

量子力学3 期末テスト(2006年度)

教科書・ノートなどの持ち込み不可。

裏面も使って良いので、解答はなるべく解答用紙一枚に収めること。

次の3問に答えなさい。(裏面にも問題があるので注意しなさい。)

問題 I. 直交デカルト座標 (x, y, z) において y 座標の周りの微小回転を考える。回転角度を α とすると、 $|\alpha| \ll 1$ のとき座標は

$$x \rightarrow x + \delta x = x + \alpha z \quad (1)$$

$$y \rightarrow y \quad (2)$$

$$z \rightarrow z + \delta z = z - \alpha x \quad (3)$$

と変換される。

(1) 上の (1), (2), (3) 式を導きなさい。

(2) 3次元極座標

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (4)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (5)$$

$$z = r \cos \theta \quad (6)$$

と合わせて考えることにする。するとまず、 z 座標の変位 δz は (6) より

$$\delta z = \delta(r \cos \theta) = r \delta(\cos \theta) = -r \sin \theta \delta \theta$$

と表せることが分かる。これと (3) 式及び (4) 式より

$$\delta \theta = \alpha \cos \varphi \quad (7)$$

と求まることを示しなさい。

(3) (2) 式にあるように、この変換によって y 座標は不変である。つまり $\delta y = 0$ である。(5) 式を用いることにより、この不変性から

$$\delta \varphi = -\cot \theta \tan \varphi \delta \theta \quad (8)$$

という関係式を導きなさい。

(4) (7) 式と (8) 式より、 $\delta \varphi$ を α, θ, φ の関数として表す式を導きなさい。

(5) 以上の結果と、 $|\alpha| \ll 1$ で成り立つ等式

$$\langle r, \theta, \varphi | \left(1 + \frac{i}{\hbar} \alpha L_y \right) = \langle r, \theta + \delta \theta, \varphi + \delta \varphi |$$

から、角運動量の y 成分の演算子 L_y を $\frac{\partial}{\partial \theta}$ や $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ といった微分演算子で表す表式を導きなさい。

問題 II. 角運動演算子 $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ は, $[L_j, L_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^3 \varepsilon_{j k \ell} L_\ell$, $j, k = 1, 2, 3$ という交換関係を満たす. ここで, $i = \sqrt{-1}$ であり, h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$. また, $\varepsilon_{j k \ell}$ は完全反対称テンソルである. 以下,

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2$$

とする. 次の設問に答えなさい.

- (1) L^2 と L_3 とは可換であること, すなわち $[L^2, L_3] = 0$ であることを示しなさい.
- (2) 次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$[L_3, L_+] = \hbar L_+, \quad [L_3, L_-] = -\hbar L_-.$$

- (3) 次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$L_+ L_- = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3, \quad L_- L_+ = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3.$$

問題 III. 量子力学における系の並進, 回転, および時間発展は, 一般的にそれぞれどのように表されるか, 運動量演算子 \vec{p} , 角運動量演算子 \vec{L} , およびハミルトニアン \mathcal{H} を用いて答えなさい. また, 古典力学で習った運動量保存則, 角運動量保存則, エネルギー保存則は, それぞれ量子力学ではどのような物理的な意味を持つのか, 説明しなさい.