# 量子力学２　期末テスト（２００３年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること.

## 次の 2 問に答えなさい.（問題 II は裏面.）

**問題 I.** ポテンシャル $V(x)$ が，1 次元座標 $x$ の関数として，

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \quad \text{のとき} \\ 0 & 0 < x < L \quad \text{のとき} \\ \infty & x > L \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{1}$$

と与えられているものとする．このようなポテンシャルは，1 次元井戸型ポテンシャルとよばれる．質量 $m$ でエネルギー $E$ を持つ粒子が，この井戸型ポテンシャルの中に閉じ込められて，$0 < x < L$ の領域に束縛されている状態を，量子力学を用いて詳しく調べてみよう．

(1)　粒子の波動関数を $\psi(x)$ として，シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

を解く．$p = \sqrt{2mE}$ とすると, $0 < x < L$ での解は，$A, B$ を未定係数として

$$\psi(x) = Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}$$

で与えられることを示しなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

(2)　境界条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ を課すと，$p$ の値は離散的な値, $p = p_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ しか許されなくなることを示しなさい.

(3)　この結果，エネルギー $E = p^2/2m$ の値も離散的な値，$E = E_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ しか許されなくなることを示しなさい．($E_n$ を $n$ 番目のエネルギー固有値という．)

(4)　エネルギー固有値 $E_n$ を持つ波動関数 (固有関数) を $\psi_n(x)$ と書くことにする．規格化条件

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

を満たすように，$\psi_n(x)$ を定めなさい．必要があれば，次の公式を用いなさい.

$$\sin a = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia}), \qquad \cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia}),$$
$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a), \qquad \sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a.$$

## 問題 II. 上の問題 I で求めた波動関数 $\psi_n(x)$ を用いて，以下の設問に答えなさい．

(1)　波動関数 $\psi_n(x)$ で表される状態での運動量の期待値 $\langle p \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \psi_n | \, p_{\mathrm{op}} | \psi_n \rangle \\ &= \int_0^L \psi_n^*(x) \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) dx \end{aligned}$$

で与えられる．$\langle p \rangle = 0$ であることを示しなさい．

(2)　次に，運動量の 2 乗の期待値

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^L \psi_n^*(x) \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 \psi_n(x) dx$$

を計算しなさい．

(3)　運動量の不確定性 $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ を求めなさい．

(4)　位置の期待値

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^L \psi_n^*(x) x \psi_n(x) dx \\ &= \int_0^L x |\psi_n(x)|^2 dx \end{aligned}$$

を計算しなさい．

(5)　位置の 2 乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$ も計算して，位置の不確定性 $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ を求めなさい．

(6)　上で得られた結果を用いて，この系の不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

について考察しなさい．