので，前節の分解は

$$\begin{aligned} &T = T_1 T_2 T_3, \\ &\quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という形の行列の分解表示に相当することになる．

3.5 cross ratio の不変性

複素平面上に 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が与えられたとき

$$X(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \tag{3.5.1}$$

を，この 4 点の **cross ratio** とよぶ．この式で，例えば $z_1 \to \infty$ とすると，

$$\lim_{z_1 \to \infty} X(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

となることから，無限遠点 ∞ と z_2, z_3, z_4 の 4 点の cross ration は

$$X(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} \tag{3.5.2}$$

であるとすることにする．

線形変換 $w=f(z)=az+b$ を施すと，4 点はそれぞれ $z_j \to az_j+b, j=1,2,3,4$ に移るが，この変換で cross ration (3.5.1) は不変であることは明らかである．また，反転 $z_j \to 1/z_j, j=1,2,3,4$ をしても，X は変わらない．一般に，Möbius 変換は線形変換と反転に分解できるので，Möbius 変換 $w=f(z)$ によって，cross ratio は不変であることが導かれる；

$$\frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}=\frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}. \tag{3.5.3}$$

等式 (3.5.3) において $z_4=z, w_4=w$ と置くと，

$$\frac{(w_1-w)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w)}=\frac{(z_1-z)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}. \tag{3.5.4}$$

となるが，これを $w=f(z)$ の形に解くと，$f(z)$ は $(z_j,w_j), j=1,2,3$ で定まる係数 a,b,c,d をもつある Möbius 変換になる．このことから,『Möbius 変換とは，Riemann sphere の 3 点 $z_j, j=1,2,3$ を 3 点 $w_j, j=1,2,3$ に移すような変換である』といえる．別の言い方をすれば,『Möbius 変換は，3 つの点の組 $\{(z_1,w_1),(z_2,w_2),(z_3,w_3)\}$ を与えることによって，一意的に定まる』ことになる．

問題 3.1　3 点 $z_1=0, z_2=1, z_3=-\mathrm{i}$ を $w_1=1, w_2=0, w_3=\mathrm{i}$ に移す Möbius 変換を求めなさい．

3.6　固定点

複素平面上の点 z が $z \to f(z)$ という変換で変わらないとき，**fixed point(固定点)** という．Möbius 変換の固定点は

$$\begin{aligned} & z=\frac{az+b}{cz+d} \\ \Leftrightarrow\quad & cz^2+(d-a)z-b=0 \\ \Leftrightarrow\quad & z=\frac{1}{2c}\Big[(a-d)\pm\sqrt{(d-a)^2+4bc}\Big] \end{aligned}$$

より，$(d-a)^2+4bc \neq 0$ のときには 2 点，$(d-a)^2+4bc=0$ のときには 1 点しかないことが分かる．ここでは 2 点ある場合を考えて，その 2 点を α,β と書くことにする．

(3.5.4) において $z_1=w_1=\alpha, z_3=w_3=\beta$ とおくと

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta}=\lambda\times\frac{z-\alpha}{z-\beta} \tag{3.6.1}$$

という等式が得られる．ただしここで，λ は w_2,z_2,α,β で定まる定数である．

問題 3.2　(3.6.1) の定数 λ を w_2,z_2,α,β を用いて表しなさい．

問題 3.3　固定点が α,β であるような Möbius 変換は，一般に一つのパラメータ λ を用いて (3.6.1) のように表されることが分かった．固定点が 0 と 1 であるような Möbius 変換を，パラメータ λ を用いて表しなさい．($w=f(z)$ という形で答えなさい.)

3.7 Möbius 変換は円を円に写す

2 次元実平面 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 上の直線は

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

と表される．ここで

$$z = x + \mathrm{i}\, y, \quad \overline{z} = x - \mathrm{i}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \overline{z})$$

の関係を用いると，複素平面 $z \in \mathbb{C}$ では直線は

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + c = 0, \qquad B = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2} \tag{3.7.1}$$

と表されることが分かる．特に $c = 0$ の場合は，この直線は原点 $(x, y) = 0, z = 0$ を通る．

他方，複素平面上の z_0 を中心とする半径 $\rho > 0$ の円は

$$\begin{aligned} & |z - z_0| = \rho \\ \Longleftrightarrow \quad & (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) = \rho^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + c = 0, \qquad B = -z_0, \quad c = |B|^2 - \rho^2 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

と表される．特に $c = 0$ の場合には，この円は原点を通ることになる．

直線 に反転を施すとどうなるであろうか．(3.7.1) 式で $z = 1/w, \overline{z} = 1/\overline{w}$ とすると，

$$cw\overline{w} + \overline{B}w + B\overline{w} = 0$$

となる．$c = 0$ の場合（つまり元の直線 (3.7.1) が原点を通る直線である場合）は，これは原点を通る直線を表す．$c \neq 0$ である場合は，反転後の図形は（(3.7.2) と見比べると）中心が $-B/c$ で半径が $|B|/|c|$ の円であることが分かる．

他方，円の式 (3.7.2) で反転 $z = 1/w, \overline{z} = 1/\overline{z}$ を行うと，

$$cw\overline{w} + Bw + \overline{B}\overline{w} + 1 = 0$$

が得られる．$c = 0$ の場合は（つまり元の円が原点を通る場合は）この式は直線を表すことになる．$c \neq 0$ の場合は，この式は円を表す．

つまり反転によって，原点を通る直線は同じく原点を通る直線に，原点を通らない直線は円に，また原点を通る円は直線に，原点を通らない円は円に写されることが分かった．

Remark: 直線を表す式 (3.7.1) において $z = 1/\xi$ と置くと，

$$c\xi\overline{\xi} + B\overline{\xi} + \overline{B}\xi = 0$$

となるが，これは (3.7.2) の式で $z \to \xi$ として $c = 0$ とした場合なので，$\xi = 0$ を通る直線円ということになる．$\xi = 0$ は $z = \infty$ なので,『複素平面上の直線は，無限遠点 ∞ を通る円である』ということができる．つまり,（リーマン球の上では）直線と円とは同じグループであると見なしてよいのである．そうすると，上の結果は『反転で円は円に写される』と纏めていうことができる．

線形変換 $f(z) = az + b$ は, b の並進と角度 $\arg a$ の回転，および倍率 $|a|$ の拡大・縮小なので，円は円に（直線は直線に）写される．任意の Möbius 変換は，線形変換と反転の合成で与えられることから,『Möbius 変換によって，一般に円は円に写される』ということが結論される．

円の内側の領域 (interior) と外側の領域 (exterior) とは，円の互いに complementary domain であるという.（同様に，ある直線があったときに，それで分けられる 2 つの半平面も互いに complementary domain であるという.）いま，複素 z-平面上のある円 C の内側と外側の領域をそれぞれ K, K_{c} として，Möbius 変換 $w = f(z)$ によって w-平面上に写されたそれぞれの領域を

$$K^* = f(K) \equiv \{w = f(z) : z \in K\}, \quad K_{\mathrm{c}}^* = f(K_{\mathrm{c}}) \equiv \{w = f(x) : z \in K_{\mathrm{c}}\}$$

とする．z-平面上の円 C は w-平面上の円 C^* に移ったとすると，次のことが言えるであろう.『K^* が円 C^* の内側であり，K_{c}^* が外側であるか，あるいはその逆に K^* が円 C^* の外側であり，K_{c}^* が内側であるかのいずれかである.』

例えば，反転 $w = 1/z$ によって単位円

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

は単位円に写されるが，円の内側の領域は外側の領域に，外側の領域は内側の領域に写される.（「反転」という名前の通り，裏表が逆になる.）

3.8 Möbius 変換で円の inverse points は inverse points に写される

中心が z_0 で半径が ρ の円があったとき，点 p と q が次の条件を満たすとき，この 2 点はこの円について互いに **inverse points** であるという.

(1) z_0, p, q の 3 点はこの順序で 1 直線上にのっている.

(2) 2 点の円の中心からの距離 $|z_0 - p|, |z_0 - q|$ の間に次の関係が成り立っている.

$$|z_0 - p||z_0 - q| = \rho^2.$$

上の条件 (1) より，適当な r_1, r_2, φ を用いて,

$$p = z_0 + r_1 \exp(\mathrm{i}\,\varphi), \quad q = z_0 + r_2 \exp(\mathrm{i}\,\varphi)$$

と書ける．このとき，条件 (2) は

$$\begin{aligned} & r_1 r_2 = \rho^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & (p - z_0)(\overline{q} - \overline{z_0}) = \rho^2 \end{aligned}$$

なので，p と q が互いに inverse points であることは

$$p = z_0 + r e^{\mathrm{i}\,\varphi}, \quad q = z_0 + \frac{\rho^2}{r} e^{\mathrm{i}\,\varphi}, \quad r \neq 0 \tag{3.8.1}$$

と表されることになる.

Remark: $r \to 0$ のときには $p = z_0$, $q = \infty$ になる.

Remark: 前節で，直線も円の特殊な場合として考えられることを述べた（無限遠点を通る円）．直線に対する inverse points は，その直線に垂直な線上にある 2 点で互いに直線からの距離が等しいものをいうことにする.

円上の点を $z = z_0 + \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}$ と表すと，(3.8.1) より

$$\begin{aligned}\frac{z-p}{z-q} &= \frac{\rho e^{\mathrm{i}\,\theta} - r e^{\mathrm{i}\,\varphi}}{\rho e^{\mathrm{i}\,\theta} - (\rho^2/r) e^{\mathrm{i}\,\varphi}} \\ &= \frac{r}{\rho} \frac{r e^{-\mathrm{i}\,\theta} - \rho e^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{r e^{\mathrm{i}\,\theta} - \rho e^{\mathrm{i}\,\varphi}} \times (-e^{\mathrm{i}\,\varphi} e^{\mathrm{i}\,\theta})\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \frac{r}{\rho} \tag{3.8.2}$$

という関係式が成り立つことになる．

いま，p と q が 2 つの互いに異なる複素数であるとして，複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，次の方程式を考えることにする；

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = k, \quad 0 < k \leq 1. \tag{3.8.3}$$

$k = 1$ のときには

$$|z-p| = |z-q|$$

となるが，これを満たす $z \in \mathbb{C}$ は複素平面上で，点 p と点 q からの距離が等しい点の集合であるから，p と q の中点を通り $\overline{pq}$ に垂直な直線となる．よって，点 p と点 q はこの方程式を満たす直線に対して inverse points である．

$k \neq 1$ の場合には，(3.8.3) の両辺を複素数の意味で 2 乗すると

$$|z-p|^2 = k^2 |z-q|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (z-p)(\overline{z} - \overline{p}) = k^2 (z-q)(\overline{z} - \overline{q})$$

となるが，これを式変形すると

$$z\overline{z} + \overline{B} z + B\overline{z} + c = 0 \tag{3.8.4}$$

という形に纏められる．ただしここで

$$B = \frac{k^2 q - p}{1-k^2}, \quad c = \frac{|p|^2 - k^2 |q|^2}{1-k^2} \tag{3.8.5}$$

である．

問題 3.4　上の B と c を導きなさい．

これを (3.7.2) の B, c の式と比較するとこれは，中心が

$$z_0 = \frac{p - k^2 q}{1-k^2}, \tag{3.8.6}$$

半径が

$$\rho = \frac{k|p-q|}{1-k^2} \tag{3.8.7}$$

の円であることが分かる．

問題 3.5　このことを確かめなさい．

(3.8.6) より

$$q = \frac{p}{k^2} - \frac{1-k^2}{k^2} z_0$$

が得られるので，これを (3.8.7) に代入すると

$$|p - z_0| = k\rho \tag{3.8.8}$$

が得られる．また，(3.8.6) を p について解くと

$$p = (1-k^2)z_0 + k^2 q$$

となるが，これを (3.8.7) に代入すると

$$|q - z_0| = \frac{\rho}{k} \tag{3.8.9}$$

が得られる．

問題 3.6　上のことを確かめなさい．

したがって，p と q はこの円に関して互いに inverse points であることになる．$k < 1$ としたので，点 p は円の内側，点 q は円の外側にあることになる．

以上より，二つの点 p と q が inverse points であるかどうかは，(3.8.3) が成り立つかどうかをみればよいことが示せたことになる．

さて，いま p と q が inverse points であり，この (3.8.3) の関係式を満たしているものとする．これに線形変換 $\tilde{p} = ap + b, \tilde{q} = aq + b, w = az + b$ を施すと

$$\left| \frac{w - \tilde{p}}{w - \tilde{q}} \right| = \frac{|a||z-p|}{|a||z-q|} = \frac{|z-p|}{|z-q|} = k$$

となり，変換後の $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ も互いに inverse points になっていることが分かる．次に，反転 $\tilde{p} = 1/p, \tilde{q} = 1/q, w = 1/z$ を行ってみると，

$$\left| \frac{w - \tilde{p}}{w - \tilde{q}} \right| = \left| \frac{1/z - 1/p}{1/z - 1/q} \right| = \left| \frac{p-z}{pz} \times \frac{qz}{q-z} \right| = \left| \frac{q}{p} \right| \left| \frac{p-z}{q-z} \right| = \left| \frac{q}{p} \right| k$$

となり (今度は右辺は $|q/p|$ 倍されるが p, q は定点なので，やはり定数である)，この場合も $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ は inverse points であることが分かる．

任意の Möbius 変換は，線形変換と反転の合成で与えられるので，結局『Möbius 変換で円の inverse points は inverse points に写される』ということが証明されたことになる．

3.9　重要な Möbius 変換

上半平面 (upper half plane) を

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \tag{3.9.1}$$

単位円 (unit disk)（原点を中心とした半径 1 の円) を

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{3.9.2}$$

と表すことにする．

3.9.1 上半平面を単位円に写す変換

上半平面 $\mathbb{H}$ を単位円 $\mathbb{D}$ に写す Möbius 変換が一般にどのように与えられるかを調べよう．上半平面 $\mathbb{H}$ は，実軸に関して下半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$ と complementary domain の関係にあるので，上半平面が単位円の内側に写されるならば，下半平面は単位円の外側に写されることになる．したがって，実軸 $\mathrm{Im}\, z = 0$ が単位円の円周上に写像されることになる．いま，変換

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

によって単位円の中心である原点に写される上半平面上の点を α とする．したがって $\mathrm{Im}\,\alpha > 0$ である．この点 α の実軸に対する inverse point は $\overline{\alpha}$ である．この点 $\overline{\alpha}$ は，変換によって原点の単位円に対する inverse point, つまり $w = \infty$ に写されることになる．このことから

$$0 = f(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad \infty = f(\overline{\alpha}) = \frac{a\overline{\alpha} + b}{c\overline{\alpha} + d}$$

という関係が成り立たなければならないが，これより

$$\begin{aligned} a\alpha + b = 0 \quad &\Longrightarrow \quad b = -a\alpha, \\ c\overline{\alpha} + d = 0 \quad &\Longrightarrow \quad d = -c\overline{\alpha} \end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$w = \frac{a(z-\alpha)}{c(z-\overline{\alpha})} = \beta\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \quad \beta = \frac{a}{c}$$

となる．上で述べたように，$z = x \in R$ のときには $w = \beta\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}$ は単位円の円周上にあるはずである．確かに

$$|w| = |\beta|\left|\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right| = |\beta| = 1$$

となる．

結局，題意の Möbius 変換は一般に

$$w = \beta\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \quad |\beta| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\alpha > 0 \tag{3.9.3}$$

で与えられることが示せた．

3.9.2 単位円を単位円に写す変換

次に単位円 $\mathbb{D}$ を単位円 $\mathbb{D}$ に写す Möbius 変換が一般にどのように与えられるかを調べよう．単位円の内側は内側に，外側は外側に写されるので，単位円周上の点は単位円周上の点に写されることになる．変換

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

によって単位円の中心である原点に写される $\mathbb{D}$ 内の点を α とする．したがって $|\alpha| < 1$ である．この点 α の単位円に対する inverse point は $1/\overline{\alpha}$ である．(inverse point の定義 $p\overline{q} = \rho^2 = 1$ で $q = \alpha$ とすると $p = 1/\overline{\alpha}$ となる.）この点 $1/\overline{\alpha}$ は，変換によって原点の単位円に対する inverse point, つまり $w = \infty$ に写されることになる．このことから

$$0 = f(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad \infty = f(1/\overline{\alpha}) = \frac{a(1/\overline{\alpha}) + b}{c(1/\overline{\alpha}) + d}$$

という関係が成り立たなければならないが，これより

$$
\begin{aligned}
a\alpha + b = 0 \quad &\Longrightarrow \quad b = -a\alpha, \\
c\frac{1}{\overline{\alpha}} + d = 0 \quad &\Longrightarrow \quad d = -\frac{c}{\overline{\alpha}}
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって

$$
w = \frac{a(z-\alpha)}{c(z-1/\overline{\alpha})} = \beta\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}, \quad \beta = \frac{a\overline{\alpha}}{c}
$$

となる．上で述べたように，$|z| = 1$ のときには $w = \beta\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}$ は単位円の円周上にあるはずである．$|z| = 1$ は一般に $z = e^{\mathrm{i}\,\theta}$ と表されるので，確かに

$$
|w| = |\beta|\left|\frac{e^{\mathrm{i}\,\theta}-\alpha}{\overline{\alpha}e^{\mathrm{i}\,\theta}-1}\right| = |\beta|\frac{|\alpha - e^{\mathrm{i}\,\theta}|}{|\overline{\alpha} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}||e^{\mathrm{i}\,\theta}|} = |\beta| = 1
$$

である．

結局，題意の Möbius 変換は一般に

$$
w = \beta\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}, \quad |\beta| = 1, \quad |\alpha| < 1 \tag{3.9.4}
$$

で与えられることが示せた．

第4章　Riemann の写像定理

4.1　用語について

- **単連結領域 (simply commected domain)**:　$\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球とする．domain D に対して，その $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結部分集合をなしているとき, D は単連結領域 (simply commected domain) であるという．

- **共形変換 (conformal transformation)**:　domain D から domain D' への共形変換

$$f : D \to D' \tag{4.1.1}$$

を考える．第 2 章で f は複素平面上の analytic function であることを述べたが，以下で『 $f : D \to D'$ は共形変換である』というときには，この変換が D から D' への **1 対 1 (one-to-one)** の変換であり (これは**単射 (injection)** ともいう)，かつ**上への写像 (onto-mapping)** である (つまり $f(D) = D'$ である．これは**全射 (surjection)** ともいう) ものとする．(全射であり，かつ単射であるとき**全単射 (bijection)** であるという.）2.3 節で述べたような (共形性を破る) critical points を持たないことより

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D \tag{4.1.2}$$

である．また全単射としたので，f が $D \to D'$ の共形変換ならば，逆変換

$$f^{-1} : D' \to D$$

も共形変換であることになる．

- **単葉関数 (univalent function)**:　$f : D \to \mathbb{C}$ が analytic であり，かつ 1 対 1 (one-to-one) であるとき，単葉関数 (univalent function) であるという．

4.2　Riemann の写像定理

定理 4.2.1 (Riemann mapping theorem) D が $\mathbb{C}$ 全体ではない単連結領域 *(simply connected domain)* であるとする．この D 内の *1* 点 $\omega \in D$ を選ぶ．このとき，D を単位円 $\mathbb{D}$ に写す共形変換で

$$f(w) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(w) > 0 \tag{4.2.1}$$

であるものが存在し，それは一意的に定まる．

まず，このような共形変換が存在したとすると，それが一意的に定まることを証明することにしよう．そのあと，実際に存在することを証明することにする．証明の途中で用いるいくつかの補題は，次の節で与えることにする．

一意性の証明

f_1 と f_2 がともに条件 (4.2.1) を満たす共形変換とする．

$$h = f_1 \circ (f_2)^{-1}$$

とすると，これは $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ の共形変換であり，条件より

$$h(0) = f_1(f_2^{-1}(0)) = f_1(w) = 0$$

である．また合成関数の微分則から

$$h'(z) = f_1'(f_2^{-1}(z))[f_2^{-1}]'(z)$$

であるが，ここで $z = 0$ とおくと

$$h'(0) = f_1'(f_2^{-1}(0))[f_2^{-1}]'(0) = f_1'(w)[f_2^{-1}]'(0) \tag{4.2.2}$$

を得る．他方

$$f_2^{-1}(f_2(z)) = z$$

の両辺を z で微分すると

$$[f_2^{-1}]'(f_2(z))f_2'(z) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad [f_2^{-1}]'(f_2(z)) = \frac{1}{f_2'(z)}$$

であるが，ここで $z = w$ とおくと与条件より $f_2(w) = 0$ なので

$$[f_2^{-1}]'(0) = \frac{1}{f_2'(w)}$$

であることが分かる．これを (4.2.2) に代入すると

$$h'(0) = f_1'(w)\frac{1}{f_2'(w)} > 0 \tag{4.2.3}$$

であることが結論される．よって $h(z)$ は $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}$ に写す onto mapping で，原点を原点に写すので Schwarz の補題（あるいは Möbius 変換の知識) から回転 $h(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} z$ であることが分かる．さらに (4.2.3) であるから, $h'(0) = e^{\mathrm{i}\,\theta} > 0$ なので (つまり実数で正ということなので）$\theta = 0$ しか取り得ないことになる．つまり $h(z) = z$ （恒等変換）ということなので, $f_1 = f_2$ であることが導かれる． ∎

存在の証明

まず $D = \mathbb{D}$ の場合には，$\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ の共形変換で $f(w) = 0$ であるものを探せばよいが，これは

$$f(z) = \beta\frac{z - w}{\overline{w}z - 1}, \quad |\beta| = 1$$

という Möbius 変換で与えられることを前に示した．これより

$$f'(z) = \beta\frac{|w|^2 - 1}{(\overline{w}z - 1)^2}$$

なので

$$f'(w) = -\frac{\beta}{1-|w|^2}$$

であるから，$\beta = -1$ とすれば $f'(w) > 0$ となり，条件を満たす共形変換が得られたことになる．

次に一般の D の場合を考えることにする．まず次のような共形写像の集合を考えることにする．

$$\mathcal{G} = \{f : D \to f(D) : \text{analytic},\ f(w) = 0, \quad f'(w) > 0, \quad f(D) \subset \mathbb{D}\}. \tag{4.2.4}$$

与えられた domain D の内点 w から D の境界までの最短距離を

$$\text{dist}(w, \partial D) = \min\{|w - z| : z \in \partial D\}$$

とすると，$f \in \mathcal{G}$ であるならば

$$|f'(w)| \leq \frac{1}{\text{dist}(w, \partial D)} \tag{4.2.5}$$

であることが示せる (**補題** 4.3.1). $\mathcal{G} \neq \emptyset$ であり，この元の中に $f(D) = \mathbb{D}$ であるものが存在することを証明したい．そこでまず $\mathcal{G} \neq \emptyset$ を示すことにする．

条件より，D は $\mathbb{C}$ 全体ではないので，$w_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ という点がある．$\dfrac{1}{z - w_0}$ という関数を考えると，これは D において零ではない analytic 関数である．D は単連結であるとしたので

$$\{g(z)\}^2 = \frac{1}{z - w_0} \tag{4.2.6}$$

を満たす，D で analytic な関数が存在することがいえる．ここでは $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z - w_0}}$ とすることにする．定数ではない analytic 関数による写像で開領域は開領域に写されることが知られている (**補題** 4.3.2). いま $g(w)$ を中心とする半径 ε の円を

$$\mathcal{B}(g(w), \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

と書くと，ε を十分に小さくとれば，この開領域は開領域 $g(D)$ に含まれるはずである：

$$\mathcal{B}(g(w), \varepsilon) \subset g(D).$$

$g(z)$ は 1 対 1 写像なので，$-g(w)$ は $g(w)$ とは離れた点であり，

$$\mathcal{B}(-g(w), \varepsilon) \cup g(D) = \emptyset$$

とすることができる．ここで

$$\hat{f}(z) = \frac{\varepsilon}{g(z) - (-g(w))} = \frac{\varepsilon}{g(z) + g(w)} \tag{4.2.7}$$

とする．上で $\mathcal{B}(g(w), \varepsilon)$ は $g(D)$ に含まれるが，$\mathcal{B}(-g(w), \varepsilon)$ は $g(D)$ とは交わらないように ε をとったので，$\forall z \in D$ に対して，$|g(z) - (-g(w))| > \varepsilon$ であるから，$|\hat{f}(z)| < 1, \forall z \in D$ ということになる．つまり $\hat{f}$ は D から $\mathbb{D}$ の部分開集合への共形写像であることになる．これと $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ の適当な Möbius 変換

$$f(z) = \beta \frac{z - \alpha}{\overline{\alpha} z - 1}$$

と合成することにより，$\mathcal{G}$ の条件を満たすような写像を作ることができる．よって $\mathcal{G} \neq \emptyset$ である．

さて，

$$M=\sup\{f'(w):f\in\mathcal{G}\} \tag{4.2.8}$$

と定義する．(4.2.5) より $M\le(\mathrm{dist}(w,\partial D))^{-1}$ であるから，M はある有限な値である．$\mathcal{G}$ の元からなる数列 $\{f_1(z),f_2(z),\cdots,\}\subset\mathcal{G}$ で

$$f_j'(w)\to M,\quad j\to\infty$$

となるものを考えると，その部分列 $\{f_{j_1},f_{j_2},f_{j_3},\cdots\}$ で，$f(w)=0,f(D)\subset\mathbb{D},f'(w)=M$ となる analytic 関数 f に収束するものを選ぶことができる．この極限 f は定数関数ではなく，f_{j_k} がそれぞれ 1 対 1 関数であることから，極限 f も 1 対 1 関数であることが結論できる (**補題** 4.3.3).

この関数の部分列の極限として与えられる f は $\mathbb{D}$ の上への写像であること，つまり $f(D)=\mathbb{D}$ であることを以下で証明する．これができれば，この f が条件を満たす共形変換を与えることになるので，Riemann の写像定理の証明が完成するのである．この証明には背理法を用いる．

$f(D)\neq\mathbb{D}$ と仮定することにする．すると $z_0\in\mathbb{D}\setminus f(D)$ なる点があることになる．Möbius 変換

$$h(z)=\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}$$

を考える．

$$h'(z)=\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z}_0z)^2}$$

なので，これは

$$h(z_0)=0,\qquad h'(z_0)=\frac{1}{1-|z_0|^2}>0 \tag{4.2.9}$$

であり，また

$$h(0)=-z_0,\quad h'(0)=1-|z_0|^2 \tag{4.2.10}$$

となるものである．

この h と f との合成関数 $h\circ f$ （つまり $h\circ f(z)\equiv h(f(z))$ ）を考えると，これは D 上で analytic な 1 対 1 写像である（恒等的に零を与える写像ではない). よって，これの平方根である

$$g^2=h\circ f\qquad\Longrightarrow\qquad g\equiv\sqrt{h\circ f}$$

も D 上で analytic な 1 対 1 写像である（恒等的に零を与える写像ではない). この定義より

$$2gg'=(h'\circ f)f'\quad\Longrightarrow\quad g'=\frac{(h'\circ f)f'}{2g}$$

となるので，

$$\begin{aligned} g'(w) &= \frac{h'(f(w))f'(w)}{2g(w)}=\frac{h'(f(w))f'(w)}{2\sqrt{h(f(w))}} \\ &= \frac{h'(0)f'(w)}{2\sqrt{h(0)}}=\frac{(1-|z_0|^2)f'(w)}{2\sqrt{-z_0}} \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

である (途中，$f(w)=0$ や (4.2.10) を用いた)．したがって

$$|g'(w)|=\frac{(1-|z_0|^2)f'(w)}{2\sqrt{|z_0|}} \tag{4.2.12}$$

が得られる．

ここで，点

$$g(w)=\sqrt{h(f(w))}=\sqrt{h(0)}=\sqrt{-z_0}$$

を原点に写す $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ の Möbius 変換

$$\hat{h}(z)=e^{\mathrm{i}\,\theta}\frac{z-g(w)}{1-\overline{g}(w)z},\quad \theta\in\mathbb{R} \tag{4.2.13}$$

を新たに導入する．すると

$$\hat{h}'(z)=e^{\mathrm{i}\,\theta}\frac{1-|g(w)|^2}{(1-\overline{g}(w)z)^2}$$

なので

$$\hat{h}'(g(w))=e^{\mathrm{i}\,\theta}\frac{1}{1-|g(w)|^2}=e^{\mathrm{i}\,\theta}\frac{1}{1-|h(0)|}=e^{i\theta}\frac{1}{1-|z_0|} \tag{4.2.14}$$

である．よって，

$$\hat{f}=\hat{h}\circ g$$

と定義すると，

$$\hat{f}(w)=\hat{h}(g(w))=0$$

であり，(4.2.11) と (4.2.14) より $z_0=|z_0|e^{\mathrm{i}\,\varphi}$ とおくと

$$\begin{aligned}\hat{f}'(w) &= \hat{h}'(g(w))g'(w)=e^{i\theta}\frac{1}{1-|z_0|}\frac{(1-|z_0|^2)f'(w)}{2\sqrt{-z_0}}\\ &= e^{i\theta}\frac{(1+|z_0|)f'(w)}{2\sqrt{-z_0}}=e^{\mathrm{i}\,\{\theta-(\varphi+\pi)/2\}}\frac{(1+|z_0|)f'(w)}{2\sqrt{|z_0|}}\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

となる．（ここで $f\in\mathcal{G}$ なので $f'(w)>0$ である.）そこで $\theta=(\varphi+\pi)/2$ としておけば，$\hat{f}'(w)>0$ であるから，

$$\hat{f}=\hat{h}\circ g\in\mathcal{G}$$

というわけで，この $\hat{f}$ も $\mathcal{G}$ の元であることになる．ところが，($\theta=(\varphi+\pi)/2$ としたので) 上の (4.2.15) の計算より

$$\hat{f}'(w)=\frac{1+|z_0|}{2\sqrt{|z_0|}}f'(w) \tag{4.2.16}$$

が成り立つことになるが，

$$\frac{1+|z_0|}{2\sqrt{|z_0|}}>1\quad\Longleftrightarrow\quad(1-\sqrt{|z_0|})^2>0 \tag{4.2.17}$$

である．はじめに $z_0\in\mathbb{D}\setminus f(D)$ としたので，$|z_0|<1$ なので，(4.2.17) は必ず成り立つことになり，よって (4.2.16) より $\hat{f}'(w)>f'(w)$ ということになる．しかし，$f(z)$ は $\mathcal{G}$ の元の中で，w での導関数が最大値 M を与えるものであったので，別の元 $\hat{f}\in\mathcal{G}$ の導関数 $\hat{f}'(w)$ がそれより大きな値を与えるのは矛盾である．したがって，$z_0\in\mathbb{D}\setminus f(D)$ は存在しないことになる．つまり

$$f(D)=\mathbb{D}$$

ということになる．∎

4.3 補題

補題 4.3.1 $\mathcal{G}$ が *(4.2.4)* で与えられているものとする．$f \in \mathcal{G}$ であるならば，

$$|f'(w)| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(w, \partial D)} \tag{4.3.1}$$

が成り立つ．

証明.

$$f^*(z) = f(w + z \times \mathrm{dist}(w, \partial D)) \tag{4.3.2}$$

と定義する．この定義より

$$f^*(0) = f(w) = 0$$

であり，また $|z| < 1$ では $w + z \times \mathrm{dist}(w, \partial D) \subset D$ なので，$f^*(z)$ は analytic である．また $f(D) \subset \mathbb{D}$ であるから $|f^*(z)| \leq 1$ である．つまり $f^*(z)$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への analytic な写像で $f^*(0) = 0$ なものであることになり，Schwarz の補題（補題 1.6.2) が適用できることが分かる．Schwarz の補題の補題より，

$$|f^*(z)| \leq |z| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|f^*(z)|}{|z|} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|f^*(z) - f^*(0)|}{|z - 0|}$$

であるから，ここで $z \to 0$ の極限をとると $|(f^*)'(0)| \leq 1$ が得られる．(4.3.2) の定義に戻ると，

$$|(f^*)'(0)| = \mathrm{dist}(w, \partial D) \times |f'(w)|$$

であるから，(4.3.1) が得られる．∎

補題 4.3.2 (open mapping theorem) f を *domain ($\equiv$ connected open region)* D 上の定数ではない *analytic* 関数とする．このとき *domain* D は，f により *domain* $D^* = f(D)$ に写される．

証明. 省略．文献 [1] p.341 を参照.

補題 4.3.3 (Hurwitz の補題) $\{f_1, f_2, \cdots\}$ を *domain* D 上の *1* 対 *1* である *analytic* 関数の列であり，ある *analytic* 関数 f に収束するものとする：$f = \lim_{n\to\infty} f_n$．このとき f は定数であるか，または *1* 対 *1* 写像である．

証明. 省略．文献 [4] p.58 (Lemma 3.5) を参照.

第5章　Loewner 方程式

5.1　半平面への共形変換

用語について

- **compact $\mathbb{H}$-hull**：　上半平面 $\mathbb{H}$ の有界部分集合 A において，$A = \mathbb{H} \cap \overline{A}$ であり，かつ $\mathbb{H} \setminus A$ が単連結であるとき，A を compact $\mathbb{H}$-hull という．compact $\mathbb{H}$-hull 全体の集合を $\mathcal{Q}$ と書くことにする．
  Remark： $A \in \mathcal{Q}$ 自体は連結である必要はない．

$A \subset \mathcal{Q}$ が与えられているものとする．$\mathbb{H} \backslash A$ は $\mathbb{C}$ 全体ではない単連結領域なので，定理 4.2.1 (**Riemann の写像定理**) より

$$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{D}$$

という共形変換が存在することが証明されている．また，Möbius 変換

$$f^{(2)}(z) = \frac{\overline{\alpha} z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \tag{5.1.1}$$

は

$$f^{(2)} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$$

の共形変換である（$f^{(2)}(0) = \alpha$ である）．この 2 つを合成した $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f^{(1)}$ は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$$

なる共形変換である．

Remark:　$\mathbb{H} \setminus A$ の境界は，A の境界と実軸から成る．$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{D}$ によって，この境界は単位円周上 $\{z \in C : |z| = 1\}$ に写されることになる．また，$f^{(2)} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ によって，単位円周は $\mathbb{H}$ の境界，すなわち実軸（および無限遠点 ∞) に写ることになる．

このことから，$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$ によって，**実軸上の点は実軸上の点に写される**ことになる．(また A の境界も実軸上に写される．)

また，無限遠点 ∞ は，(5.1.1) で与えられる $f_A^{(1)}$ により単位円周上のいずれかの点に写されるが，$f^{(2)}$ では特に $z = \beta$ という単位円周上の点が ∞ に写される．よって $f^{(2)}$ のパラメータ β を調節することにより，

$$\lim_{z \to \infty} [f_A^{(3)}(z) - z] = 0$$

となるように $f_A^{(3)}$ を選ぶことができる．(これを**流体力学的条件 (hydrodynamic condition)** と呼ぶ．)

以上では $f_A^{(3)}$ は $\mathbb{H} \setminus A$ 上で定義された関数であるが，これは実軸上 $z \in \mathbb{R}$ では実関数であるので，補題 1.4.1 (**Schwarz の鏡像原理**) によって下半平面に解析接続することができる．$1/f_A^{(3)}(1/z)$ を考え

ると，これは原点 0 を原点 0 に写す analytic 関数であるから，原点 0 の周りで次のようにテイラー展開できる．

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1 z + a_2 z^2 + z_3 z^3 + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + b_{-2} z^{-2} + \cdots, \quad b_j \in \mathbb{R}$$

という展開が得られる．

問題 5.1　上のことを確かめよ．

ここで，$z \in \mathbb{R}$ のときに $f_A^{(3)}(z)$ も実数であることから，係数 $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ である．

次に，$\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ の Möbius 変換で ∞ を ∞ に写すものを考えることにする。これは

$$f^{(4)}(z) = d_1 z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in R$$

で与えられる．これと $f_A^{(3)}$ との合成を考えると

$$\begin{aligned} [f^{(4)} \circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1 b_1 z + (d_1 b_0 + d_0) + d_1 b_{-1} z^{-1} + d_1 b_{-2} z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

となるが，特に

$$d_1 b_1 = 1, d_1 b_0 + d_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = \frac{1}{b_1}, d_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

と係数 d_0, d_1 を選ぶことにする．こうして定められた共形変換を

$$g_A : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H} \tag{5.1.2}$$

と書くことにすると，これは流体力学的条件

$$\lim_{z \to \infty} [g_A(z) - z] = 0 \tag{5.1.3}$$

を満たし，

$$g_A(z) = z + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{5.1.4}$$

と展開されることになる．

5.2　半平面 capacity

流体力学的条件 (5.1.3) より $z - g_A(z)$ は有界な analytic 関数であるから，その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_A(z) = \mathrm{Im}\,(z - g_A(z)) \tag{5.2.1}$$

を考えることにする．これは $\mathbb{H} \setminus A$ 上の有界な調和関数である．

そこで 2.4 節で述べた 命題 2.4.1 を適用することを考える．いま

$$\tau = \tau_{\mathbb{H} \setminus A} = \inf\{t : B_t \in \mathbb{R} \cup A\} \tag{5.2.2}$$

とする．これは (複素) ブラウン運動が実軸上 $\mathbb{R}$ あるいは compact $\mathbb{H}$-hull A のいずれかにはじめて到達する時刻である．$\phi_A(z)$ は調和関数なので

$$\phi_A(z) = \mathbf{E}^z[\phi_A(B_\tau)] \tag{5.2.3}$$

と書くことができることになる．(5.2.1) を代入すると

$$\phi_A(z) = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(g_A(B_\tau))] = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)]$$

となる．ただしここで，B_τ は $\mathbb{H}\setminus A$ の境界上の点であり，これは g_A で実軸上に写されるので，その虚部 $\mathrm{Im}\,(g_A(B_\tau)) = 0$ であることを用いた．したがって

$$\mathrm{Im}\,(g_A(z)) = \mathrm{Im}\,(z) - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] \tag{5.2.4}$$

という表式が得られたことになる．

この等式で特に $z = \mathrm{i}\,y, y > 0$ とおくと，$\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\,y) = y$ なので

$$\mathrm{Im}\,(g_A(\mathrm{i}\,y)) = y - \mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)]$$

となる．ここで (5.1.4) の展開を用いると

$$(\mathrm{LHS}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\,y + \frac{c_{-1}}{\mathrm{i}\,y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

なので

$$y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) = y - \mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)].$$

したがって

$$c_{-1} = \lim_{y\to\infty} y\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)]$$

である．以下ではこの量を $A \in \mathcal{Q}$ に対する**半平面 capacity (half-plane capacity)** とよび，$\mathrm{hcap}(A)$ と表すことにする．

$$\mathrm{hcap}(A) \equiv \lim_{y\to\infty} y\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_{\mathbb{H}\setminus A}})], \quad A \in \mathcal{Q}. \tag{5.2.5}$$

この定義より，$A \in \mathcal{Q}$ に対して

$$g_A(z) = z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \to \infty \tag{5.2.6}$$

となる．

半平面 capacity に関して，2 つの補題を証明しておくことにする．以下では，$\mathbb{C}$ 上の集合 (領域) $S = \{z : z \in S\}$ に対して，これを $y \in \mathbb{C}$ だけ平行移動したものを

$$S + y = \{z + y : z \in S\}$$

と書くことにする．また，S を原点を中心にして $r > 0$ 倍して得られる集合 (領域) を rS と書くことにする．

補題 5.2.1 $r > 0, x \in \mathbb{R}$ とすると，$A \in \mathcal{Q}$ に対して次が成り立つ．

$$\mathrm{hcap}(rA) = r^2\mathrm{hcap}(A), \tag{5.2.7}$$

$$\mathrm{hcap}(A + x) = \mathrm{hcap}(A). \tag{5.2.8}$$

証明. 共形変換 g_A の定義より,

$$g_{rA}(z) = rg_A(z/r), \tag{5.2.9}$$
$$g_{A+x}(z) = g_A(z-x)+x \tag{5.2.10}$$

が成り立つことは明らかである．展開 (5.2.6) を用いると

$$(5.2.9) \text{ の左辺} = z + \frac{\mathrm{hcap}(rA)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり,

$$\begin{aligned}(5.2.9) \text{ の右辺} &= r\left\{\frac{z}{r} + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z/r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z/r|^2}\right)\right\} \\ &= z + \frac{r^2\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\end{aligned}$$

なので，両辺の $1/z$ の係数を比較すると (5.2.7) が得られる．同様に

$$(5.2.10) \text{ の左辺} = z + \frac{\mathrm{hcap}(A+z)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり，また

$$\begin{aligned}(5.2.10) \text{ の右辺} &= (z-x) + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z-x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z-x|^2}\right) + x \\ &= z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\end{aligned}$$

なので，(5.2.8) が得られる．∎

いま $A, B \in \mathcal{Q}$ であり

$$A \subset B$$

とする．共形変換 g_A によって $\mathbb{H}\setminus A \to \mathbb{H}$ となるが，$A \subset B$ なので $g_A(B\setminus A) \in \mathcal{Q}$ である．このとき

$$\mathbb{H}\setminus g_A(B\setminus A) \to \mathbb{H}$$

とする共形変換が $g_{g_A(B\setminus A)}$ というわけである．以上より

$$g_B = g_{g_A(B\setminus A)} \circ g_A, \quad A \subset B \in \mathcal{Q} \tag{5.2.11}$$

という関係が成り立つことになる．このとき，次が成り立つ．

補題 5.2.2 $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$ とする．このとき

$$\mathrm{hcap}(B) = \mathrm{hcap}(A) + \mathrm{hcap}(g_A(B\setminus A)) \tag{5.2.12}$$

が成り立つ．

証明. 展開 (5.2.6) より

$$\begin{aligned}g_A(z) &= z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \\ g_{g_A(B\setminus A)}(z) &= z + \frac{\mathrm{hcap}(g_A(B\setminus A))}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \qquad z\to\infty.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
& \Big[g_{g_A(B\setminus A)} \circ g_A\Big](z) = g_{g_A(B\setminus A)}\Big(g_A(z)\Big) \\
= \quad & g_{g_A(B\setminus A)}\left(z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \\
= \quad & \left\{z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right\} + \frac{\mathrm{hcap}(g_A(B \setminus A))}{z + \dfrac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{|z|^2}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \\
= \quad & z + \frac{1}{z}\Big(\mathrm{hcap}(A) + \mathrm{hcap}(g_A(B \setminus A))\Big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)
\end{aligned}$$

となるが，(5.2.12) よりこれが

$$g_B(z) = z + \frac{\mathrm{hcap}(B)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

と等しくなければならない．これより (5.2.12) が導かれる．∎

5.3 曲線 $\gamma(0,t]$ に対応する共形変換 $g_t(z)$

実軸上の 1 点 $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ を出発点として，時間 $t \in [0,\infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0,t]$$

を考える．ただし γ は simple curve (自分自身とは交わらない曲線) であり，

$$\gamma(0,\infty) \in \mathbb{H}$$

とする．

各時刻 $t > 0$ ごとに，$\gamma(0,t] \in \mathcal{Q}$ (compact $\mathbb{H}$-hull 全体) であり，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \to \mathbb{H}$ なる共形変換 $g_{\gamma(0,t]}(z)$ が定義される．以下では

$$g_t(z) = g_{\gamma(0,t]}(z), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t], \quad t > 0 \tag{5.3.1}$$

と書くことにする．これは

$$g_t(z) = z + \frac{b_1(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \to \infty \tag{5.3.2}$$

と展開できる．ここで

$$b_1(t) = \mathrm{hcap}\Big(\gamma(0,t]\Big) \tag{5.3.3}$$

である．

前節では (5.2.4)，すなわち

$$\mathrm{Im}(g_t(z)) = \mathrm{Im}(z) - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] \tag{5.3.4}$$

という表式を得た．ただしここで

$$\begin{aligned}
\tau \quad &= \quad \tau_t \\
&= \quad \tau_{\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]} \equiv \inf\{s : B_s \in \mathbb{R} \cup \gamma(0,t]\}
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

である．

いま
$$R = R_t = \max\{|\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in [0, t]\} \tag{5.3.6}$$
とする．つまり $\gamma(0,t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R の半円 $\mathcal{B}(\gamma(0),R)\cap\mathbb{H}$ の中に含まれることになる．この半円の外の $\mathbb{H}$ の点 $z \in \mathbb{H}\setminus\mathcal{B}(\gamma(0),R)$ に対して，この点をスタートした複素ブラウン運動を考えることにする．このブラウン運動が $\mathcal{B}(\gamma(0),R)\cap\mathbb{H}$ の半円周上，または実軸に初めて到達する時刻を σ と書くことにする，
$$\sigma = \inf\{s : B_s \in \mathcal{B}(\gamma(0),R)\cup\mathbb{R}\}$$
このとき，到達点 B_σ の半円の上の density を $p(z,\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta}), \theta \in (0,\pi)$ と書くことにすると，ブラウン運動の**強マルコフ性**より
$$\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] = \int_0^\pi p(z,\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta})\mathbf{E}^{\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)]Rd\theta \tag{5.3.7}$$
が成り立つ．

この半円上の density は，2.5 節の (2.5.8) で与えたポアソン核 $H_{D'}$ で $\zeta \to z, r \to \gamma(0), q \to \theta$ としたものに他ならない：
$$p(z,\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta}) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \sin(n\theta)R^{n-1}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z-\gamma(0))^n}\right] \tag{5.3.8}$$
これらの結果を (5.3.4) に代入すると
$$\mathrm{Im}\,[g_t(z)] = \mathrm{Im}\,[z] + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty R^n\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z-\gamma(0))^n}\right]\int_0^\infty \sin(n\theta)\mathbf{E}^{\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)]d\theta \tag{5.3.9}$$
となる．

曲線 $\gamma[0,t]$ は，その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R の円に含まれる．したがって，この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点をスタートするようにした後，全体を $1/R$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\widehat{\gamma}[0,t]$ と書くことにすると，これは原点を中心とする単位円に含まれることになる．そして
$$\widehat{\tau} = \inf\{s : B_s \in \widehat{\gamma}(0,t]\cap\mathbb{R}\} \tag{5.3.10}$$
とすると，複素ブラウン運動の平行移動不変性と拡大・縮小共変性より
$$\mathbf{E}^{\gamma(0)+Re^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] = R\mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})] \tag{5.3.11}$$
が成り立つので，
$$\mathrm{Im}\,[g_t(z)] = \mathrm{Im}\,\left[z + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{(z-\gamma(0))^n}\right] \tag{5.3.12}$$
となる．ただし
$$b_n = R^{n+1}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\theta)\mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})]d\theta, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{5.3.13}$$
である．これより
$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{(z-\gamma(0))^n} \tag{5.3.14}$$

と定まることになる．これを (5.3.2), (5.3.3) と見比べると，半平面 capacity に対して

$$b_1(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t]) = R^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})] d\theta \tag{5.3.15}$$

という表式が得られることになる．

$0 \le \theta \le \pi$ のとき，$n = 2, 3, \cdots$ に対して

$$|\sin(n\theta)| \le c_n \sin\theta \tag{5.3.16}$$

となる，有限な値 c_n をとることができる．$\mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})] \ge 0$ なので，(5.3.13) より

$$\begin{aligned} |b_n| &\le R^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(n\theta)| \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})] d\theta \\ &\le c_n R^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widehat{\tau}})] d\theta \end{aligned}$$

であるから，(5.3.15) より

$$|b_n| \le c_n R^{n-1} |b_1|, \quad n = 2, 3, \cdots \tag{5.3.17}$$

という評価が得られる．

5.4 Loewner の微分方程式

前節では各時刻 t ごとに考えたが，ここでは時間を連続的に変化させることにする．$b_n = b_n(t)$ と書くことにして

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n(t)}{(z - \gamma(0))^n} \tag{5.4.1}$$

とする．

$\varepsilon > 0$ として，時刻 $t + \varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0, t+\varepsilon]$ を考える．これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる．

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0,t+\varepsilon]}(z) \\ &= \Big[g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])} \circ g_t \Big](z) = g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)). \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

これは，(5.2.11) で特に

$$A = \gamma(0,t], \quad B = \gamma(0, t+\varepsilon]$$

としたものである．このとき

$$B \setminus A = \gamma(t, t+\varepsilon]$$

であり，

$$g_A(B \setminus A) = g_{\gamma(0,t]}(\gamma(t, t+\varepsilon]) = g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])$$

である．

この共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ によって，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t+\varepsilon]$ は $\mathbb{H}$ に写される．しかし，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t+\varepsilon]$ を $g_{t+\varepsilon}(z)$ ではなく $g_t(z)$ で写すと，像は $\mathbb{H}$ ではなく $\mathbb{H} \setminus g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])$ となる．これは $\mathbb{H}$ から曲線 $g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])$ を除いた領域である．この曲線の出発点にあたる実軸上の点を U_t と書くことにする．すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{5.4.3}$$

とする．(当然 $U_0=\gamma(0)$ である．) すると

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon]))}(g_t(z)) \\ &= g_t(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n((t,t+\varepsilon])}{(g_t(z)-U_t)^n} \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

という形に書けることになる．ただしここで

$$R_t^{\varepsilon}=\max\{|g_t(\gamma(s))-U_t| : s\in[t,t+\varepsilon]\}, \tag{5.4.5}$$

として，

$$\begin{aligned} b_1((t,t+\varepsilon]) &= b_1(t+\varepsilon)-b_1(t), \\ |b_n((t,t+\varepsilon])| &\le c_n(R_t^{\varepsilon})^{n-1}|b_1((t,t+\varepsilon])|, \quad n=2,3,\cdots \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

である．初め等式は補題 5.2.2 から導かれ，後の不等式は (5.3.17) に他ならない．

以上より

$$\left|g_{t+\varepsilon}(z)-g_t(z)-\frac{b_1(t+\varepsilon)-b_1(t)}{g_t(z)-U_t}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n(R_t^{\varepsilon})^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n}|b_1(t+\varepsilon)-b_1(t)|$$

という不等式が得られることになる．この両辺を ε で割ると

$$\left|\frac{g_{t+\varepsilon}(z)-g_t(z)}{\varepsilon}-\frac{1}{g_t(z)-U_t}\frac{b_1(t+\varepsilon)-b_1(t)}{\varepsilon}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n(R_t^{\varepsilon})^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n}\left|\frac{b_1(t+\varepsilon)-b_1(t)}{\varepsilon}\right|$$

となるが，ここで $\varepsilon\to 0$ の極限をとることにする．半平面 capacity $b_1(t)=\mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ は時間に関して微分可能であり，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{b_1(t+\varepsilon)-b_1}{\varepsilon}=\frac{db_1(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\mathrm{hcap}(\gamma(0,t]) \tag{5.4.7}$$

は存在するものと仮定する．また

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R_t^{\varepsilon}=0$$

であるから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g_{t+\varepsilon}(z)-g_t(z)}{\varepsilon}=\frac{dg_t(z)}{dt}$$

が存在し，これは次の微分方程式を満たすことになる．

$$\frac{dg_t(z)}{dt}=\frac{1}{g_t(z)-U_t}\frac{db_1(t)}{dt}, \quad b_1(t)=\mathrm{hcap}(\gamma(0,t]). \tag{5.4.8}$$

ただし，初期条件は $g_0(z)=z$ である．これを **Loewner の微分方程式 (Loewner differential equation)** という．

Remark. 上の (5.4.7) のところで，$b_1(t)=\mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ が微分可能であることを仮定した．一般に $b_1(t)$ は t について真に単調増加関数であり，連続であることが示せる．したがって，曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面 capacity そのものでパラメトライズすることが可能である．特に通常は

$$\widetilde{\gamma}(t)=\gamma(b_1^{-1}(2t))$$

とおくことにする．この定義より

$$b_1(t)=\mathrm{hcap}(\widetilde{\gamma}((0,t]))=2t \tag{5.4.9}$$

となるので，Loewner 方程式は

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \tag{5.4.10}$$

となる．この方程式から生成される g_t を特に **Loewner chains** とよぶ．またこのとき，U_t を Loewner 方程式の**駆動関数 (driving function)** または **Loewner transform** という．

関連図書

[1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas: *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2nd ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

[2] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).

[3] R. F. Bass: *Probabilistic Techniques in Analysis*, (Springer-Verlag, New York, 1995).

[4] G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).