量子力学２　期末テスト（２００６年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること.

次の 2 問に答えなさい.（問題 II は裏面.）

問題 I. [計 80 点] 1 次元調和振動子の波動関数について，以下の設問に答えなさい．なお，必要に応じて次の積分公式を用いてよいものとする．(ただし $\alpha > 0$．)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(1) [10 点]　A を正の実数として

$$\psi(x) = Ce^{-Ax^2} \tag{1}$$

という波動関数を考えることにする．これが規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ を満たすように C を定めなさい．ただし C は正の実数とする.（**ヒント:** C は A の関数となる．）

(2) [20 点]　調和振動子の質量を m, 角振動数を ω とするとハミルトニアンは $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ であり，エネルギーの期待値は $E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\mathcal{H}\psi(x)dx$ で与えられる．まず，このうちの運動エネルギーの部分，すなわち

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)dx$$

を求めなさい.（**ヒント:** 問 (1) の結果を用いて C を消去し，答は $\hbar, m, A$ のみを用いて表せ.）

(3) [10 点]　同様にして，ポテンシャルエネルギーの部分，すなわち

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x)dx$$

も求めなさい.（**ヒント:** 問 (1) の結果を用いて C を消去し，答は ω, m, A のみを用いて表せ.）

(4) [20 点]　全エネルギーの期待値を

$$E(A) = E_1(A) + E_2(A)$$

というように，A の関数として見ることにする．$A > 0$ に対して，$E(A)$ は A のどのような関数であるか，そのグラフを描いてみなさい.

(5) [10 点]　$E(A)$ を最小とする A の値 A_0 を与えなさい．また $E(A)$ の最小値 $E(A_0)$ も求めよ.

(6) [10 点]　上で求めた A_0 を (1) 式の A に代入して得られる波動関数は，1 次元調和振動子のエネルギー固有関数であることを示しなさい.

問題 II. [計 20 点]　プランク定数は $h \simeq 6.626 \times 10^{-34}$ J·s で与えられる．これを 2π で割ったものを $\hbar$ と書く．一般に物理量 Q には次元がある．ここでは次元がメートル (m), キログラム (kg), 秒 (s) のそれぞれ適当なべき乗の積で表される場合を考える．それぞれのべき指数が α, β, γ であるときこれを

$$[Q] = [\mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{kg}^{\beta}\mathrm{s}^{\gamma}]$$

と表す.
注意：メートルの m と以下に出てくる質量 m とを混同しないこと.

(1) [5 点]　$\hbar$ の次元を求めなさい.（つまり $[\hbar] = [\mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{kg}^{\beta}\mathrm{s}^{\gamma}]$ としたときのべき指数 α, β, γ を求めよ.）

(2) [15 点]　質量 m の次元は $[m] = [\mathrm{kg}^1]$, 角振動数 ω の次元は $[\omega] = [\mathrm{s}^{-1}]$ である．いま f と g がともに m と ω と $\hbar$ の関数であり

$$f(m, \omega, \hbar) = c_1 m^{q_1} \omega^{q_2} \hbar^{q_3}$$
$$g(m, \omega, \hbar) = c_2 m^{r_1} \omega^{r_2} \hbar^{r_3}$$

という形であるものとする．ただし $c_1, c_2, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3$ は未定定数であり，次元は持たない．1 次元系の位置を x，運動量を p として

$$a = f(m, \omega, \hbar)x + g(m, \omega, \hbar)p$$

としたとき，a が無次元量（つまり $[a] = [\mathrm{m}^0\mathrm{kg}^0\mathrm{s}^0]$ ）となるためには，$q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3$ をそれぞれどのような値にすればよいか答えよ.