量子力学２　期末テスト（２００５年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可．
裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

問題 I. 質量 m, 角振動数 ω の 1 次元調和振動子を考えることにする．ポテンシャル・エネルギーは $V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ であり，これに運動量エネルギーを加えたハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{1}$$

である．粒子の持つエネルギーを E とする．

(1)　まず，古典力学の問題として考えてみると，粒子の運動は，運動エネルギーが正の領域，すなわち $E>V(x)$ となる領域に限られるはずである．このことより，粒子は $-x_c<x<x_c$ の範囲を往復運動することになる．x_c を求めなさい．

(2)　量子力学的には，(1) 式のハミルトニアンで p を微分演算子 $-i\hbar\dfrac{d}{dx}$ に置き換えて得られるハミルトニアン演算子 (ここではこれを $\hat{\mathcal{H}}$ と書くことにする) に対する，時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{2}$$

を解いて，波動関数 $\Psi(x)$ を求めなければならない．また，エネルギー E の値は，$\hat{\mathcal{H}}$ の固有値 $E_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $n=0,1,2,\cdots$ に限られる．ここでは特に，$n=1$ のエネルギー固有値

$$E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega \tag{3}$$

を持つ波動関数 $\Psi_1(x)$ を求めてみよう．A と α を定数として

$$\Psi_1(x)=Ax\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right) \tag{4}$$

という形を仮定する．(3) 式と (4) 式をシュレーディンガー方程式 (2) の E と $\Psi(x)$ にそれぞれ代入して，α を定めなさい．ただし，α は正の実数とする．

(3)　上で求めた α は長さの逆数の次元を持つことを示しなさい．

(4)　係数 A を波動関数の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_1(x)|^2\,dx=1$$

を満たすように決めなさい．ただし，A も正の実数とする．

(5)　$\Psi_1(x)$ は 2 つの変曲点を持つ．(変曲点とは，$\dfrac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2}=0$ となる点．) 変曲点を求めなさい．

(6)　上で求めた変曲点におけるポテンシャル・エネルギーの値を求めなさい．

(7)　波動関数の変曲点は，古典力学においてはどういう意味を持つか．

問題 II. 量子力学では，座標 x と運動量 p との間に

$$[x, p] = i\hbar$$

という交換関係が成り立たなければならない．講義では x はそのまま x として，$p = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$ とすると，この交換関係が成り立つと説明した．しかし，p をそのまま p として，$x = i\hbar \dfrac{d}{dp}$ としても良い．(これを「運動量表現」とよぶことにする．)

(1) このことを確かめなさい.

(2) ポテンシャル・エネルギーが, k を正の定数として $V(x) = -kx$ である場合を考える．時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$\hat{\mathcal{H}}\Phi = E\Phi$$

をこの運動量表現で書いてみよ．(質量 m, エネルギー E とする．)

(3) C を定数として

$$\Phi(p) = C \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar k} \left(\frac{p^3}{6m} - Ep \right) \right\}$$

とすると，これは上で求めた運動量表現での方程式を満たすことを示しなさい.