量子力学２　期末テスト（２００４年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.

問題 I. 1 次元上の質量 m, エネルギー E の粒子の波動関数が

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar} & x < 0 \quad \text{のとき} \\ Ce^{-kx} + De^{kx} & 0 < x < a \quad \text{のとき} \\ Fe^{ip(x-a)/\hbar} & x > a \quad \text{のとき} \end{cases}$$

と与えられているものとする．ここで，a は正の定数, V は $V > E$ であるような有限な定数, $i = \sqrt{-1}$, $p = \sqrt{2mE}, k = \sqrt{2m(V-E)}/\hbar$ である．また，係数 A, B, C, D, F は複素数であり，以下の設問に従って定めるものとする．[(1)-(4) は各 5 点，(5)-(10) は各 10 点，計 80 点]

(1)　この波動関数は，どのようなポテンシャル $V(x)$ のもとでのシュレーディンガー方程式の解であるか．ポテンシャル $V(x)$ の座標 x 依存性を答えなさい.

(2)　$x = 0$ で波動関数の連続条件を課すことにより，係数 A, B, C, D の間に成り立つ 2 つの関係式を与えなさい.

(3)　$x = a$ で波動関数の連続条件を課すことにより，係数 C, D, F の間に成り立つ 2 つの関係式を与えなさい.

(4)　問 (2) で与えた 2 つの関係式を連立させ，まず D を消去して C を A と B を用いて表しなさい．次に C を消去して D を A と B を用いて表しなさい.

(5)　問 (3) で与えた 2 つの関係式に，上の問 (4) の結果を代入して C と D を消去し，A, B, F の間の 2 つの関係式を得なさい．答えを表すのに,

$$\sinh(ka) = \frac{e^{ka} - e^{-ka}}{2}, \quad \cosh(ka) = \frac{e^{ka} + e^{-ka}}{2}$$

を用いなさい.

(6)　上の問 (5) で得た 2 つの関係式を連立させて B を消去すると，係数 F が係数 A を用いて

$$F = SA \qquad \text{ここで} \quad S = \frac{1}{\cosh(ka) + G\sinh(ka)}$$

という形で与えられることが分かる. G を k と p の関数として求めなさい.
(ヒント: $\cosh^2(ka) - \sinh^2(ka) = 1$)

(7)　$T = |S|^2 = S \times S^*$ を計算して式変形すると，次の形に書けることが示せる.

$$T = \frac{1}{1 + H\sinh^2(ka)}.$$

H を k と p の関数として求めよ.

(8)　T を E, V, a, m を用いて表しなさい.

(9)　T は透過確率と呼ばれる．どうしてか説明しなさい.

(10)　V, a, m を定数として，T をエネルギー E の関数として見ることにする．横軸に E をとり，T のグラフの概形を描きなさい.

問題 II. [20 点] 質量 m, エネルギー E の粒子の, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

で与えられる．E の値も $V(x)$ の値も有限であるとする．このときには，波動関数 $\psi(x)$ そのものだけでなく，その導関数 $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ も位置座標 x の関数として連続でなければならない．どうしてか，説明しなさい．