

名著に親しむ

特集から広がる読書案内

香取 眞理

ランダム行列から無限粒子系の数理へ

今回の特集で解説されているように、近年ランダム行列の理論が実に多くの研究分野に応用されている。その反作用として、ランダム行列に対して様々な角度から考察がなされ、研究の深化も進んでいる。『ランダム行列の理論とは、乱数を成分とする行列の、主に固有値の分布を調べるものである』と言ってしまえばそれまでなのに、どうしてこうも広く、深いのか不思議である。

複雑な原子核のエネルギー準位を近似する統計理論としてスタートしたので、元来はランダム行列として系のハミルトニアン行列を考えるのが自然であったのが、輸送現象を記述するための転送行列や、事象の相関行列など、ハミルトニアンとは特性・対称性が異なるものもランダム行列の研究対象とするようになったことが転機となったのであろうか。エルミート行列をユニタリー行列の部分と固有値の部分とに分けて、前者を積分すると後者に対する非自明な（そして普遍性を持つ）分布が得られるという構造が、複雑な多自由度・多粒子系から着目したい自由度のみを取り出し、それに対する有効理論を導くという場の理論・統計物理学の雛形となっているからであろうか。

少し前に、マーカス・デュ・ソートイ著（富永星訳）『素数の音楽』（新潮社、2005年）を読んだ。この本は、リーマン予想の研究に携わった古今の数学者の系譜を綴った科学読み物であるが、最後にはランダム行列や量子カオスとの関連にまで話が及び、読んでいて興奮した。この本によれば、ランダム行列理論は、オイラー、ガウス、リーマン、ヒルベルトと続く王道に連なる、由緒正しい数学ということになる。

ダイソンは1962年の論文で、各成分の乱数をブラウン運動に置き換え、ランダム行列を、行列に値をもつ拡散過程と見なした。そして彼は、このとき固有値が従う確率過程が、非衝突（非交叉）条件を課した多粒子拡散過程に対する確率微分方程式の解を与えることを明らかにした。このことは、（エルミート行列を分解してそのユニタリー行列の部分を積分し固有値部分のみを残すという）一種の「粗視化」の操作によって

「条件付き問題」が解けるという事実を意味している。粒子配置や運動形態に条件を付けてプロセスを考えることは、確率論および（非平衡）統計物理学で重要な課題である。ランダム行列理論は、多粒子系・無限粒子系を研究する上でも、有力な手法を与えるのである。（より詳しくは、小嶋泉編『数理物理への誘い6』（遊星社、2006年）の第6話「ランダム行列と非衝突過程」（香取眞理・種村秀紀）を参照下さい。）

さて、右のページでは、多粒子系・無限粒子系の数理を扱った書の中で、いくつか名著を並べてみた。ランダム行列の本もその一例というわけで、「特集から広がる…」という本コーナーの趣旨に従ったつもりである。

強く相互作用する多粒子系の研究は、相転移・臨界現象の解明に重要であるばかりか、流れや連鎖的な応答を伴う非平衡系を理解するためには不可欠である。ミクロな（不確定な）ルールからマクロなコヒーレンスが発現するメカニズムを明らかにすることは一般には難しい。しかし、2次元あるいは $1+1$ 次元の系に対する研究は大きな成果を上げている。 $1+1=2$ 次元という「低次元」に対する描像が、しかしながら、右の4冊ではそれぞれ異なっていることに注意していただきたい。

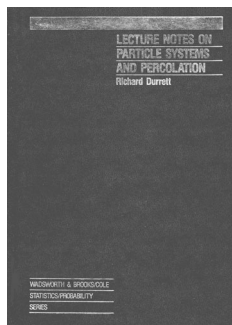
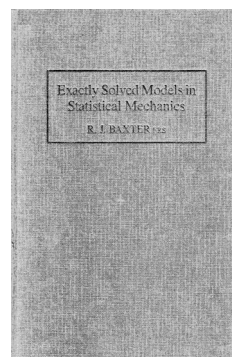
Baxterの本では、1次元的な配置を転送して平面を覆う方法（転送行列法）が主に用いられている。しかし、興味の対象は平面上で等方的な現象である。これに対してDurrettの本では、多粒子系の確率過程が対象であり、強い異方性をもつ時空平面上の大域的な現象として時間発展が表現される。Mehtaの本の第3版で加筆された多行列理論では、ランダム行列を1次元的に連ねた鎖を考えるのであるが、この鎖の伸びる方向を実固有値が並ぶ空間とは別の次元方向（例えば時間軸）と見なすことができるのである。最後のLawlerの本では2次元空間を複素平面とみなし、その上に定義される空間パターンを（確率的に変動する）共形変換によって生成するという議論が展開される。

（かとり・まこと、中央大学理工学部）

EXACTLY SOLVED MODELS IN STATISTICAL MECHANICS

R.J. Baxter 著, ハードカバー, 486 頁, Academic Press, 1982 年

この本は可積分系研究者のバイブルなのであろう。確かにアドバンストな内容だが, 統計物理学の大変教育的な教科書でもあると思う。格子上のスピン系・粒子系の問題と空間の分割・色分けといった数え上げの問題との対応をこれほど丁寧に解説してある本は他にはないように思う。限られた数のモデルを詳述しているのであるが, 統計物理学の汎用性をも伝えている。



LECTURE NOTES ON PARTICLE SYSTEMS AND PERCOLATION

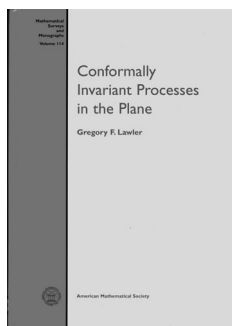
R. Durrett 著, ハードカバー, 335 頁, Wadsworth & Brooks, 1988 年

伝染病伝播の contact process や棲み分けのモデルである voter model の数理を扱った名著としては T.M. Liggett 著『Interacting Particle Systems』(Springer, 1985) もある。空間 1 次元, 時間 1 次元の非平衡粒子系を 2 次元平面上の方向付き浸透理論を用いて解析する手法を力強く説いている。数学の本なのに, 計算機シミュレーションの図がページいっぱい載っていて, ワクワクする。

RANDOM MATRICES

M.L. Mehta 著, ハードカバー, 第 3 版, 688 頁, Elsevier, 2004 年

筆者は 1991 年刊行の第 2 版で読んだ。沢山の計算が書き込まれていて, 数学の本とも物理の本ともいえない奇妙な書き方である。積分公式に対峙して, 読者は自らその数学的な意味や物理的な意味を考えなければならない。第 3 版で増補された内容(多行列理論や Tracy-Widom 分布など)に関しては, 永尾太郎著『ランダム行列の基礎』(東京大学出版会, 2005) も参照されたい。



CONFORMALLY INVARIANT PROCESSES IN THE PLANE

G.F. Lawler 著, ハードカバー, 242 頁, American Mathematical Society, 2005 年

今回 Werner が, 確率論の分野で初めてフィールズ賞を受賞した。その Schramm-Loewner 方程式の理論を, Schramm や Werner と共に構築した著者が解説した教科書である。確率解析と共形変換の基礎を説明したあと, 彼らの新理論を一気に展開する。(代数的・理論物理学的な) 共形場理論には頼らず, あくまで上記の数学を組み合わせる。無限粒子系の臨界現象・フラクタル構造の数理に迫る新しいスタイルを明示している。