Wigner formula of rotation matrices and quantum walks

目次

プレプリント arXiv : quant-ph/0611022

宮崎玄洋 (中大·理工)，香取眞理 (中大·理工)，今野紀雄 (横浜国大·工)

平成18年度九州大学応用力学研究所 研究集会
「非線形波動現象における基礎理論、数値計算および実験のクロスオーバー」

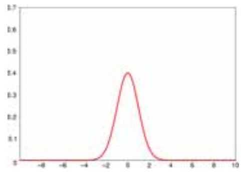
2006 年 11 月 7 日 (火)

§1 Introduction

古典的ランダムウォーク
連続極限（拡散スケーリング極限）

$\frac{X_t}{\sqrt{t}}$ の分布

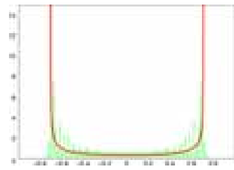
ランダムターン模型



ガウス分布

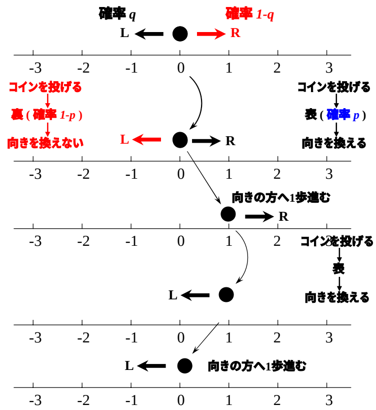
量子ウォーク
擬速度の分布の長時間極限

$\frac{X_t}{t}$ $\quad t \to \infty$



(今野の) 分布関数

§2 ランダムターン模型 （古典の場合）



以上の動作をフーリエ積分を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} P_n^{(L)}(x) \\ P_n^{(R)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} W(k)^n \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

但し

$$W(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

もし表と裏の出る確率が等しいコイン $(p=1/2)$ ならば、$W(k)$ の固有値は $\lambda = 0, \lambda = \cos k$ なので $P_n^{(L)}(x) = P_n^{(R)}(x) \equiv P_n(x)/2$ となって粒子の初めの向き q には依らない。
この左右対称な場合は

$$P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \cos^n k = \frac{1}{2^n} \binom{n}{(n+x)/2}$$

となる。

連続極限 (拡散スケーリング極限)

$$n = \frac{t}{\tau}, x \Rightarrow \frac{x}{a}, k \Rightarrow ak$$

$$(\cos k)^n \Rightarrow (\cos ak)^{t/\tau} = \left(1 - \frac{a^2k^2}{2} + \cdots\right)^{t/\tau} \to e^{-tk^2/2} \quad \text{as } \tau = a^2 \to 0$$

$$\mathrm{p}_t(x) = \lim_{\tau = a^2 \to 0} \frac{\mathrm{P}_{t/\tau}(x/a)}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp[-\frac{t}{2}k^2 + \mathrm{i}kx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}_t(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{p}_t(x) \quad \text{with} \quad \lim_{t\to 0}\mathrm{p}_t(x) = \delta(x)$$

熱拡散方程式の解

ランダム·ウォークの分布 ⇨ ガウス分布
『中心極限定理』の典型例

§3 量子ウォーク模型の定義

標準模型（2 状態, 最近接ホッピング）

古典ランダム·ターンモデル

$$\begin{pmatrix} P_n^{(L)}(x) \\ P_n^{(R)}(x) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} W(k)^n \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

2状態波動関数

$$\Psi(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_{1/2}(x,t) \\ \Psi_{-1/2}(x,t) \end{pmatrix}$$

初期量子ビット

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} q_{1/2} \\ q_{-1/2} \end{pmatrix}$$

$q_m \in \mathbb{C}$ (複素数)
$|q_{1/2}|^2 + |q_{-1/2}|^2 = 1$

$$V(k) = S(k)R = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}, \quad R \in SU(2)$$

よく使われている行列 アダマール行列 $R = H = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

確率密度と期待値

波動関数

$$\Psi(x,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \widehat{\Psi}(k,t) e^{ikx}$$

確率密度

$$\mathrm{Prob}(X_t = x) = P(x,t) = [\Psi(x,t)]^\dagger \Psi(x,t)$$

$X_t =$ 時刻 $t\ (= 0,1,2,\ldots)$ での量子ウォークの位置

7

$x \in \mathsf{Z}$ を考えると, X_t の r-次のモーメントは次のように計算される.
$r = 0,1,2,\cdots$ のとき

$$\langle (X_t)^r \rangle \equiv \sum_{x \in \mathsf{Z}} x^r P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} [\hat{\Psi}(k,t)]^\dagger \left(\mathrm{i} \frac{d}{dk} \right)^r \widehat{\Psi}(k,t)$$

$\mathsf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

8

2つの内部状態をもった波動関数を考えると、
量子ウォークの1ステップは次のように表せる。

$$\Psi(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_{1/2}(x,t) \\ \Psi_{-1/2}(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x,t+1) = \begin{pmatrix} c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \Psi_{1/2}(x+1,t) - s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \Psi_{-1/2}(x+1,t) \\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \Psi_{1/2}(x-1,t) + c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \Psi_{-1/2}(x-1,t) \end{pmatrix}$$

ただし $R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$

2×2, $\det R = 1$ のユニタリ行列 , $c = \cos\frac{\beta}{2}$, $s = \sin\frac{\beta}{2}$

典型的な例 : $H = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$

---

§4 今野の弱収束の定理

$$\text{classical } W(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

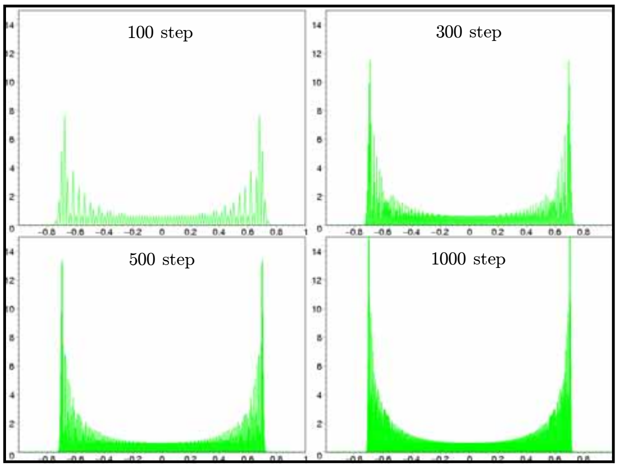
$$\text{quantum } V(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}$$

しかし, ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 $(|\lambda| = 1)$ なので
波動関数 $\Psi(x,t)$ 及び確率密度 $P(x,t)$ は
$t \to \infty$ の極限をとっても収束しない

今野の定理 (今野紀雄氏　横浜国大工学部)

N.Konno : Quantum Inf. Process **1** (2002) 345
J. Math. Soc. Jpn. **57** (2005) 1779

量子ウォークの 擬速度 X_t/t の任意のモーメントは
$t \to \infty$ の極限において収束する（弱収束）



今野の弱収束の定理

$$SU(2) = \left\{ R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix} \right\}$$

2×2, $\det R = 1$ のユニタリ行列 , $c = \cos\frac{\beta}{2}$, $s = \sin\frac{\beta}{2}$

$x = 0$ からスタートする量子ウォークの初期量子ビット

$$\Psi(x,0) = \phi_0 = \delta_{x\,0} \begin{pmatrix} q_{1/2} \\ q_{-1/2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} q_{1/2} \\ q_{-1/2} \end{pmatrix}$$

12

今野の分布関数

任意の $r = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t}\right)^r \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^r \nu(y)$$

ただしここで, $\nu(y)$ は

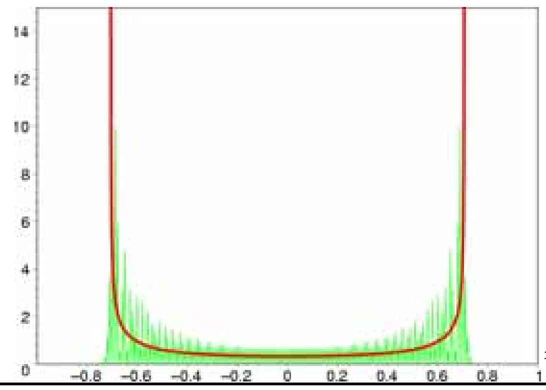
$$\mu(x;a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \mathbf{1}_{\{|x|<|a|\}}$$

$$\mathcal{M}(x) = 1 + \left[-\{|q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2\} + 2\tau\, \mathrm{Re}\left\{q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\right\}\right] x$$

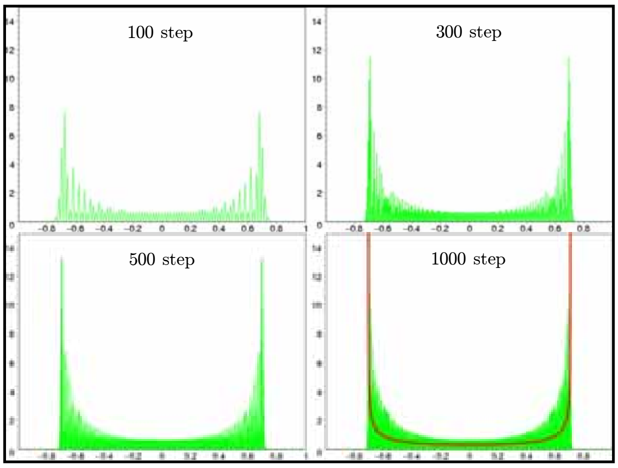
を用いて

$$\nu(y) = \mu\left(y\,; \cos\frac{\beta}{2}\right)\mathcal{M}(y)$$

$$R^{(1/2)} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \phi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$



14



§5 模型の拡張

量子力学の回転演算子

$$\widehat{R}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\mathrm{i}\alpha\hat{J}_3}e^{-\mathrm{i}\beta\hat{J}_2}e^{-\mathrm{i}\gamma\hat{J}_3}$$

$$[\widehat{J}_k, \widehat{J}_\ell] = \mathrm{i}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{k\ell m}\widehat{J}_m, \quad k,\ell = 1,2,3$$

$\varepsilon_{k\ell m}$: 完全反対称テンソル

と表される

$$\widehat{\mathbf{J}}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \quad , \quad \widehat{J}_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle \qquad \widehat{\mathbf{J}}^2 = \sum_{k=1}^{3}\widehat{J}_k^2$$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots \quad , \qquad m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

16

回転行列のウィグナー公式

$$R^{(j)}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m|\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|j,m'\rangle$$

$$R^{(j)}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\mathrm{i}\alpha m}r^{(j)}_{mm'}(\beta)e^{-\mathrm{i}\gamma m'}$$

$$r^{(j)}_{mm'}(\beta) = \sum_\ell \Gamma(j,m,m',\ell)\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2\ell}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2\ell+m'-m}$$

$$\Gamma(j,m,m',\ell) = (-1)^\ell\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j-m'-\ell)!(j+m-\ell)!\ell!(\ell+m'-m)!}.$$

階乗をとる数は正または 0 になる範囲の ℓ で和をとる. $(0! = 1)$

17

具体的な表現行列

$$c = \cos(\beta/2)\ , \ s = \sin(\beta/2)$$

$j = 1/2$ case

$$r^{(1/2)}(\beta) = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

$j = 1$ case

$$r^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} c^2 & -\sqrt{2}cs & s^2 \\ \sqrt{2}cs & 2c^2-1 & -\sqrt{2}cs \\ s^2 & \sqrt{2}cs & c^2 \end{pmatrix}$$

$j = 3/2$ case

$$r^{(3/2)}(\beta) = \begin{pmatrix} c^3 & -\sqrt{3}c^2s & \sqrt{3}cs^2 & -s^3 \\ \sqrt{3}c^2s & -2cs^2+c^3 & s^3-2c^2s & \sqrt{3}cs^2 \\ \sqrt{3}cs^2 & -s^3+2c^2s & -2cs^2+c^3 & -\sqrt{3}c^2s \\ s^3 & \sqrt{3}cs^2 & \sqrt{3}c^2s & c^3 \end{pmatrix}$$

18

模型の拡張　（ 2 状態から多状態へ）

$$\begin{pmatrix}\Psi_{1/2}(x,t)\\ \Psi_{-1/2}(x,t)\end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\left[\begin{pmatrix}e^{ik} & 0\\ 0 & e^{-ik}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\,e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -s\,e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2}\\ s\,e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & c\,e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2}\end{pmatrix}\right]^t\begin{pmatrix}q_{1/2}\\ q_{-1/2}\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}\Psi_j^{(j)}(x,t)\\ \Psi_{j-1}^{(j)}(x,t)\\ \vdots\\ \Psi_{-j}^{(j)}(x,t)\end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\left[\begin{pmatrix}e^{2\mathrm{i}jk} & & & \\ & e^{2\mathrm{i}(j-1)k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-2\mathrm{i}jk}\end{pmatrix}R^{(j)}(\alpha,\beta,\gamma)\right]^t\begin{pmatrix}q_j\\ q_{j-1}\\ \vdots\\ q_{-j}\end{pmatrix}$$

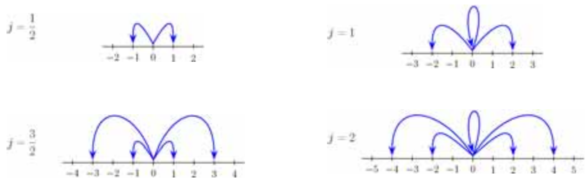
2 **成分** qubit　$\Rightarrow$　$(2j+1)$-**成分** qubit

19

実空間で表すと

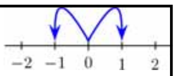
$$\Psi_m^{(j)}(x,t+1) = \sum_{m'=-j}^{j} R_{mm'}^{(j)}\,\Psi_{m'}^{(j)}(x+2m,t)$$

$$\Psi_m^{(j)}(x,0) = \delta_{x\,0}\phi_0^{(j)}$$

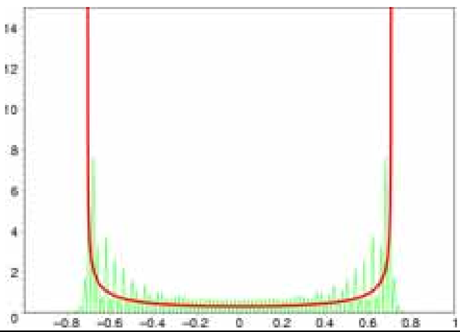


20

§6 シミュレーションの結果

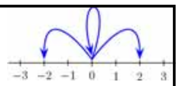


2 状態　$\phi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$　$R^{(1/2)} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

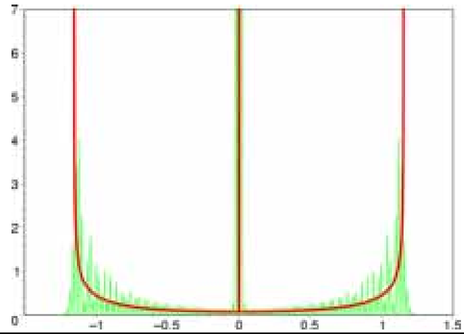


21

3 状態

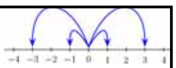


$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$　$R^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

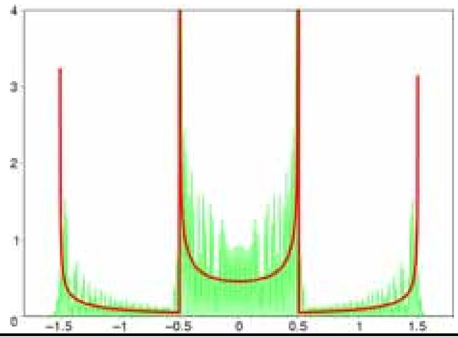


22

4 状態



$\phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1+3\mathrm{i}\\ 0\\ 0\\ -3+\mathrm{i}\end{pmatrix}$　$R^{(3/2)} = \frac{\mathrm{i}}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\\ 3 & 5 & \sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & \sqrt{3} & -5 & 3\\ 3\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3 & -1\end{pmatrix}$

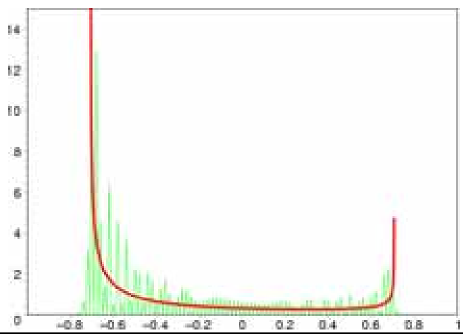


23

2 状態

symmetric　$\phi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$

asymmetric　$\phi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 1+i\end{pmatrix}$



24

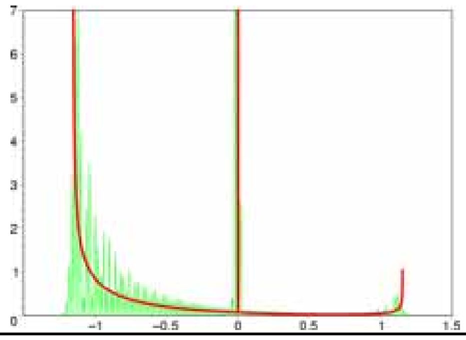
3 状態

symmetric

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

asymmetric

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$$



25

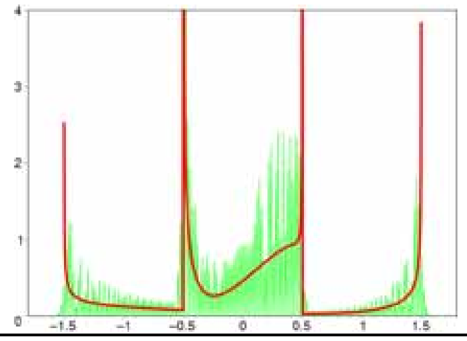
4 状態

symmetric

$$\phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1+3\mathrm{i}\\0\\0\\-3+\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

asymmetric

$$\phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1+3\mathrm{i}\\0\\0\\-3-\mathrm{i}\end{pmatrix}$$



26

§7 Main Result

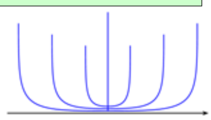
$$\lim_{t\to\infty}\left\langle\left(\frac{X_t^{(j)}}{t}\right)^r\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^r \nu^{(j)}(y)$$

$$\nu^{(j)}(y) = \sum_{m:0<m\le j}\frac{1}{2m}\mu\left(\frac{y}{2m};\cos\frac{\beta}{2}\right)\mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{y}{2m}\right)$$

$$+1_{\{(2j+1)\text{ is odd}\}}\Delta^{(j)}\delta(y)$$

qubit の成分数 $(2j+1)=$ 偶数

今野分布の重ね合せ



qubit の成分数 $(2j+1)=$ 奇数

今野分布の重ね合せ
+ デルタ関数（局在成分）

27

今野分布の重ね合わせの重み

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle\left(\frac{X_t^{(j)}}{t}\right)^r\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^r \nu^{(j)}(y)$$

$$\nu^{(j)}(y) = \sum_{m:0<m\le j}\frac{1}{2m}\mu\left(\frac{y}{2m};\cos\frac{\beta}{2}\right)\mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{y}{2m}\right)$$

$$+1_{\{(2j+1)\text{ is odd}\}}\Delta^{(j)}\delta(y)$$

$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta,\gamma\text{ パラメータ}\\ \text{初期 qubit}\end{array}\right\}$ を情報として持っている

$\downarrow$

$\mathcal{M}^{(j,m)}$ は多項式である

28

$j=1/2$ case (two-component model)

$$\mathcal{M}^{(1/2,1/2)}(x) = 1 + \mathcal{M}_1^{(1/2,1/2)}x$$

$$\mathcal{M}_1^{(1/2,1/2)} = -\{|q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2\} + 2\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}.$$

$j=1$ case (three-component model)

$$\mathcal{M}^{(1,1)}(x) = \mathcal{M}_0^{(1,1)} + \mathcal{M}_1^{(1,1)}x + \mathcal{M}_2^{(1,1)}x^2$$

$$\mathcal{M}_0^{(1,1)} = \frac{1}{2}\{|q_1|^2 + 2|q_0|^2 + |q_{-1}|^2\} - \mathrm{Re}\Big\{q_1\overline{q}_{-1}e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\mathcal{M}_1^{(1,1)} = -\{|q_1|^2 - |q_{-1}|^2\} + \sqrt{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_1\overline{q}_0 + q_0\overline{q}_{-1})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\mathcal{M}_2^{(1,1)} = \frac{1}{2}\{|q_1|^2 - 2|q_0|^2 + |q_{-1}|^2\} - \sqrt{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_1\overline{q}_0 - q_0\overline{q}_{-1})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$
$$+(1+2\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{q_1\overline{q}_{-1}e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\Delta^{(1)} = 1 - \left\{\mathcal{M}_0^{(1,1)} + \left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\mathcal{M}_2^{(1,1)}\right\}$$

29

$j=3/2$ case (four-component model)

$$\mathcal{M}^{(3/2,3/2)}(x) = \mathcal{M}_0^{(3/2,3/2)} + \mathcal{M}_1^{(3/2,3/2)}x + \mathcal{M}_2^{(3/2,3/2)}x^2 + \mathcal{M}_3^{(3/2,3/2)}x^3$$

$$\mathcal{M}_0^{(3/2,3/2)} = \frac{1}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 + 3|q_{1/2}|^2 + 3|q_{-1/2}|^2 + |q_{-3/2}|^2\Big\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} + q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\mathcal{M}_1^{(3/2,3/2)} = -\frac{3}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 + |q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2 - |q_{-3/2}|^2\Big\} - \frac{3}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{3/2}\overline{q}_{-3/2}e^{-3\mathrm{i}\gamma} - q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} + q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} - q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\mathcal{M}_2^{(3/2,3/2)} = \frac{3}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 - |q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2 + |q_{-3/2}|^2\Big\} - \sqrt{3}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} - q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} + q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

$$\mathcal{M}_3^{(3/2,3/2)} = -\frac{1}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 - 3|q_{1/2}|^2 + 3|q_{-1/2}|^2 - |q_{-3/2}|^2\Big\} + \frac{1}{2}\tau(3+4\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{q_{3/2}\overline{q}_{-3/2}e^{-3\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$
$$-\frac{3}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} + q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} - q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}$$

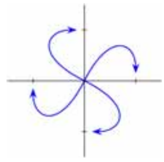
30

$$\mathcal{M}^{(3/2,1/2)}(x) = \mathcal{M}_0^{(3/2,1/2)} + \mathcal{M}_1^{(3/2,1/2)}x + \mathcal{M}_2^{(3/2,1/2)}x^2 + \mathcal{M}_3^{(3/2,1/2)}x^3$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0^{(3/2,1/2)} &= \frac{1}{4}\Big\{3|q_{3/2}|^2 + |q_{1/2}|^2 + |q_{-1/2}|^2 + 3|q_{-3/2}|^2\Big\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} + q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
\mathcal{M}_1^{(3/2,1/2)} &= -\frac{1}{4}\Big\{3|q_{3/2}|^2 - 5|q_{1/2}|^2 + 5|q_{-1/2}|^2 - 3|q_{-3/2}|^2\Big\} + \frac{9}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{3/2}\overline{q}_{-3/2}e^{-3\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} + q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
&\quad -\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} - q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
\mathcal{M}_2^{(3/2,1/2)} &= -\frac{3}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 - |q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2 + |q_{-3/2}|^2\Big\} + \sqrt{3}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} - q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} + q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
\mathcal{M}_3^{(3/2,1/2)} &= \frac{3}{4}\Big\{|q_{3/2}|^2 - 3|q_{1/2}|^2 + 3|q_{-1/2}|^2 - |q_{-3/2}|^2\Big\} - \frac{3}{2}\tau(3+4\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{q_{3/2}\overline{q}_{-3/2}e^{-3\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
&\quad +\frac{9}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{q_{1/2}\overline{q}_{-1/2}e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\tau\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{1/2} + q_{-1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-\mathrm{i}\gamma}\Big\} \\
&\quad +\frac{3\sqrt{3}}{2}(1+2\tau^2)\,\mathrm{Re}\Big\{(q_{3/2}\overline{q}_{-1/2} - q_{1/2}\overline{q}_{-3/2})e^{-2\mathrm{i}\gamma}\Big\}
\end{aligned}$$

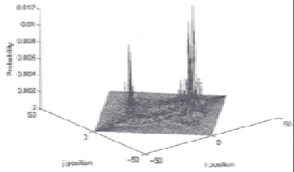
31

§8 今後の課題



- $\mathcal{M}^{(j,m)}$ の一般的な表式
  $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ は完全に求まった
  $\downarrow$
  一般形は?
- 1 次元 $\rightarrow$ 2 状態, 3 状態, 4 状態 $\cdots$
  $\downarrow$
  2 次元 (正方格子) $\rightarrow$ 4 状態 $\cdots$
  $\downarrow$
  3 次元 (立方格子) $\rightarrow$ 6 状態 $\cdots$

Venagas-Andraca, et al.
New J. Phys. 7 (2005)



プレプリント
arXiv : quant-ph/0611022