

私たちはSLEに関連するモデルの研究をしています。

そのモデルとしては、Percolation, Loop-erased random walk, Self avoiding walk, Ising model, Potts model, $O(n)$ modelなどがあります。

今回はこの中のPercolationmodel, Loop-erased random walk, Self avoiding walkについての説明とシミュレーションの結果について紹介します。

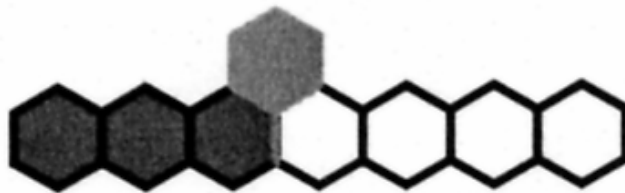
M1 佐藤 充規 渡部 恭平

Percolation

2次元平面で $y > 0$ の領域を正六角形の格子で覆い、 $x > 0$ に触れている六角形の面を白に塗り、 $x < 0$ に触れている六角形の面を黒に塗る。

そこで白い六角形と黒い六角形の境界上の辺をたどる境界面の成長過程を見たい。この界面は進行方向に対して右手に黒色、左手に白色をもつとする。(これから紹介する例すべてにおいてこれは同じ。)

1.まず、下図の様に界面は上へ成長する。



2.色の塗られていない六角形にぶつかったら確率1/2で白か黒に色を塗る。

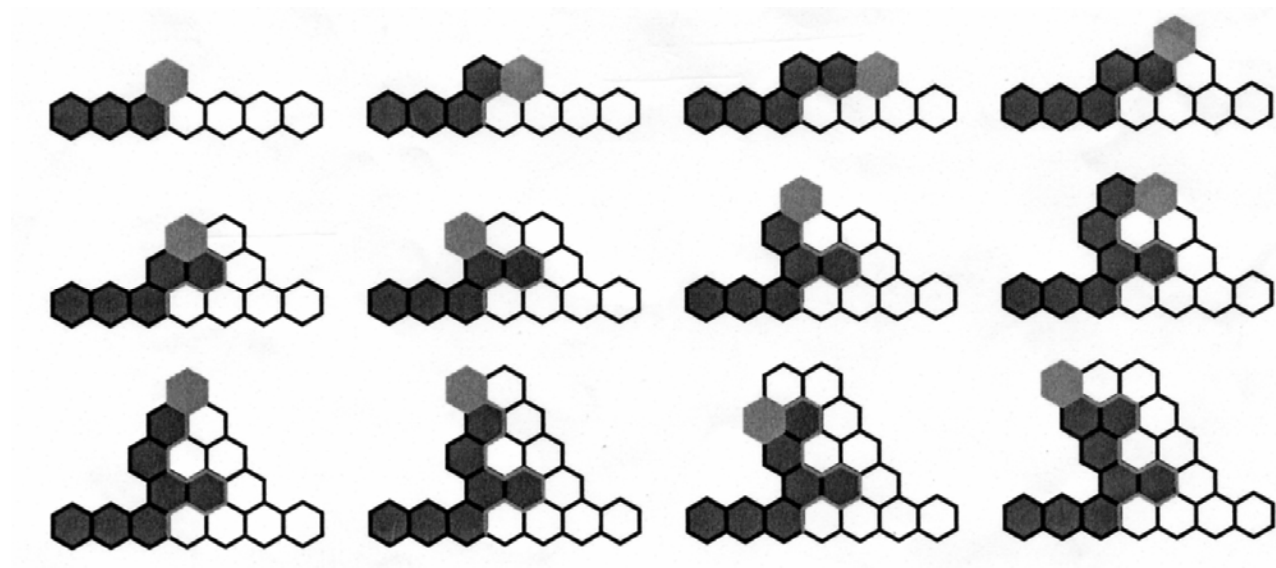
3.すると界面はある方向へ成長していく


4.2、3をくりかえすことで界面の成長過程を得る

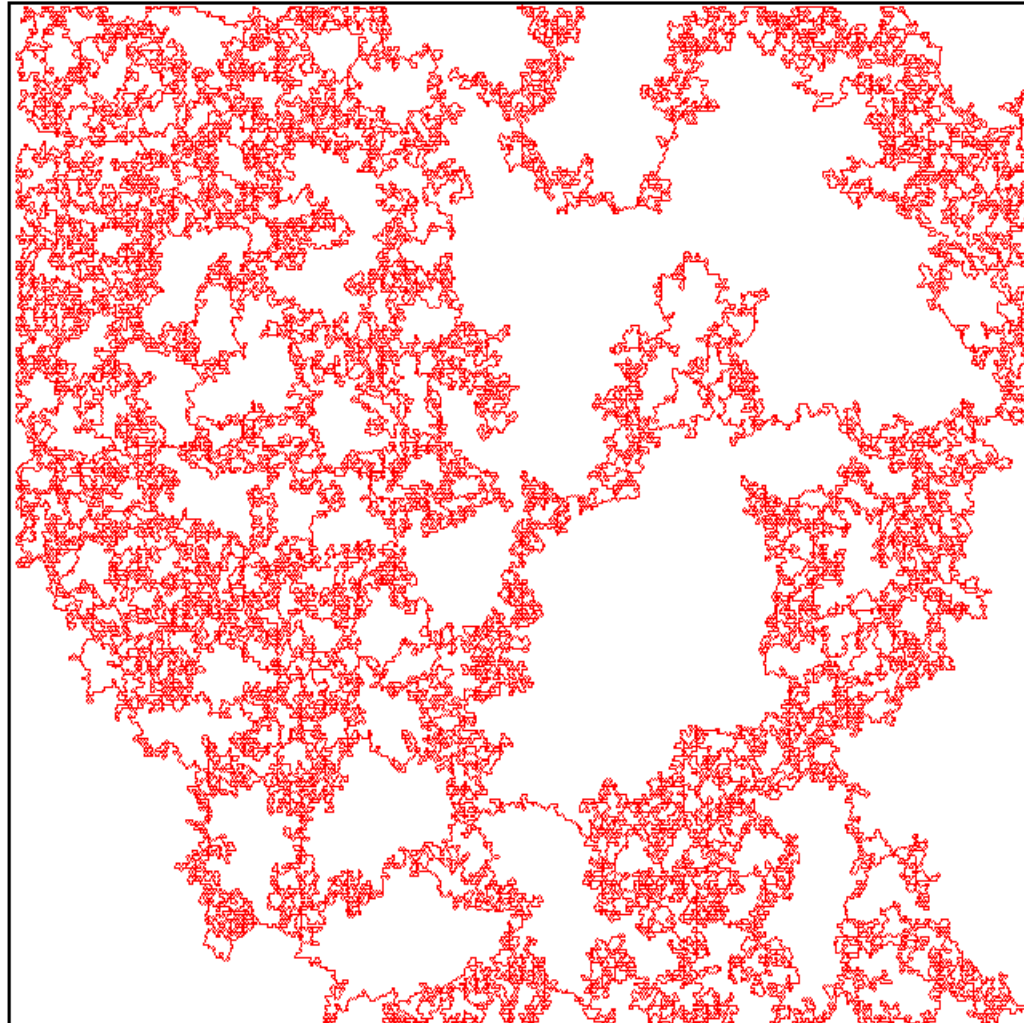
このシミュレーションは次のようになり、フラクタル次元は

$$d=1.75 \pm .01$$

となります。

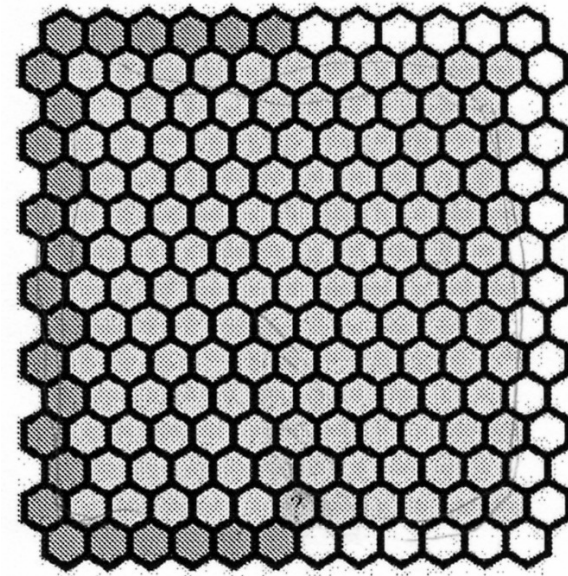


 .percolation with fair coin
(L=600)



Harmonic navigator

これはpercolationの
界面の成長過程を拡張
したもので、六角形の
色の塗り方を変えたも
ので、それは次に示す
方法です。まず、初期
条件として考えてる領
域を下図のように白と
黒で囲む。

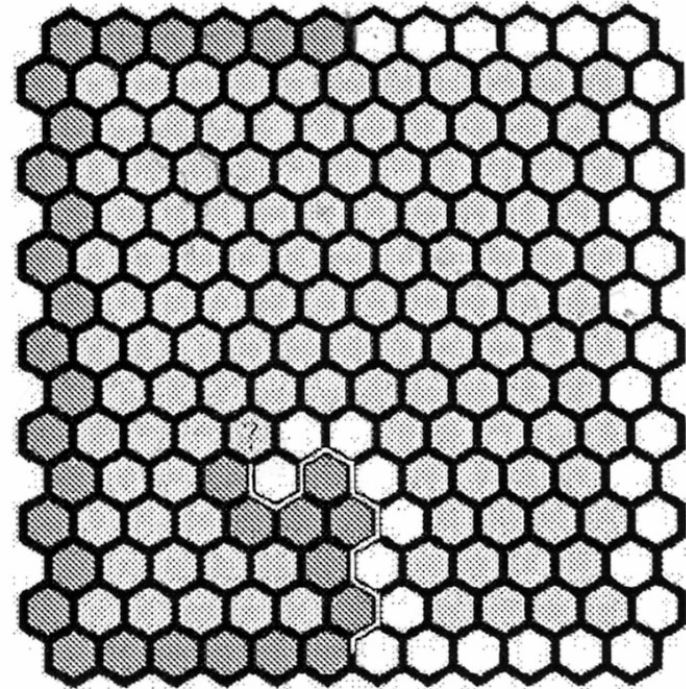


- 1.色を塗ろうとしている六角形の面から面上を移動するランダムウォークを走らせる。
- 2.ランダムウォークが白か黒にすでに塗られている六角形にぶつかったら、その色を塗ろうとしている六角形の色につかう。
- 3.それにより界面はある方向へ成長する。
- 4.1から4を繰り返す。

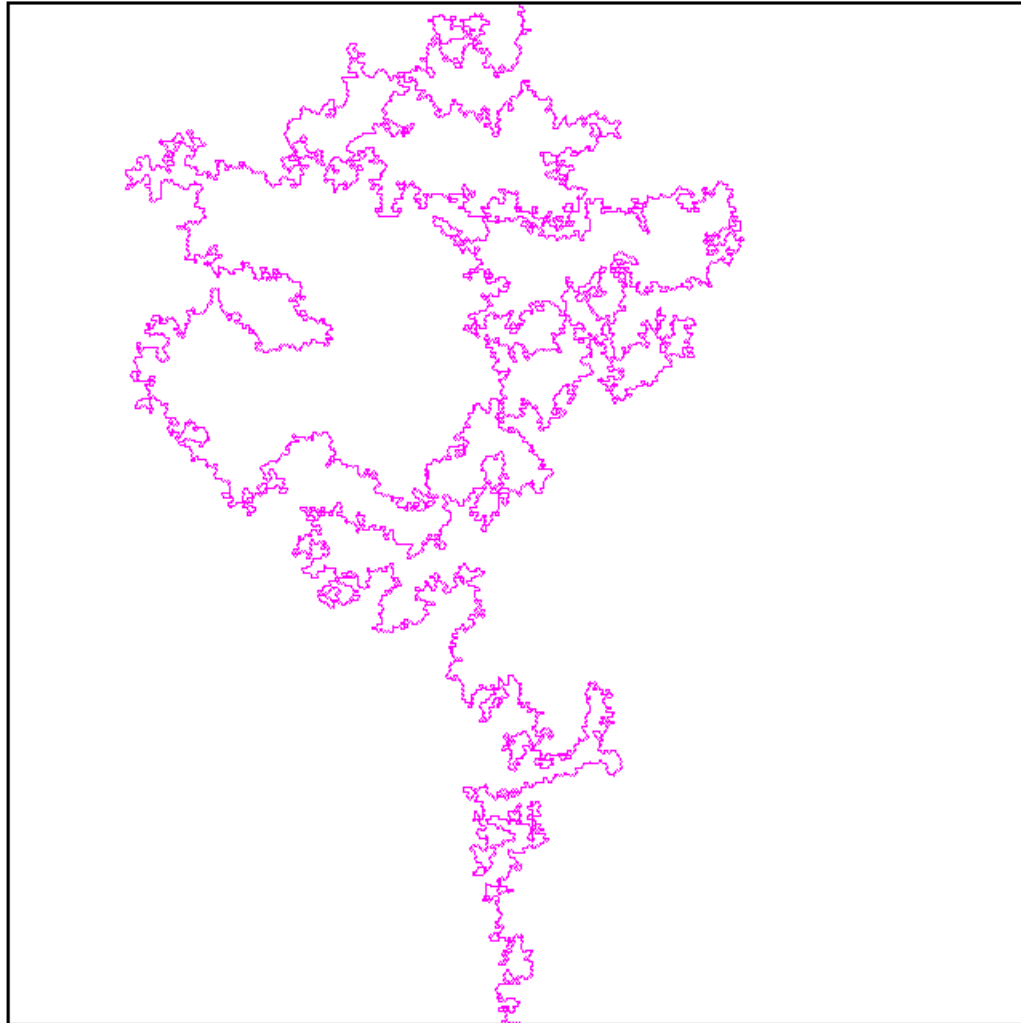
このシミュレーションは次のようになり、フラクタル次元は

$$d=1.50 \pm .01$$

となります。



🗺️ .percolation with harmonic navigator (L=600)

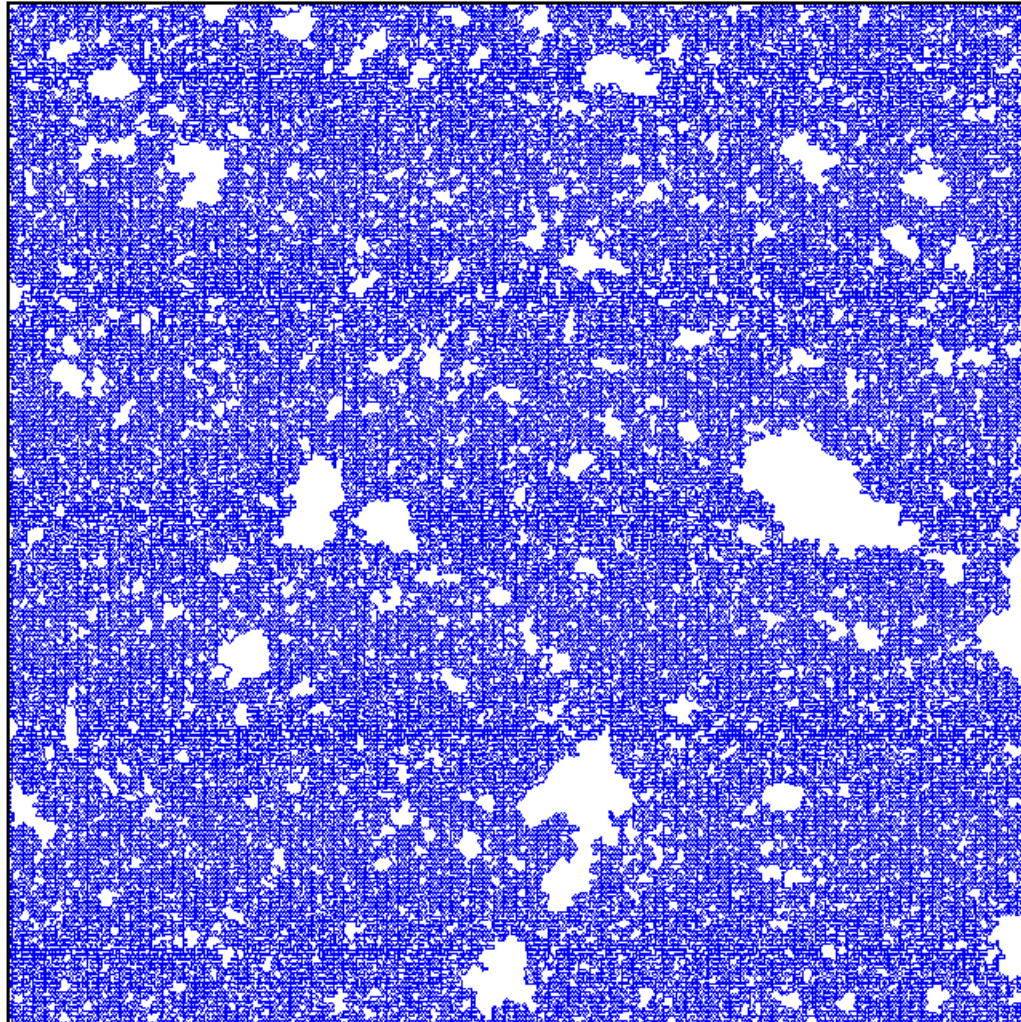


Harmonic anti-navigator

これはharmonic navigatorでの六角形の色塗り方をかえたもので、具体的にはharmonic navigatorの手順 でランダムウォークがぶつかった六角形の色とは逆の色を塗るという方法です。

Harmonic navigatorはその過程により周囲の境界と自分の界面からの斥力を受けて成長するが、Harmonic anti-navigatorはその過程により周囲の境界と自分の界面から引力を受けて成長する為、右図の様に密な図になる。

☒.percolation with harmonic anti-navigator
(L=600)



Percolation navigator

Percolation navigatorでは

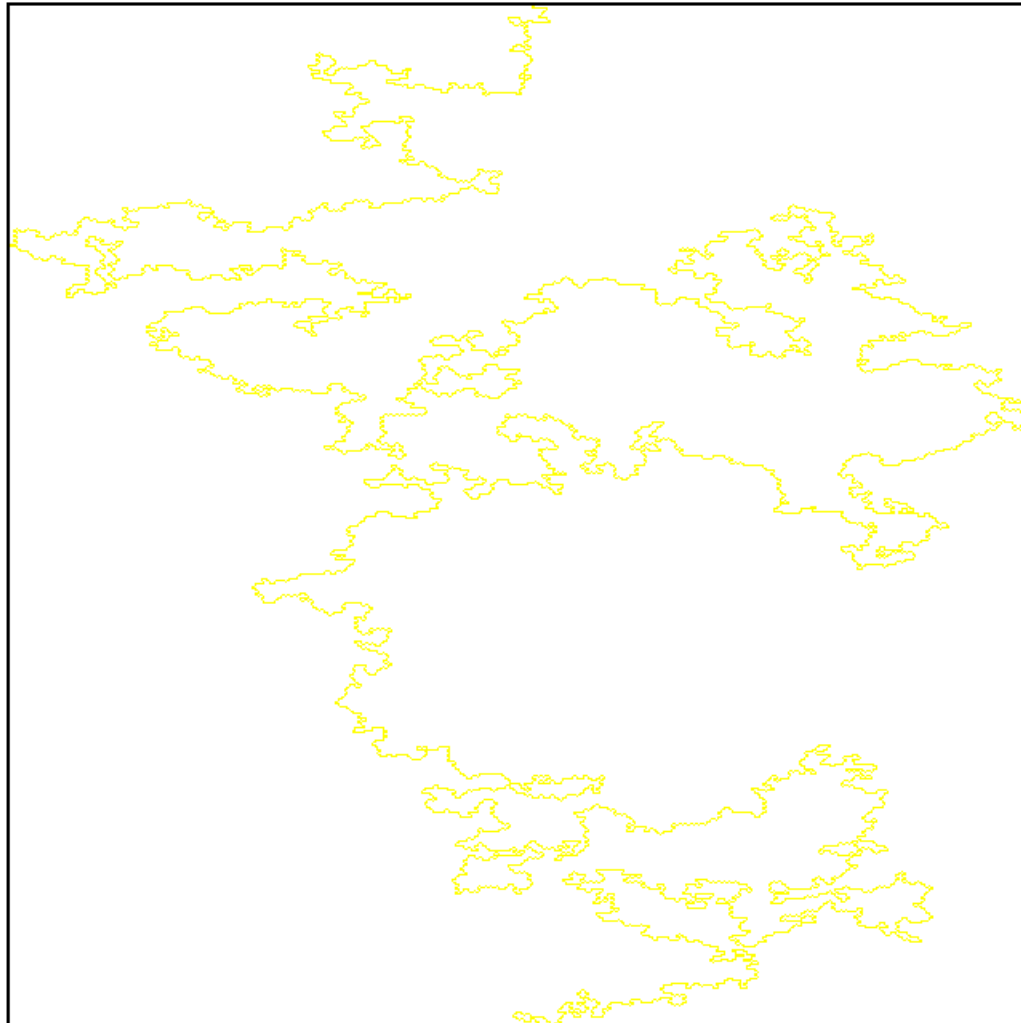
1. まず harmonic navigator のように考えている領域を白と黒で囲みます。
2. 色の塗られていない六角形にぶつかったら、その格子点からパーコレーション (with fair coin) を走らせる。
3. パーコレーションが白か黒にすでに塗られている六角形にぶつかったら、その色を手順 2 でぶつかって塗ろうとしている六角形の色に使う
4. それにより界面はある方向へ成長する。
5. 1 から 4 を繰り返す。

この界面のフラクタル次元は

$$d = 1.42 \pm .01$$

となります。

☒ .percolation with percolation navigator (L=600)



Boundary harmonic navigator

Boundary harmonic navigatorでは、


- 1.まずharmonic navigatorのように考えている領域を白と黒で囲みます。
- 2.色の塗られていない六角形にぶつかったら、その六角形の面から面上を移動するランダムウォークを走らせる。
- 3.ランダムウォークが初期条件として与えられている色の塗られた六角形にぶつかったらその色を塗ろうとしている六角形の色に使う。但し今回はharmonic navigatorとは違い界面の成長過程で色を塗った六角形は色を塗られていないものとして考える。
- 4.それにより界面はある方向へ成長する。
- 5.1から4を繰り返す。

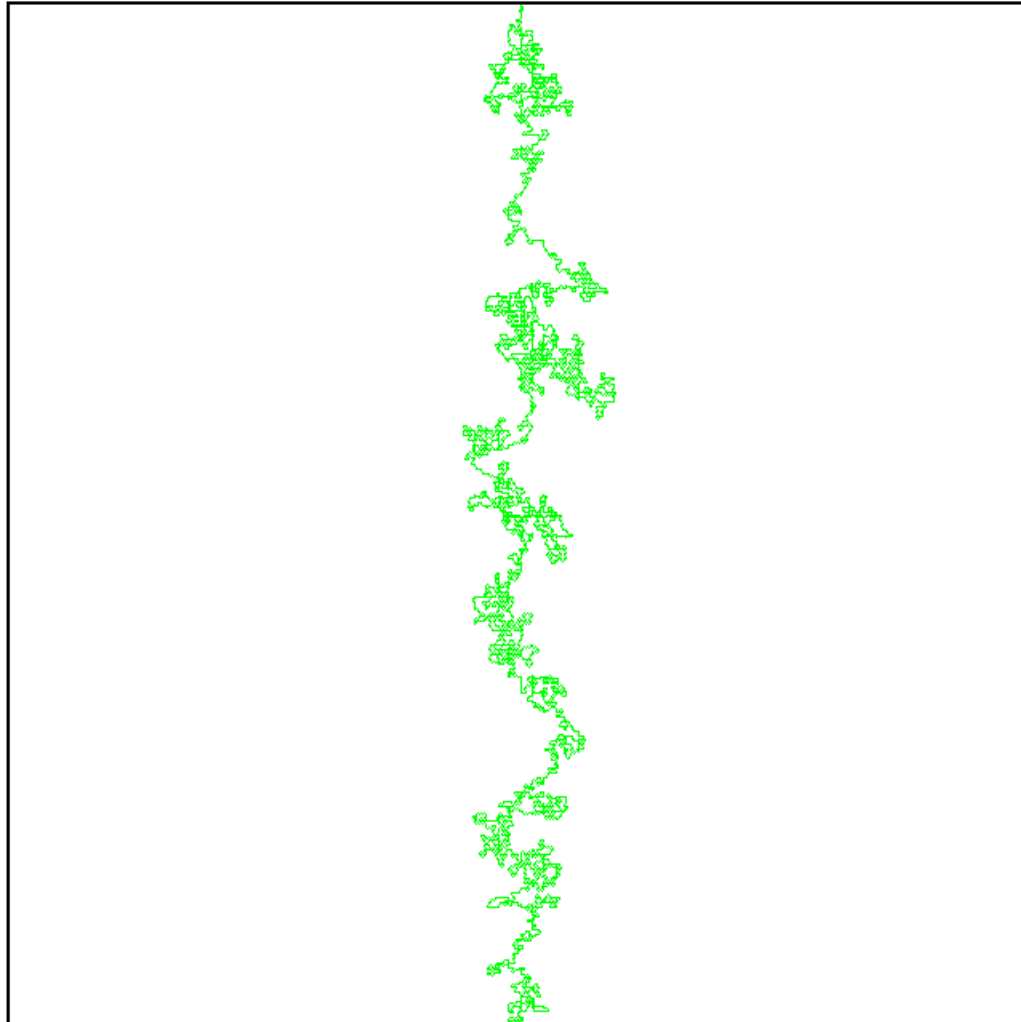
Boundary harmonic navigatorはその過程において初期条件として与えた境界から長距離での斥力を受けているように成長していく。

このシミュレーションは次のようになり、フラクタル次元は

$$d=1.25 \pm .01$$

となります。

 .percolation with boundary harmonic navigator
(L=600)



Loop erased random walk

歩幅1で正方格子上を上下左右等確率で、でたらめに移動するモデルをランダムウォークという。

ここで紹介するloop erased random walkは, random walkerが辿ってきた道筋でloopを作ったとき、そのloopは消し、そこから再びrandom walkをする。この、繰り返しのできるモデルのことである。

このシミュレーションのフラクタル次元は

$$d=1.25 \pm .01$$

となります。

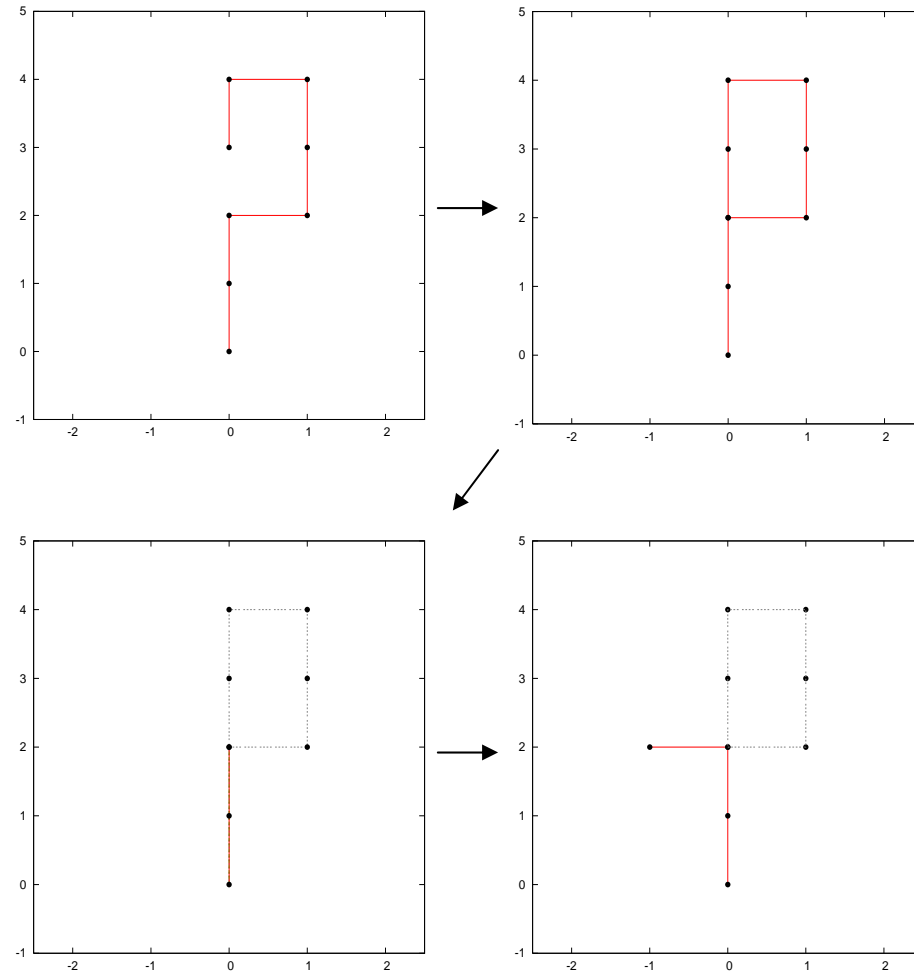
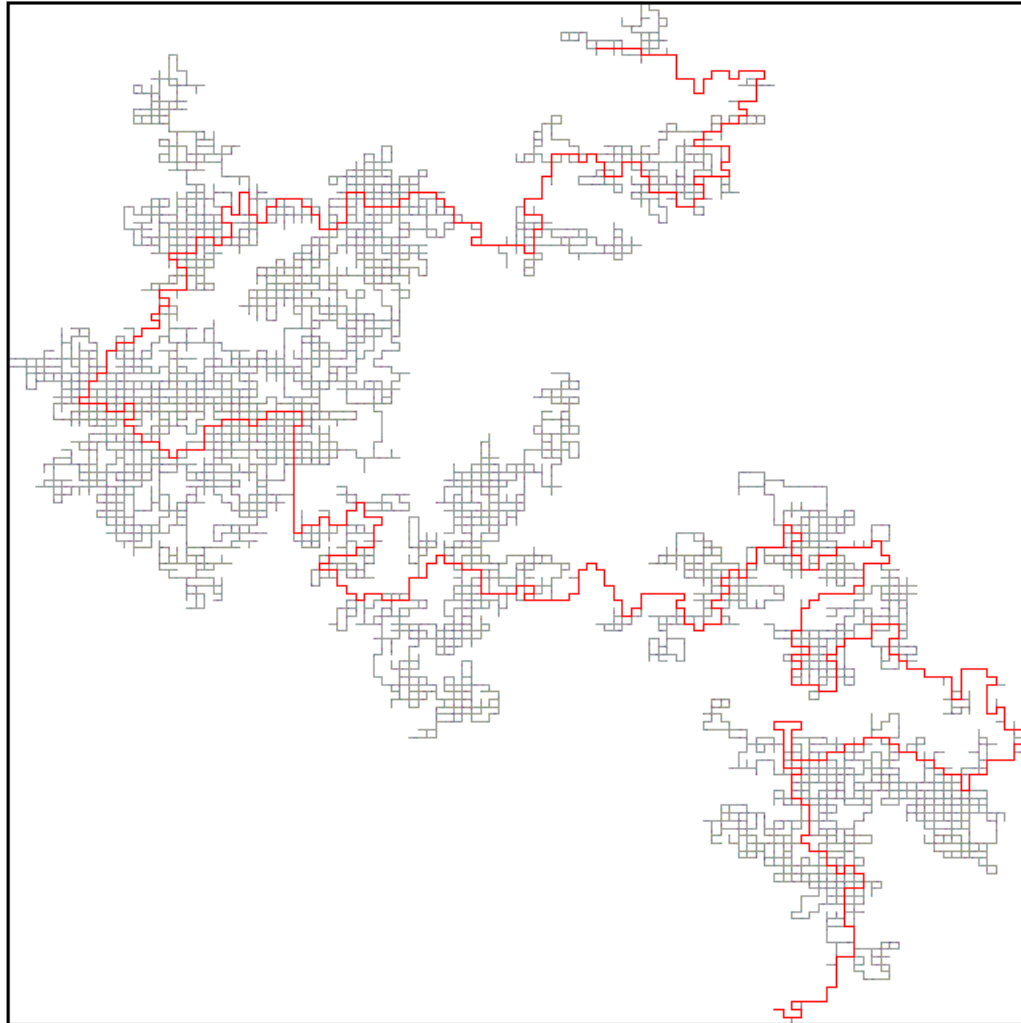


図. Loop erased random walk

(赤 : loop erased random walk)

(黒 : random walk)



Self avoiding walk

self avoiding walk (自己回避ウォーク)は自分自身と交差してはいけないモデルで成長過程として考えるには難しい問題であった。このシミュレーションでは上で挙げた成長していくモデルとは違い、以下の様なアルゴリズムで描いた。

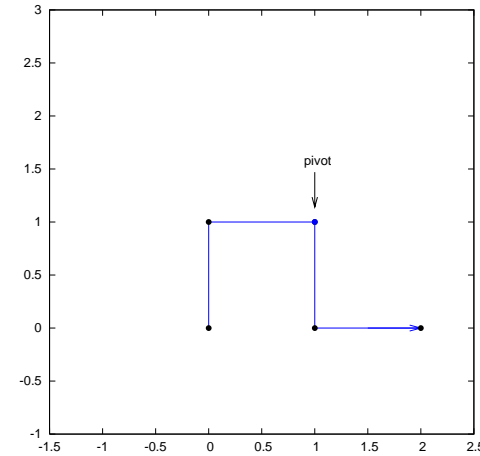
このフラクタル次元は

$$d=1.33 \pm .01$$

となります。

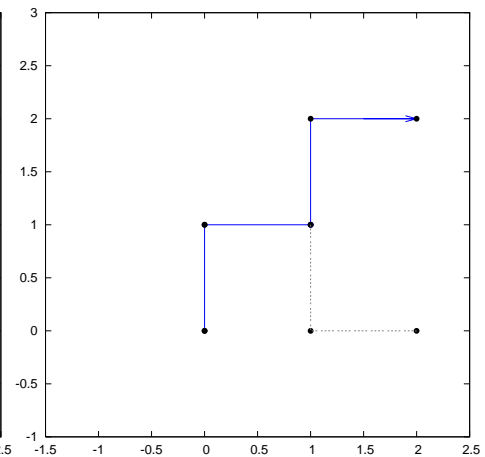
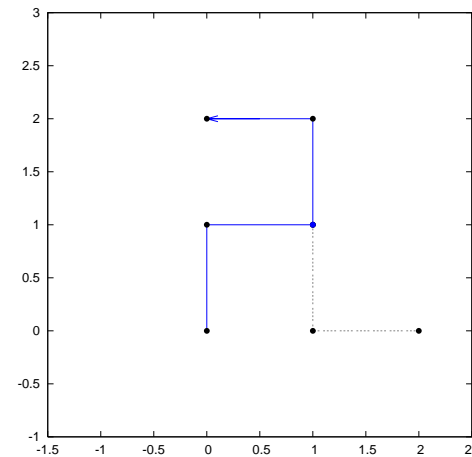
1. walkの長さを決め直線上におき一方の端を固定する
2. Walk上の格子点をランダムに選び
その格子点をpivotと呼ぶことにする
3. pivot 前のwalkはそのままし
pivot 後のwalkに対して次のいずれかの操作を試みる
 - () 回転
 - () 反転
 - ()をするか()をするかはランダムに選ぶ
4. この操作をしてもし交わったら元に戻す。
交わらなかつたらそれを受け入れる。
5. 2から4を繰り返す

例



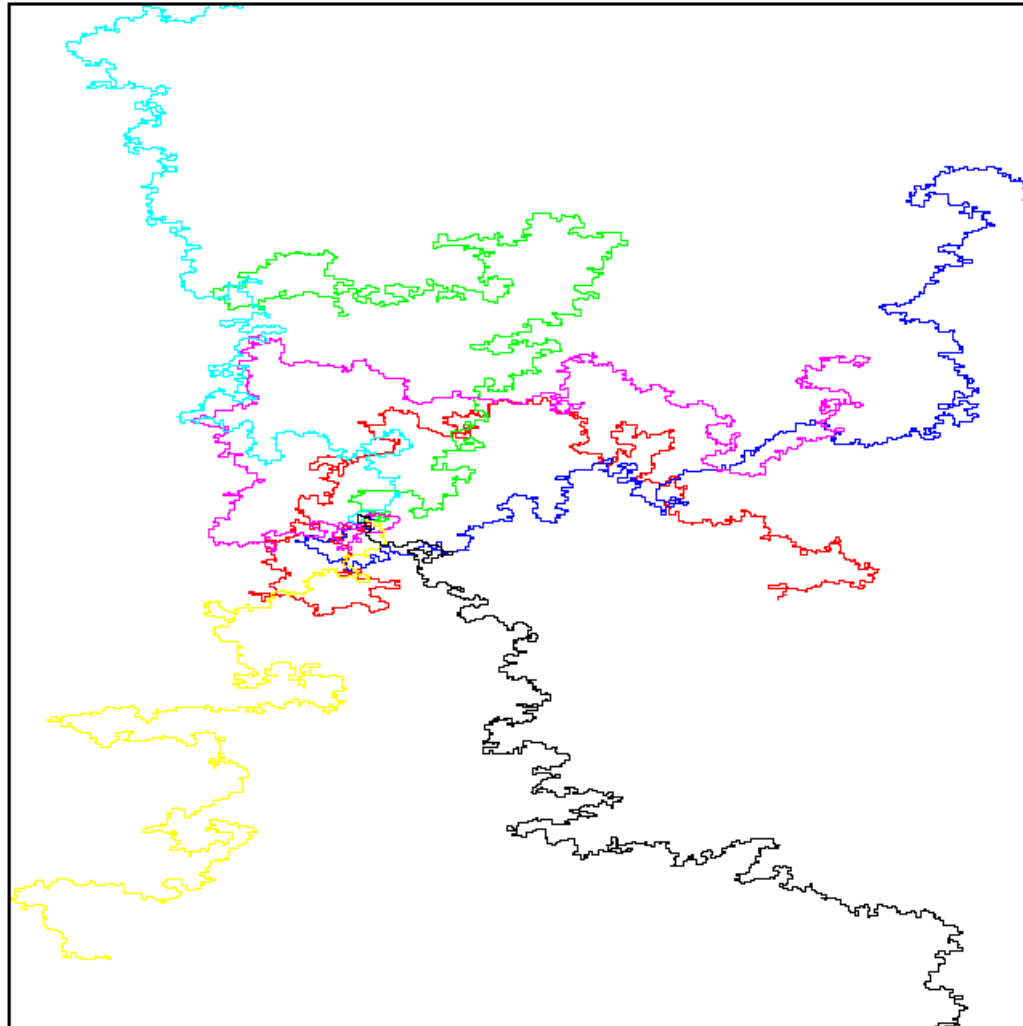
回転

反転

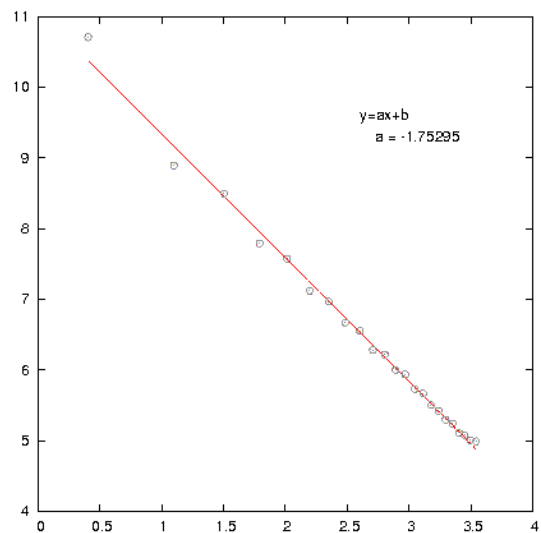


☒.self-avoiding walk

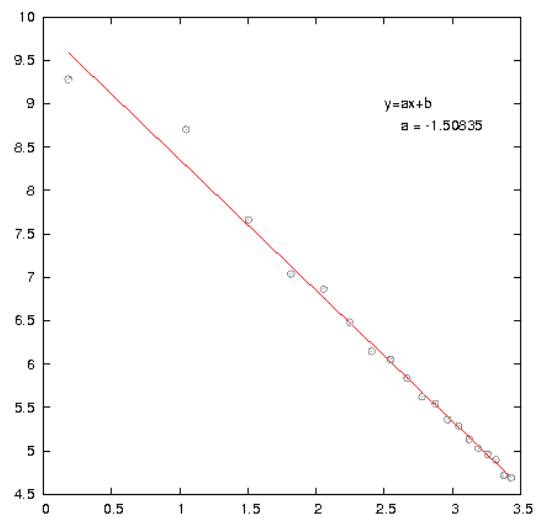
(pivot algorithm)



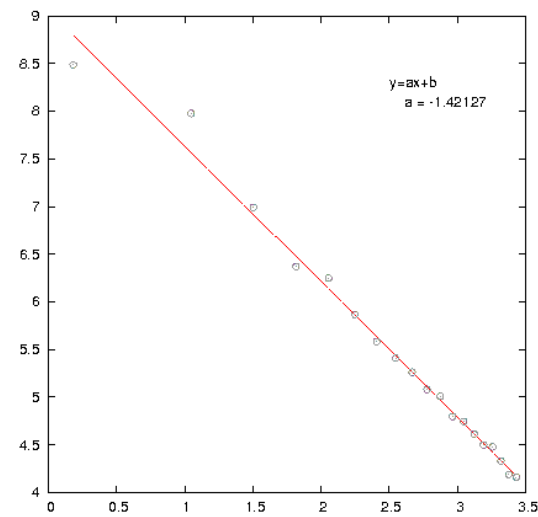
precolation



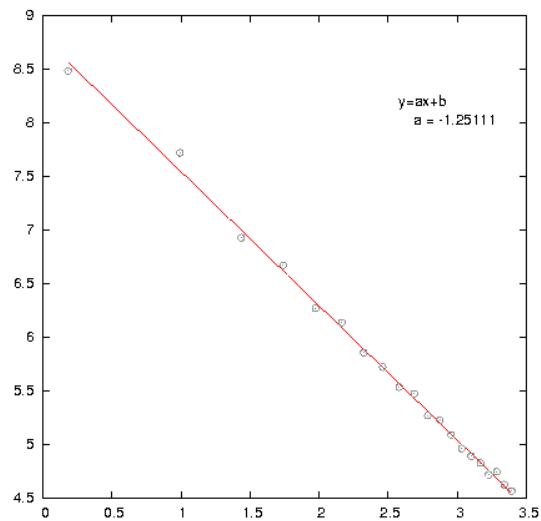
harmonic navigator



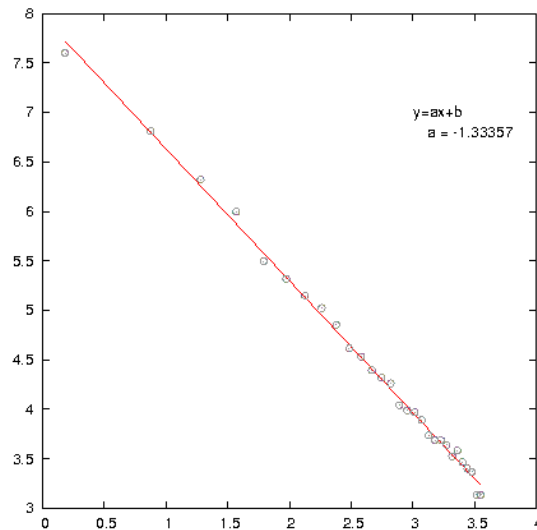
percolation navigator



loop erased random walk



self avoiding walk



フラクタル次元をボックス
カウント法で計算した結果。
各直線の傾きがフラクタル
次元にあたる。