An Introduction to Schramm-Loewner Evolution *

香取眞理（中央大学理工学部物理学科）†

31 January 2007 (version 3)

1 複素上半平面内の曲線と共形変換

複素平面を $\mathbb{C}$, その上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ と書くことにする．また $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ とする．実軸上の一点 $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ を出発点として，時間 $t \in [0, \infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty)$$

を考える．まずは単純曲線を考えることにし，また $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$ とする．Riemann の写像定理 (例えば [1]) と Möbius 変換に関する初等的な知識より，各時刻 $t > 0$ において，

$$z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad a(t) \in \mathbb{R}, \quad z \to \infty \tag{1.1}$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad \to \quad \mathbb{H}$$

なる共形変換が唯一存在することを示すことができる [5, 4]．この共形変換を $g_{\gamma(0,t]}(z)$ または $g_t(z)$ と書くことにする．$g_0(z) = z$ とする．

注 1. この変換 g_t によって，領域 $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ の境界のうち，$\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ に，無限遠点 ∞ は無限遠点 ∞ に写される．

以下，この節では $t \in (0, \infty)$ を固定して考えることにする．

$B^j_s, j = 1, 2$ を 2 つの独立な 1 次元標準ブラウン運動として，$\mathbb{C}$ 上のブラウン運動を

$$B_s = B^1_s + \mathrm{i}\, B^2_s, \quad s \in [0, \infty) \tag{1.2}$$

*研究集会 “統計物理に関連する数学的話題” (2007 年 1 月 29, 30 日, 東工大数学) で講演.

†E-mail address : katori@phys.chuo-u.ac.jp

で定義する．いま，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]$ の内点 z からスタートしたブラウン運動を考え，これがこの領域の境界である $\gamma(0,t] \cup \mathbb{R}$ のいずれかの点に初めて到達する時刻を

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : B_s \in \gamma(0,t] \cup \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

と書くことにする．$z - g_t(z)$ は $\mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]$ で有界な正則関数であり，その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_t(z) = \mathrm{Im}\,(z - g_t(z)), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{1.4}$$

を考えることにすると，これは

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\phi_t(B_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{1.5}$$

と与えることができる．よって

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_t})] - E^z[\mathrm{Im}\,(g_t(B_{\tau_t}))] = E^z[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_t})]$$

となる．ここで，$B_{\tau_t} \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]$ であるので注 1 より $g_t(B_{\tau_t}) \in \mathbb{R}$ であることを用いた．したがって

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z)) = \mathrm{Im}\,(z) - E^z[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{1.6}$$

という表式が得られる．いま

$$R_t = \sup\{|\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in (0,t]\} \tag{1.7}$$

とする．つまり $\gamma(0,t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の半円 $\mathcal{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の中に含まれることになる．この半円の外の $\mathbb{H}$ の点 $z \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\gamma(0), R_t)$ に対して，この点をスタートしたブラウン運動を考えることにする．このブラウン運動が $\mathcal{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の半円周上，または実軸に初めて到達する時刻を σ と書くことにする

$$\sigma = \inf\{s \geq 0 : B_s \in \mathcal{B}(\gamma(0), R_t) \cup \mathbb{R}\}$$

このとき，到達点 B_σ の半円上の分布密度を $p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}), \theta \in (0,\pi)$ と書くことにすると，ブラウン運動の強マルコフ性より

$$\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}) \mathbf{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_\tau)] R_t d\theta \tag{1.8}$$

が成り立つ．この半円上の密度は，上半平面から半円 $\mathcal{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ を除いた領域

$$D = \{z \in \mathbb{H} : |z - \gamma(0)| > R_t\}$$

におけるポアソン核であり，

$$p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R_t^{n-1} \mathrm{Im}\left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n}\right], \quad z \in D, \quad \theta \in (0,\pi) \tag{1.9}$$

で与えられる [4]. 曲線 $\gamma[0,t]$ は，その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の円に含まれる．したがって，この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点をスタートするようにした後，全体を $1/R_t$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\widetilde{\gamma}[0,t]$ と書くことにすると，これは原点を中心とする単位円に含まれることになる．

$$\widetilde{\tau}_t = \inf\{s \geq 0 : B_s \in \widetilde{\gamma}(0,t] \cup \mathbb{R}\} \tag{1.10}$$

とすると，ブラウン運動のスケーリングよりこの分布は τ_t/R_t^2 の分布に等しく，

$$\mathbf{E}^{\gamma(0)+R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_t})] = R_t \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})], \quad \theta \in (0,\pi) \tag{1.11}$$

である．これらの結果を (1.6) に代入すると

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z)) = \mathrm{Im}\left(z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z-\gamma(0))^n}\right) \tag{1.12}$$

となる．ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n-1)\theta) \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2,3,4,\cdots \tag{1.13}$$

である．

g_t は (1.1) という漸近形をもつ共形変換（正則関数）であるので，これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z-\gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{1.14}$$

と定まることになる．

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき，$n = 2,3,\cdots$ に対して $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin\theta$ となる有限な値 c_n をとることができる．よって

$$\begin{aligned}
|a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin((n-1)\theta)| \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\
&\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\
&\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3,4,5,\cdots
\end{aligned} \tag{1.15}$$

という評価が得られる．

注 2. (1.13) で特に $n=2$ とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \tag{1.16}$$

という表式が得られることになるが，上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \to \infty} \mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(B_{\tau_t})] \tag{1.17}$$

であることが分かる．この量は曲線 $\gamma(0,t]$ の半平面 capacity ($\mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ と書く) とよばれている．

__注 3.__ $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]$ におけるポアソン核を $p_{H_t}(z,w), z \in H_t, w \in \partial H_t = \widetilde{\gamma}(0,t] \cap \mathbb{R}$ と書くと，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(B_{\widetilde{\tau}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta}, w)\mathrm{Im}\,(w)dw \\ &= \int_{\widetilde{\gamma}(0,t]} p_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta}, w)\frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}\,\theta})}dw \times \mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}\,\theta}) \\ &= \sin\theta \int_{\widetilde{\gamma}(0,t]} \widehat{p}_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta}, w)dw\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\widehat{p}_D(z,w) \equiv p_D(z,w)\frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(z)}, \quad z \in D, \quad w \in \partial D \tag{1.18}$$

としたが，これは次式で定義される $\mathbb{H}$-excursion $\widehat{B}_s$ のポアソン核になっている [5]:

$$\widehat{B}_s = X_s + \mathrm{i}\,Y_s, \quad s \in [0,\infty). \tag{1.19}$$

ここで X_s は 1 次元標準ブラウン運動であり，Y_s はこれと独立な 3 次元ベッセル過程である．したがって上の量は $\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}\{\widehat{B}[0,\infty) \cap \widetilde{\gamma}(0,t] \neq \emptyset\}$ となるので，係数 $a_n(t)$ に対しては

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin((n-1)\theta)\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}\{\widehat{B}[0,\infty) \cap \widetilde{\gamma}(0,t] \neq \emptyset\} \tag{1.20}$$

という $\mathbb{H}$-excursion と曲線 $\widetilde{\gamma}(0,t]$ との交叉確率を用いた表式も得られる．

2 Loewner の微分方程式

この節では，時間を連続的に変化させて $\mathbb{H}$ 内の曲線 γ とそれに伴う共形変換 $g_t(x)$ の時間発展を追うことにする．$\varepsilon > 0$ として，時刻 $t+\varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0,t+\varepsilon]$ を考える．これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる．

$$\begin{aligned}g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0,t+\varepsilon]}(z) \\ &= \Big[g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])} \circ g_t\Big](z) = g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)).\end{aligned} \tag{2.1}$$

この共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ によって，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0,t+\varepsilon]$ は $\mathbb{H}$ に写される．しかし，$\mathbb{H} \setminus \gamma(0,t+\varepsilon]$ を $g_{t+\varepsilon}(z)$ ではなく $g_t(z)$ で写すと，像は $\mathbb{H}$ ではなく $\mathbb{H} \setminus g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$ となる．これは $\mathbb{H}$ から曲線 $g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$ を除いた領域である．この曲線の出発点にあたる実軸上の点を U_t と書くことにする．すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{2.2}$$

とする．(当然 $U_0 = \gamma(0)$ である．）すると，前節の結果 (1.14) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}((t,t+\varepsilon])}{(g_t(z)-U_t)^n} \end{aligned} \tag{2.3}$$

という形に書けることになる．ただしここで

$$R_t^{\varepsilon} = \sup\{|g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t+\varepsilon]\}, \tag{2.4}$$

として，

$$|a_n((t,t+\varepsilon])| \le c_{n-1}(R_t^{\varepsilon})^{n-2} a_2((t,t+\varepsilon]), \quad n = 3,4,5,\cdots \tag{2.5}$$

である．また，(2.3) の右辺の $g_t(z)$ に (1.14) を代入して展開したものは，(1.14) で $t \to t+\varepsilon$ としたものに等しいはずであり，その双方の $1/z$ の係数を比べることにより

$$a_2((t,t+\varepsilon]) = a_2(t+\varepsilon) - a_2(t). \tag{2.6}$$

という半平面 capacity の加法性が導かれる．

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{g_t(z)-U_t} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^{\varepsilon})^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n}(a_2(t+\varepsilon)-a_2(t))$$

という不等式が得られることになる．この両辺を ε で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z)-g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z)-U_t}\frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{\varepsilon} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^{\varepsilon})^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n} \times \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが，ここで $\varepsilon \to 0$ の極限をとることにする．半平面 capacity $a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ は一般に t について狭義単調増加関数であり連続であるが，さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{hcap}(\gamma(0,t]) \tag{2.7}$$

が存在するものと仮定する．また定義より $\lim_{\varepsilon\to 0} R_t^{\varepsilon} = 0$ であるから，上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z)-g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し，これは次の微分方程式を満たすことが結論される．

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z)-U_t}\frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t]). \tag{2.8}$$

ただし，初期条件は $g_0(z) = z$ である．これを Loewner の微分方程式という．

注 4. 上の (2.7) のところで，$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ が微分可能であることを仮定した．一般に $a_2(t)$ は t について狭義単調増加関数であり，連続であることが示せる [5]．したがって，曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面 capacity そのものでパラメトライズすることが可能である．特に通常は

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする．この定義より

$$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\overline{\gamma}((0,t])) = 2t \tag{2.9}$$

となるので，Loewner 方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \tag{2.10}$$

となる．(以下では，(2.9) である $\overline{\gamma}$ を改めて γ と記すことにする．) この方程式から生成される g_t を特に Loewner chains とよぶ．また U_t を Loewner 方程式の駆動関数とよぶことにする．

Loewner 方程式に展開式 (1.14) を代入すると，展開係数 $a_n(t)$ に対して階層的な方程式系が得られる：

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \cdots), \quad n = 2,3,4,\cdots. \tag{2.11}$$

ただし

$$a_1(t) = -(U_t - U_0) \tag{2.12}$$

とした．また $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \cdots)$ は次式で与えられる多項式である (ただし $\mathcal{P}_2 = 1$ とする)：

$$\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{\underline{m}:|\underline{m}|=n-2} (-1)^{\ell(\underline{m})} \prod_{j=1}^{\ell(\underline{m})} x_{m_j}. \tag{2.13}$$

ここで右辺は $\underline{m} = (m_1, m_2, \cdots), m_j \in \mathbb{N} \equiv \{1,2,3,\cdots\}$ に対する和であり，$\ell(\underline{m}) \equiv \underline{m}$ の成分の数，$|\underline{m}| \equiv \sum_{j=1}^{\ell(\underline{m})} m_j$ である．(あるいはこれは，次の漸化式によっても与えられる [2]．$\mathcal{P}_1 = 0, \mathcal{P}_2 = 1, \mathcal{P}_n = -\sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, n \geq 2$.) 具体的には

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}a_2(t) = 2, \\
&\frac{d}{dt}a_3(t) = -2a_1(t), \\
&\frac{d}{dt}a_4(t) = 2\{(a_1(t))^2 - a_2(t)\}, \\
&\frac{d}{dt}a_5(t) = 2\{-(a_1(t))^3 + 2a_2(t)a_1(t) - a_3(t)\}, \\
&\quad\cdots
\end{aligned} \tag{2.14}$$

である．$g_0(z) = z$ なので $a_n(0) = 0,\ n = 1,2,3,\cdots$ である．駆動関数 $a_1(t) = -(U_t - U_0)$ が与えられると，上の方程式系によりすべての展開係数 $a_n(t), n = 2,3,\cdots$ が決まり，共形変換 $g_t(z)$ が定まることになる．つまり Loewner 方程式は無限個の階層的な微分方程式系と等価であることになる．

3 Schramm-Loewner Evolution (SLE_κ) と d 次元ベッセル過程

Schramm [6] は, Loewner 方程式の駆動関数として

$$U_t - U_0 = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0 \tag{3.1}$$

とした．ここで B_t は 1 次元標準ブラウン運動である：

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z. \tag{3.2}$$

各 $z \in \mathbb{H}$ に対して，$T_z = \sup\{t \geq 0 :$ 解 $g_t(z)$ が well-defined で $g_t(z) \in \mathbb{H}\}$ として $H_t = \{z \in \mathbb{H} : T_z > t\}, K_t = \mathbb{H} \setminus H_t = \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\}$ とする．g_t は $H_t \to \mathbb{H}$ なる共形変換を与える．この初期値問題の解として得られる (時刻 $t \geq 0$ でパラメトライズされる) 共形変換の集合 g_t を (chordal) Schramm-Loewner evolution (SLE_κ と略記) という．

ここで

$$\widehat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}{\sqrt{\kappa}}$$

とすると，$\widehat{g}_t(z)$ は次の確率微分方程式を満たすことになる．

$$d\widehat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\widehat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \widehat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t. \tag{3.3}$$

この式で $z \to x \in \mathbb{R}$ としてみると，注 1 で述べたように $g_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ なので $\widehat{g}_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ である．したがって，SLE_κ を実軸上で考えたものは，d 次元ベッセル過程

$$dY_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{1}{Y_t^x} dt + dW_t, \quad Y_0^x = x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

で

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{4}{\kappa} + 1 \tag{3.5}$$

とおいたものに等しい．$T_x \equiv \inf\{t \geq 0 : Y_t^x = 0\}$ とする．各 x に対して同じブラウン運動 W_t をとることにする．カップリングにより $x < y$ なら $Y_t^x < Y_t^y, \forall t < T_x$ なので，$T_x \leq T_y$ である．次のことが知られている．

(1) $d \geq 2$ のとき，確率 1 で $T_x = \infty, \forall x > 0$.

(2) $d < 2$ のとき，確率 1 で $T_x < \infty, \forall x > 0$.

- (2a) $\frac{3}{2} < d < 2$ のとき，$0 < x < y$ に対して $\mathbf{P}\{T_x = T_y\} > 0$.
- (2b) $d \leq \frac{3}{2}$ のとき，$0 < x < y$ ならば確率 1 で $T_x < T_y$.

これに対応して，SLE_κ で生成される γ には 3 つの相があることが導かれる [5].

(1') $\kappa \leq 4$ のとき，γ は $\mathbb{H}$ 内の単純曲線であり，$\lim_{t\to\infty}|\gamma(t)| = \infty$.

(2a') $4 < \kappa < 8$ のとき，γ は自分自身や実軸と接することがある．しかし $\gamma[0,\infty] \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ である．(ただし，$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}}$.)

(2b') $\kappa \geq 8$ のとき，γ は $\mathbb{H}$ のすべての点を埋めつくす.

注 5. 2 次元格子上の統計物理模型の連続 (スケーリング) 極限と，次のように対応していることが "知られている [3]" [1].

$$\begin{aligned}
\kappa = 2 &\iff \text{loop-erased random walk (LERW)} \\
\kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} &\iff \text{self-avoiding walk (SAW)} \\
\kappa = 4 &\iff \text{臨界 4 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{24}{5} = 4.8 &\iff \text{臨界 3 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} &\iff \text{臨界イジング模型} \\
\kappa = 6 &\iff \text{臨界パーコレーション模型} \\
\kappa = 8 &\iff \text{uniform spanning tree (UST)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

4 SLE マルチンゲールと共形場理論

再び $g_t(z)$ の展開係数 $a_n(t), n = 1, 2, 3, \cdots$ を考える．SLE_κ では

$$a_1(t) = -(U_t - U_0) = -\sqrt{\kappa} B_t \tag{4.1}$$

としたので，$a_n(t)$ は一般には確率過程となる ($a_2(t) = 2t$ は決定論的). 上のように $a_1(t)$ はマルチンゲールであるが, (2.14) は $a_n(t)$, $n \geq 2$ は有界変動過程であることを示している．$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots)$, $\underline{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \cdots)$ と書くことにする．$Q(\underline{x})$ を多変数 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の実係数多項式としたとき，確率過程 $Q(\underline{a}(t))$ に対する確率微分方程式は, 伊藤の公式より

$$dQ(\underline{a}(t)) = \left[-\sqrt{\kappa} dB_t \frac{\partial}{\partial x_1} + dt \left(\frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n\geq 2} \mathcal{P}_n(\underline{a}(t)) \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right] Q(\underline{a}(t))$$

で与えられる．ここで $(da_1(t))^2 = \kappa dt$ と (2.11) を用いた．したがって，微分演算子

$$\mathcal{A} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n\geq 2} \mathcal{P}_n(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{4.2}$$

[1] q 状態ポッツ模型の $q = 2$ がイジング模型，$q = 1$ がパーコレーション模型，$q = 0$ が UST にそれぞれ対応．κ との対応は $q = 2 + 2\cos(8\pi/\kappa), 4 \leq \kappa \leq 8$ と思われている．

を定義して，$\mathcal{A}M(\underline{x})=0$ なる多項式 $M(\underline{x})$ が得られると，局所マルチンゲール $M(\underline{a}(t))$ が求められることになる．このような局所マルチンゲールは，多変数 $\{x_n\}_{n\geq 2}$ の階層性に従って

$$
\begin{aligned}
&a_1(t) \\
&2(a_1(t))^2-\kappa a_2(t) \\
&2(a_1(t))^3-3\kappa a_1(t)a_2(t) \quad \text{および} \quad a_3(t)+a_1(t)a_2(t) \\
&\qquad \cdots
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

というように階層的に定めていくことができる．これらは SLE マルチンゲールとよばれている [2].

Bauer と Bernard によって，これらのマルチンゲールの成す代数構造とビラソロ代数の central charge $c=(3\kappa-8)(6-\kappa)/2\kappa$ と conformal weight $\Delta=(6-\kappa)/2\kappa$ で指定される表現 (共形場理論) との関係が詳しく研究されている [2].

謝辞: 本講演の機会を与えて下さいました志賀徳造先生に感謝いたします．また，千葉大での土曜 SLE セミナーのメンバーである竹居正登氏，種村秀紀氏，笹本智弘氏，桑田和正氏, 今村卓史氏に感謝いたします.

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).

[2] M. Bauer and D. Bernard, SLE matringales and the Virasoro algebra, Phys. Lett. **B 557** (2003) 309-316.

[3] W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, J. Stat. Phys. **115** (2004) 1149-1229.

[4] 香取眞理：「共形変換と Loewner 方程式」中央大学大学院講義ノート（2006 年度後期). http : //www.phys.chuo − u.ac.jp/j/katori/ から pdf file をダウンロード可能.

[5] G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).

[6] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, Israel J. Math. **118** (2000) 221-228.