

詳細釣合を満たさない定常分布：コンタクト・プロセスを例にして

香取眞理

〈中央大学理工学部物理学教室 112 東京都文京区春日 1-13-27〉

詳細釣合とは、系のミクロな状態変化が各々その逆の変化と釣り合っていることをいう。single spin flip dynamics に従って確率的に時間発展する格子上的 2 値のスピン系に話を限定すると、詳細釣合を満たす分布は多くの場合 Gibbs 分布で表わされることが保証されている。それでは、スピン系ではあるが詳細釣合を満たさない定常分布というものはないのであろうか。ここでは、接触感染の伝播のモデル（コンタクト・プロセス）を取り上げ、詳細釣合を満たさない定常分布の存在を示す。いろいろな無限粒子系で、このような定常分布の存在が証明されているが、その具体的な形は未だまったく解っていない。

1. はじめに

本稿では詳細釣合を満たさない定常分布について、コンタクト・プロセスと呼ばれる確率過程を例にして解説を試みる。まず、なぜコンタクト・プロセスを扱うのかその背景について説明することから始めよう。

詳細釣合を議論するには、系のミクロな状態あるいはその状態変化としてどのレベルのものを考えるかを指定することが必要である。ここでは問題点をはっきりさせるために、格子上的（狭義の）スピン系を考えることにする。すなわち、各格子点上にはそれぞれ 2 値のスピン変数がのっていて、各遷移はその都度ランダムに選ばれるどこか 1 か所 x でおこる spin flip であるとする (single spin flip dynamics)。この場合、系のミクロな状態とはスピン配置のことである。ただし、スピン配置とは、全ての格子点にわたるスピン値のリストをいう。1 次元系では、各スピン値を 0 か 1 とすると、 $\{\dots, 1, 0, 0, 1, 1, \dots\}$ がその一つの見本である。いま、各格子点 x における spin flip rate は、その時々スピン配置 ξ に依存して $c(x, \xi)$ で与えられるとする。spin flip を繰り返すうちに、いろいろなスピン配置が現れるわけであるが、各スピン配置 ξ の出現確率を $\mu(\xi)$ と書くことにする。 $\mu(\xi)$ はスピン配置の確率分布関数であり、ここでは簡単に分布とよぶことにする。さて、詳細釣合を満たす分布 $\mu(\xi)$ とは、次の関係が各格子点 x ごとに成立するものをいう。

$$c(x, \xi)\mu(\xi) = c(x, \xi^x)\mu(\xi^x). \quad (1.1)$$

ただし、 ξ^x はスピン配置 ξ から格子点 x 上のスピン変数だけをフリップさせて得られるスピン配置を表わす。(1.1) 式は、スピン配置 ξ から ξ^x への遷移（左辺）と、その逆の

遷移（右辺）とが釣り合っていることを表わしている。

上述の（狭義の）スピン系では、分布が詳細釣合を満たすということと可逆であるということとは、実は等価であることが示されている。さらに、spin flip rate $c(x, \xi)$ がいつも正の値をとり、かつこれが高々有限個のスピンの配置にしか依存しないことを仮定すると、詳細釣合を満たす分布は相互作用が有限レンジであるハミルトニアンに対する Gibbs 分布に他ならないことも証明されている。¹⁾ すなわち、この場合には分布は熱平衡分布であることが保証されているのである。

このように、スピン系の詳細釣合を満たす分布についてはたいへん良く知っているのであるが、それでは詳細釣合を満たさない分布についてはどれだけのことが知られているのであろうか。特に、（自明ではない）定常分布は存在するのであろうか。もしも存在するならば、その分布の形はどのようなものなのであろうか。これらの疑問に対して一般的に答えることができたなら、それはプリゴジンらの教科書で「非平衡定常状態」と呼ばれているもの²⁾に対してミクロな立場から明確な定義を与えることになるであろう。しかし現時点では、一般的な解答は得られていない。そこで、まずは各論から…というわけである。

コンタクト・プロセスは、すぐ次節で説明するように $c(x, \xi)$ が x 上とその最近接格子点上のスピン配置のみで決まるごく簡単なスピン系である。しかし、スピン配置 ξ によっては、 $c(x, \xi) > 0$ ではあるが $c(x, \xi^x) = 0$ となるような格子点 x があり得る。このような場合にも詳細釣合の式 (1.1) を課すと、 $\mu(\xi) = 0$ つまりこのスピン配置 ξ の出現確率は零でなければならないことになる。実際、(1.1) が任

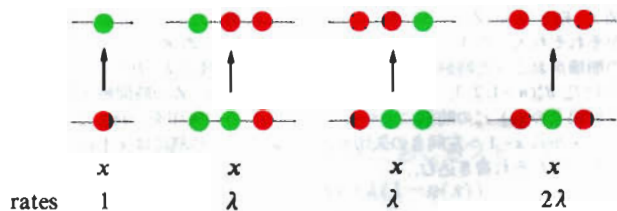


図1 1次元コンタクト・プロセスの遷移則. 赤丸は感染者を、緑丸は非感染者をそれぞれ表わす.

意の格子点 x において成立することを要請すると、許される分布 μ はデルタ関数的なある自明な確率分布に限られてしまうことが分かる. ところが、 $c(x, t)$ に含まれるパラメーターがある臨界値を超えると、この分布以外の非自明な定常分布も存在し得ることが証明できるのである. この分布は詳細約合を満たさず、非可逆ということになる.

それでは、コンタクト・プロセスの説明を始めることにする.

2. コンタクト・プロセスとは

コンタクト・プロセス η_t は格子上的連続時間マルコフ過程である. このプロセスは様々なコンテキストで登場し調べられてきているが、伝染病伝播の簡単な数理モデルと見るのが最も分かりやすいと思う.³⁾ ここでは簡単のため1次元格子 \mathbb{Z} 上の場合を説明する. 各時刻 $t \in [0, \infty)$ で各々の格子点 $x \in \mathbb{Z}$ 上の個体はある伝染病に感染している ($\eta_t(x)=1$) か、感染していない ($\eta_t(x)=0$) かのいずれかの状態であり、以下のような遷移則に従って時間発展するものとする.

- (1) 各感染者は周囲の格子点上の個体の状態には無関係に、ある一定の rate で自然治癒する. この rate を 1 とする.
- (2) 各非感染者は、(2a) その左右の隣接格子点上の個体のうち一方のみが感染しているときには rate λ で、(2b) 左右両隣とも感染しているときにはその倍の rate 2λ で、伝染病に感染する. ただし、(2c) 両隣とも感染していないときには、感染は起こらないとする. 図1では、感染者を赤丸、非感染者を緑丸としてこの伝染病の感染・治癒過程を表わした. 2次元以上の格子上的コンタクト・プロセスでは、上の遷移則 (2) を、非感染者はその最近接格子点上にいる感染者の総数の λ 倍の rate で感染する、とする (最近接格子点上に 1 人も感染者がいなければ、rate 0 つまり感染はない).

コンタクト・プロセスは rate 1 の自然治癒過程と rate λ の接触感染過程とから成っているのであるが、ここでいう rate とは何かをまず説明しておきたい. ちゃんと理解してもらうために以下では、各格子点上にそれぞれ独立に定義

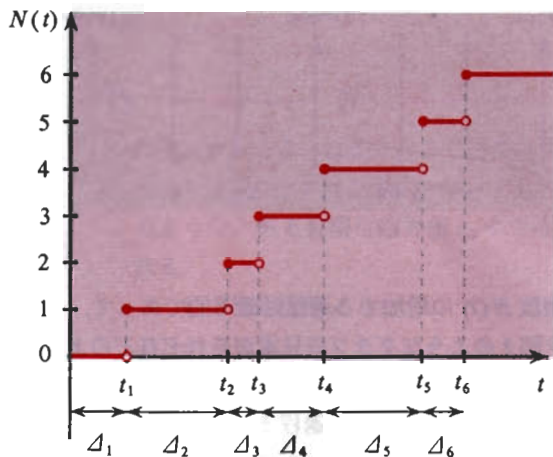


図2 放射性原子核が時刻 $t=0$ に M 個あったとき、時刻 t までに崩壊している数 $N(t)$ を t の関数として描いたもの. 崩壊のおこる ($N(t)$ が増す) 時刻 t_1, t_2, t_3, \dots は偶然に支配され、グラフの形は確率的に決まる. この図はその見本の一つである. 適当な極限において、(2.3) に従うポアソン過程となる.

されたポアソン過程を用いてこのコンタクト・プロセスを構成できることを説明する. これは graphical representation (あるいは percolation substructure) と呼ばれるものである.⁴⁾

まず、ポアソン過程について簡単に説明しておこう. 伝染病とはさしあたり関係ないが、原子核の放射性崩壊を例にとれば像が描きやすい. 放射性の原子核が時刻 $t=0$ に M 個あったとする. 時刻 t までに崩壊している数 N を t の関数として描くと、例えば図2のようになるだろう. 崩壊のおこる ($N(t)$ が増す) 時刻 t_1, t_2, t_3, \dots を arrival time とよぶが、これらは偶然に支配され、間隔 $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ (ただし $t_0=0$ とする) も長かったり短かったりするで、このグラフの形も確率的になる.

時刻 t に n 個が崩壊している確率は

$$P(N(t)=n) = \frac{M!}{n!(M-n)!} [e^{-\alpha t}]^{M-n} [1 - e^{-\alpha t}]^n \quad (2.1)$$

で与えられる. ただし、この核の崩壊定数を α とした; 1 個の核について $e^{-\alpha t}$ は時間 t がたっても崩壊しない確率であり、 $1 - e^{-\alpha t}$ は崩壊してしまった確率である.

いま、この核はごく希にしか崩壊せず ($\alpha t \ll 1$), しかし核の総数が $M \gg 1$ であるため $Ma t \equiv \gamma t$ は 1 の程度であるとすれば

$$P(N(t)=n) \sim \frac{M!}{n!(M-n)!} e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma t}{M} \right)^n \quad (2.2)$$

となり、 $M \rightarrow \infty$ の極限で

$$P(N(t)=n) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t} \quad (2.3)$$

となる. これはパラメーター γt のポアソン分布である.

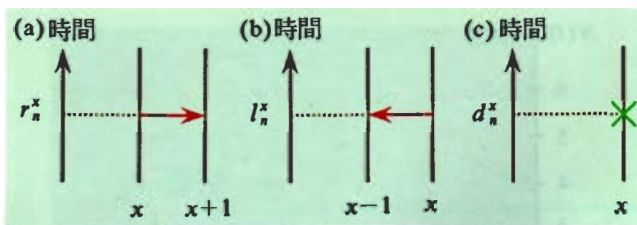


図3 格子点 $x \in \mathbf{Z}$ 上に仮想的に、本文中に説明したような放射性物質がそれぞれ入った3つの容器 R^x, L^x, D^x をおく、容器 R^x の中で n 個目の崩壊がおこった時刻を t_n^x と書くことにする。同様に L^x, D^x に対して、時刻 $t_n^x, d_n^x (n=1, 2, 3, \dots)$ を定義する。各格子点 $x \in \mathbf{Z}$ の時間軸を表わす縦線上の (a) t_n^x の時刻に x から $x+1$ へ右向き矢印を、(b) t_n^x の時刻に x から $x-1$ へ左向き矢印を、また (c) d_n^x の時刻には x 上に \times の記号をそれぞれ書き込む。

崩壊数 $N(t)$ の増加する過程は確率的であって、それを表わす図2のようなグラフの見本がそれぞれどのような確率で実現するか、が(2.3)式によって与えられるのである。これを rate が γ のポアソン過程とよぶ。⁹⁾ 時間 t がたっても核が一つも崩壊しない確率 $P(N(t)=0)$ から、図2の $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ に対して

$$P(\Delta_n > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\gamma t} \quad (2.4)$$

と得られる。

さて、これを使って $\mathbf{Z} \times [0, \infty) \ni (x, t)$ なる時空平面上に、次の要領に従って図3のように矢印や \times の記号を書き込む。各格子点 $x \in \mathbf{Z}$ にそれぞれ仮想的に三つの容器 R^x, L^x, D^x をおく。 R^x と L^x には(2.3)で $\gamma = \lambda$ とした式に従って崩壊する放射性物質を入れ、 D^x には $\gamma = 1$ とした放射性物質を入れておく。そして、各格子点 x ごとに R^x で崩壊がおこったら、そのおこった時刻のところに x から $x+1$ へ右向き矢印を、 L^x で崩壊がおこったらその時刻に x から $x-1$ へ左向き矢印を書き入れる。また、 D^x で崩壊がおこったら、その時刻には x 上に \times の記号を書き込む。このようにポアソン過程に従って書き込まれた記号の配置も確率的である。図4(a)に一つの見本を示した。

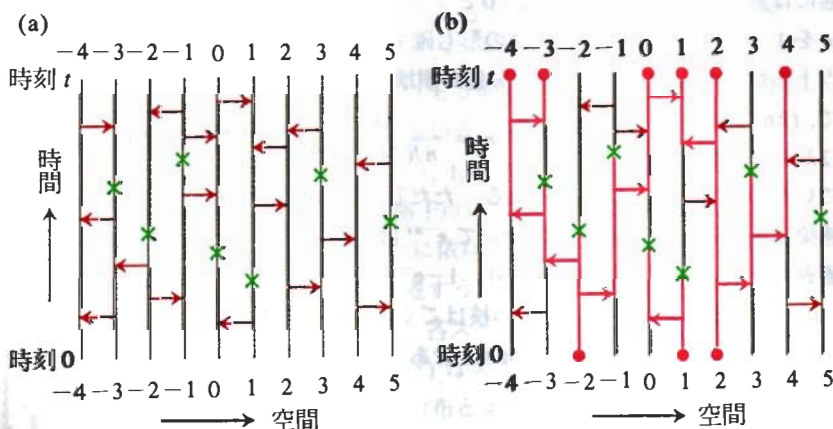


図4 ポアソン過程に基づいて時空平面 $\mathbf{Z} \times [0, \infty)$ 上にコンタクト・プロセスを構成する。(a) ポアソン過程の一つの実現に対して、図3の要領で矢印と \times 印を書き込んだもの。(b) $t=0$ で $\{-2, 1, 2\}$ の格子点上にだけ感染者がいるという初期状態を考える。赤線で表わした感染者の「世界線」は、矢印の所で分枝し \times 印で途絶する。この分枝は最近接格子点上の非感染者への感染を、また途絶は治癒を、それぞれ表わす。この図の場合では、感染過程の結果、時刻 t で $\{-4, -3, 0, 1, 2, 4\}$ の格子点上の合計6人が感染したことになる。このような図1枚1枚がそれぞれ、プロセスの一つ一つの見本を表わす。

それではプロセスはこれを使ってどのように構成されるのであろうか。図4(b)を使って、時刻 $t=0$ で $\{-2, 1, 2\}$ の格子点上の個体だけが感染していたという場合を例にして説明することにする。この3点から、時間軸に沿って下から上に赤線を引いていく。そのとき、(1) 矢印の矢尻の所に来たら、そのまま上に赤線を引くとともに、矢印に沿って隣の格子点へ赤線を分枝させる。それ以降はもとの格子点上と、新たにつながった隣の格子点上の両方において、赤線を上に延ばしていくようにする。赤線が2本以上重なったときにも、それは1本と見なすこととする。(2) ただし、 \times という記号にぶつかったら、そこで赤線は切れてしまうものとする。図4(b)は、このような操作を時刻 t まで続けたものである。赤線は感染者の「世界線」であり、矢印の所での分枝はそこで感染が起こったことを表わし、 \times での途絶は伝染病の治癒を表わす。この図の例では、最初に感染者は3人だけであったのが、上端に対応する時刻 t では6人に増えた場合になっている。もちろん場合によっては途中で赤線がすべて \times に当たってみんな消えてしまうような例も考えられる。これは、感染者が途中ですべて治癒してしまい、時刻 t ではこの伝染病は消滅してしまった事象に対応する。このような図1枚1枚がそれぞれ、プロセスの一つ一つの見本を表わすと考えるのである。

時刻 s に格子点 x を発し、時刻 t に格子点 y にいたる赤線があるとき、 $(x, s) \rightarrow (y, t)$ と書くことにして、格子点の集合 A に対し集合

$$\eta_t^A = \{y: \text{ある格子点 } x \in A \text{ に対して } (x, 0) \rightarrow (y, t)\} \quad (2.5)$$

を定義する。これは、時刻 $t=0$ に感染者の集合 A に始まった伝染が時刻 t にもたらす感染者の全体を表わす。

いま、(2.5)の集合に含まれている格子点 x 上では $\eta_t(x) = 1$ 、それ以外では $\eta_t(x) = 0$ とすると、 $\eta_t = \{\eta_t(x): x \in \mathbf{Z}\}$ は、一つのスピン配置を表わすことになる。こう考えると、集合 η_t^A の時間発展はスピン配置 η_t の時間発展と同一視できる。このスピン配置のプロセスは spin flip ($0 \rightarrow 1$ あるい

は $1 \rightarrow 0$ が次の rate でおこるスピン系である.

$$c(x, \eta) = \eta(x) + \lambda(1 - \eta(x)) \sum_{y: |y-x|=1} \eta(y). \quad (2.6)$$

つまり, 本節の初めに述べたコンタクト・プロセス (図 1) に他ならない. この spin flip rate $c(x, \eta)$ は各 x に対して 3 つのスピン $\{\eta(x-1), \eta(x), \eta(x+1)\}$ のみで決まるのであるが, ここで注目すべきは, ある x が存在して $\eta(x-1) = \eta(x+1) = 0$ となる場合である. この場合でも $\eta(x) = 1$ のときは $c(x, \eta) = 1$ であるが, $\eta(x)$ を spin flip して 0 とすると $c(x, \eta) = 0$ となる. このことから, (1.1) を任意の格子点 x に対して満たす分布 μ は, 全ての格子点 y 上で $\eta_0(y) = 0$ であるようなスピン配置 η_0 に対してのみ 1, それ以外は 0 というデルタ関数的な分布だけであることが帰結されるのである. この分布は結局, 全ての格子点上でスピン値が 0 であるという状態だけが出現することを表すもので, δ_0 と書くことにする: $\delta_0(\eta) = \delta_{\eta, \eta_0}$. (このデルタ関数的分布が (2.6) に対して (1.1) を満たすことは明らかである. これだけしか存在しないことは 6 節で説明する).

3. 臨界値 λ_c .

初期状態として原点 $x=0$ 上の個体だけが感染しているという場合を考えることにする. 時刻 t での感染者が占める格子点の集合は (2.5) の定義より

$$\eta_t^{(0)} = \{x : (0, 0) \rightarrow (x, t)\} \quad (3.1)$$

である. いまある時刻 t で $\eta_t^{(0)} = \emptyset$ (空集合) となったとしよう. すると, コンタクト・プロセスでは自発的な発病はないので, それ以降もずっと $\eta_s^{(0)} \equiv \emptyset (s \geq t)$ である (つまり伝染病は時刻 t で消滅したということ). これに対して $\eta_t^{(0)} \neq \emptyset$ のときには, この時刻 t 以降も感染者が残っていて伝染過程が続く可能性がある. そこで, 時刻 t で感染者が残存している確率 $P(\eta_t^{(0)} \neq \emptyset)$ を考えることにする. 上に述べた考察から, この確率は時間 t について単調非増加関数であることはうなずけるであろう. よって, $t \rightarrow \infty$ の極限が定義できる. これを

$$\sigma(\{0\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\eta_t^{(0)} \neq \emptyset) \quad (3.2)$$

と書くことにする. これは, たった 1 人の感染者から発した伝染過程において $t \rightarrow \infty$ でも感染者が残存する確率である.

前節で説明したように, コンタクト・プロセスの感染率は λ に比例し, かつその周囲の感染者数に比例する.⁶⁾ このことから, $\sigma(\{0\})$ は λ の単調非減少関数であることが証明できる.⁷⁾ 次の二つの節で, $\sigma(\{0\})$ は λ が (正ではあるが) 小さいときは零であり, λ が (有限ではあるが) ある

程度大きいときには正となることを証明する. これらのことより, $\lambda < \lambda_c$ では $\sigma(\{0\}) = 0$, $\lambda > \lambda_c$ では $\sigma(\{0\}) > 0$ となるような, ある有限な臨界値 λ_c が存在することが結論される.

一般の初期状態 A (ただし, ここでは A は有限集合とする) からスタートしたコンタクト・プロセス (2.5) に対しても (3.2) と同様に $t \rightarrow \infty$ での感染者の残存確率 $\sigma(A)$ が定義できる. そして, 二つの異なる初期状態 A と B に対して一般に

$$\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leq \sigma(A) + \sigma(B) \quad (3.3)$$

という submodularity と呼ばれる不等式が成立し, また $A \subset B$ であるときには

$$\sigma(A) \leq \sigma(B) \quad (3.4)$$

であることが証明できる.⁷⁾ 集合 A に対してこの集合に含まれる格子点の数を $|A|$ で表わすことにすると, $1 \leq |A| < \infty$ であるならば

$$\sigma(\{0\}) \leq \sigma(A) \leq |A| \sigma(\{0\}) \quad (3.5)$$

となることが, この二つより導ける. (左の不等式は (3.4) と並進対称性より明らか. 右の不等式は (3.3) を繰り返し用いると得られる.) $\lambda < \lambda_c$ では, λ_c の定義より $\sigma(\{0\}) = 0$ であるので, (3.5) 式より $\sigma(A) = 0$ ということになる. 他方, $\lambda > \lambda_c$ のときには, $\sigma(A) \geq \sigma(\{0\}) > 0$ である. これは, $\lambda < \lambda_c$ のときには, 時刻 $t=0$ での感染者数が有限ならば, 伝染病は有限の時間の内に確率 1 で消滅してしまうが, $\lambda > \lambda_c$ のときには, 時刻 $t=0$ で 1 人以上感染者がいれば, $t \rightarrow \infty$ でも感染者が残存する確率が正である, ということの意味している. この $t \rightarrow \infty$ での振舞いの変化を一種の相転移と考えて, $\lambda < \lambda_c$ を extinction 相, $\lambda > \lambda_c$ を survival 相と呼ぶことにする. $\sigma(\{0\})$ はこの相転移のオーダーパラメータの役割をする. ただし, (5 節を読めば想像されるように) この相転移は, 時間方向に方向付けられた時空平面上的方向付きパーコレーション (oriented percolation あるいは directed percolation) 転移と見なすことができる. そのため, 磁性体のスピンモデルにおける相転移で見られるような対称性の破れは伴わない.

ちょうど臨界値 $\lambda = \lambda_c$ でも $\sigma(\{0\})$ は零であり, この相転移は連続的であるということが, 最近厳密に証明された.⁸⁾ しかしながら λ_c の厳密解を求めることにはまだ誰も成功していない.

4. Extinction について——分枝過程との比較——

この節では, 感染者を粒子, 非感染者を空孔と見なすこ

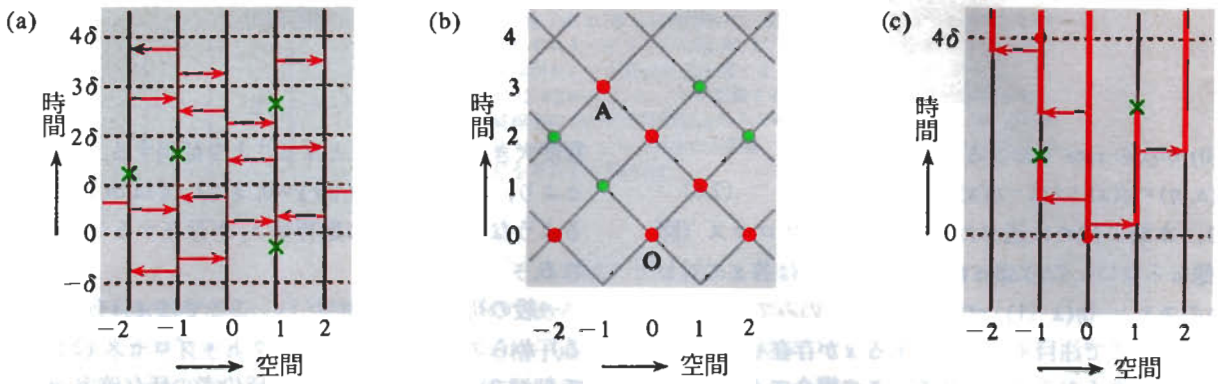


図5 同一のポアソン過程に基づいて定義されたコンタクト・プロセスと方向付きパーコレーションとを比較する。(a)ポアソン過程の arrival time を表わす矢印と×印の配置の一例。(b)時間も離散化して得られた2次元格子 V 。(a)の配置に対応して、赤丸のサイトは open, 緑丸のサイトは closed と定まる。時間方向(縦方向)に方向付けられたサイト・パーコレーションを考える。この場合は、原点 $O: (0, 0)$ はサイト $A: (-1, 3)$ にパーコレートしている。(c) 対応するコンタクト・プロセス。原点から派生する経路を赤線で示した。この場合、原点 $(0, 0)$ から $(-1, 4\delta)$ へ経路が存在する。

とにする。そうすると、感染過程は空孔への粒子生成、治癒は粒子の消滅と見なせて、コンタクト・プロセスは格子気体モデルの一種であることになる。このモデルでは各格子点上には高々1粒子しか存在できない。つまり、すでに粒子が存在している格子点上には、さらに粒子を生むことはできない。これは、粒子生成に対する一つの制限である。この制限を除いて、粒子を同時に幾つでも一つの格子点上に置くことを許すと、プロセスはある種の分枝過程となる。いま、各粒子の消滅率が1、分枝率が 2λ (この rate で左右の最近接格子点のいずれかに一つ粒子を生む) であるような分枝過程を考え、1粒子からスタートしたときの時刻 t での総粒子数を Z_t と書く。平均値 $\langle Z_t \rangle$ は

$$\langle Z_t \rangle = e^{(2\lambda - 1)t} \quad (4.1)$$

で与えられる。他方、同じく1粒子からスタートしたコンタクト・プロセスの時刻 t での総粒子数を $|\eta_t^{(0)}|$ で表わし、その平均値

$$\langle |\eta_t^{(0)}| \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n P(|\eta_t^{(0)}| = n) \quad (4.2)$$

を(4.1)と比べると、分枝過程 Z_t では粒子生成に対する制限がないので、

$$\langle |\eta_t^{(0)}| \rangle \leq \langle Z_t \rangle \quad (4.3)$$

である。ところが、

$$P(\eta_t^{(0)} \neq \emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\eta_t^{(0)}| = n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n P(|\eta_t^{(0)}| = n) \quad (4.4)$$

であるから、 $\lambda < (1/2)$ では

$$\sigma(0) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P(\eta_t^{(0)} \neq \emptyset) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1-2\lambda)t} = 0 \quad (4.5)$$

であることが帰結されることになる。

5. Survival について——方向付きパーコレーションとの比較——

次に λ を十分に大きくすると $\sigma(0) > 0$ となることを示す。⁹⁾ 2節で説明したように1次元コンタクト・プロセス

は $\mathbf{Z} \times [0, \infty)$ の時空平面上的経路(赤線)の集合として表現できる。そのときには時間は連続として考えたのであるが、この節では一種の粗視化を行って時間の方も δ ずつに区切って離散化することにする。こうすると時空平面は $1 \times \delta$ を単位とする正方格子 \mathbf{Z}^2 となるのであるが、ここでは次のように一つおきのサイト¹⁰⁾から成る格子 V を考えることにする。

$$V = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2; m+n = \text{偶数}\}. \quad (5.1)$$

さて、この V 上のサイト (m, n) がつぎの二つの条件を満たしているときには、そのサイトは open であるということにする。(1) 時刻 $(n-1)\delta$ と $(n+1)\delta$ の間には格子点 m の時間軸上に伝染病治癒を表わす×の記号はない。(2) 時刻 $n\delta$ と $(n+1)\delta$ の間に、(感染を表わす) $m-1 \leftarrow m$ の矢印と $m \rightarrow m+1$ の矢印がそれぞれ一つ以上ある。この2条件のうち一方でも満たさないときは、そのサイトは closed であるということにする。この定義より、それぞれのサイトが open か closed かは各々独立である。

一例として、矢印と×の配置が図5(a)のように実現した場合を考えよう。上の定義に従って調べてみると、離散化された V 上では図5(b)に赤丸で示した $(-2, 0), (0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 3)$ というサイトは open であることが分かる。この V 上で、時間の正方向に方向付けられたサイト・パーコレーション問題を考える。原点 $(0, 0)$ はこの場合には $(-1, 3)$ にパーコレートしている(方向付きサイト・パーコレーションについては図6の説明を参照のこと)。ところが他方、同じ図5(a)から構成されるコンタクト・プロセスについて見ると(図5(c))、このとき原点 $(0, 0)$ から $(-1, 4\delta)$ へ経路が存在していることが分かる。つまり、初期に原点に感染者がいれば、時刻 $t=4\delta$ では少なくとも格子点 $x=-1$ 上の個体は感染していることになる。一般に、 V 上のサイトに対する open, closed の定

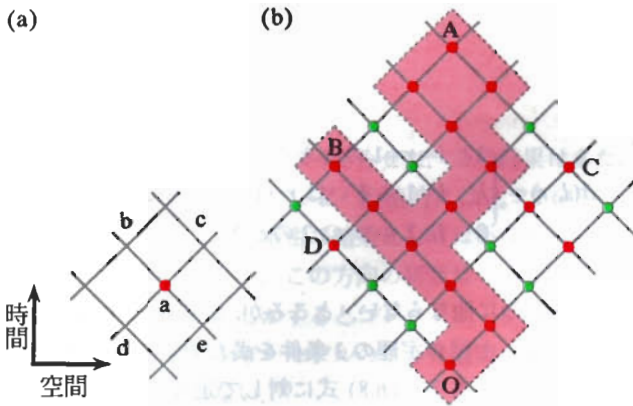


図6 方向付きサイト・パーコレーションの説明. (a) 中心のaのサイトは open であるとする. このとき, 時間座標が1単位だけ大きいサイトbがもしも open ならば, aはbにパーコレートする. サイトcについても同様. しかしながら, サイトdとサイトeへは, たとえそれらが open であろうとも, aからパーコレートできない. 時間方向に逆行するからである. (b) この図のような場合, 原点OはAやBとは方向付きパーコレートしている. しかしOはCやDとは方向付きパーコレートしていない. 破線で囲んだ領域は, 原点Oから方向付きパーコレートしているクラスター C_0 を表わしている.

義より, 次のことはいつも成立することになる. すなわち, 「 V 上で原点が (δ 間隔で離散化された時間座標で) 時刻が t であるサイトと方向付きパーコレートしているときには, 対応するコンタクト・プロセス $\eta_t^{(0)}$ において時刻 $(t+1)\delta$ で必ずどこかの個体が感染している」.

そこで V 上で原点から方向付きパーコレートしたサイトの集合 C_0 (パーコレーション・クラスター) が無限大になる確率 $P(|C_0| = \infty)$ が問題になるのである. もしもこの確率が正ならば, 対応するコンタクト・プロセスの $\sigma(\{0\})$ も正であることになるからである.

V 上のサイトが open か closed かは矢印や×の記号の配置の仕方によって定義されたが, これらは2節で説明したポアソン過程によって決まる. よって open である確率は(2.4)を応用して次のように簡単に求められるのである.

$$P([0, 2\delta] \text{ の間に } \times \text{ がいない}) = e^{-2\delta}, \quad (5.2)$$

$$P([0, \delta] \text{ の間に } m-1 \leftarrow m \text{ の矢印がある}) = 1 - e^{-\lambda\delta}, \quad (5.3)$$

$$P([0, \delta] \text{ の間に } m \rightarrow m+1 \text{ の矢印がある}) = 1 - e^{-\lambda\delta}. \quad (5.4)$$

よって

$$P(\text{open}) = e^{-2\delta}(1 - e^{-\lambda\delta})^2. \quad (5.5)$$

2次元格子 V 上の方向付きパーコレーションの臨界値を p_c とすると, これは $p_c \approx 0.7058$ と評価されている.¹¹⁾ 厳密解はないが, $p_c \leq (80/81)$ であることは容易に証明できる.¹²⁾ いずれにせよ, (5.5)式で δ を適当に小さくとり, λ を十分大きくすれば $P(\text{open}) > p_c$ とできるということは正しい (例えば, $\delta = 1/200$ として $\lambda > 1344$ とすれば, $P(\text{open}) > (80/81)$ となる). つまり λ を十分に大きくすれば, $\sigma(\{0\}) \geq P(|C_0| = \infty) > 0$ となることが保証されたことになる.

6. 詳細釣合を満たさない定常分布

コンタクト・プロセスには有限な臨界値 λ_c があって λ

$\leq \lambda_c$ では extinction, $\lambda > \lambda_c$ では survival ということを示した. ここで survival というのは, 必ず感染者が残存するというのではなく, $t \rightarrow \infty$ でも残存確率 $\sigma(A)$ が正であるという意味であった. ところが, コンタクト・プロセスはマルコフ過程であり, $t \rightarrow \infty$ の状態というのは定常状態ということである. $\lambda \leq \lambda_c$ のとき extinction であるというのは, 伝染病が消滅した自明な定常状態におちこんだことができる. この定常状態は, 感染者が1人もいないという一つの状態にピークを持つデルタ関数的な分布にあると見なせる. 2節の終わりに述べたように, この定常分布を δ_0 と書くことにする. それでは, $\lambda > \lambda_c$ の定常分布とはどのようなものであろうか. これは一般に $\gamma \in [0, 1]$ として

$$\gamma\delta_0 + (1-\gamma)\nu_\lambda \quad (6.1)$$

というように, 自明な δ_0 とこれとは別の定常分布 ν_λ とで表わされることが証明されている.^{7,8)} ここで現れた ν_λ は正確には, 時刻 $t=0$ ですべての格子点の上の個体が感染した状態 (δ_1 なる分布) からスタートしたときに $t \rightarrow \infty$ で収束する定常分布のことであり, 感染者が非感染者と共存しつつ定常となっている状態である. それではこの ν_λ とはいかなる確率分布なのであろうか. この分布は定常ではあるが詳細釣合を満たさないものなのである. このことを, 以下に説明しよう.

話を広げて, (single spin flip dynamics に従う2値の) 1次元スピン系一般を考えることにする. このようなスピン系は, 各点における spin flip rate $c(x, \xi)$ がその時々々のスピン配置 ξ にどのように依存するかを指定すれば定まる. スピン配置 ξ_0 を初期状態として時間発展するスピン系の時刻 t でのスピン配置を ξ_t と書くことにする. スピン系は確率過程なので ξ_t は一意的には決まらないが, その確率分布は定まる. その時刻 t での分布を $\mu_t(\xi)$ と書くことにする. さらに, 物理量 $f(\xi)$ の分布 $\mu_t(\xi)$ における平均値 $\sum_{\xi} f(\xi)\mu_t(\xi)$ を $\langle f(\xi) \rangle_{\mu_t(\xi)}$ と記すことにすると, この時間発展は次の微分方程式で与えられる.¹³⁾

$$\frac{d}{dt} \langle f(\xi) \rangle_{\mu_t(\xi)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \langle c(x, \xi) [f(\xi^x) - f(\xi)] \rangle_{\mu_t(\xi)}. \quad (6.2)$$

ゆえに, 定常分布 $\mu(\xi)$ は

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \langle c(x, \xi) [f(\xi^x) - f(\xi)] \rangle_{\mu(\xi)} = 0 \quad (6.3)$$

が, 任意の物理量 $f(\xi)$ に対して成り立つ確率分布である

ということになる。ここで注意すべきなのは、(6.3)式は格子点上の関連するすべての spin flip が全体として釣り合っていることを意味しているということである。これに対して、詳細釣合とは各格子点 $x \in \mathbb{Z}$ ごとに各々

$$\langle c(x, \xi) [f(\xi^*) - f(\xi)] \rangle_{\mu(\xi)} = 0 \quad (6.4)$$

が、任意の物理量 $f(\xi)$ に対して成り立つことをいう。 $f(\xi)$ として、ある特定のスピンの配置に対してのみ 1、それ以外は 0 となるようなものも考えることもできるので、(6.4) が任意の物理量 $f(\xi)$ に対して成立するというのは、(1.1) が任意のスピンの配置 ξ に対して成立するというのと等しいことになる。以上の考察から、「詳細釣合を満たす分布は定常である」ということは当然であるが、その逆は必ずしも真ではないことは明らかである。

さて、少し一般性を失うが、 $c(x, \xi)$ が次の形で与えられる伝染過程のモデルを考える。

$$c(x, \xi) = \begin{cases} \beta(l_x(\xi), r_x(\xi)) & \xi(x) = 0 \text{ のとき} \\ 1 & \xi(x) = 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.5)$$

ただし、 $l_x(\xi)$ ($r_x(\xi)$) は配置 ξ において格子点 x とその左側 (右側) にいる最も近い感染者との距離を表わす (x の左側 (右側) に感染者がないときには $l_x(\xi) = \infty$ ($r_x(\xi) = \infty$) とする)。すなわち、感染率はその左右の最近接感染者 (最近接格子点上とは限らない) との距離のみで決まるとした、空気伝染も考慮したプロセスである。これは Nearest-Particle Systems (NPS) と呼ばれる。 $\beta(l, r)$ は非負の有限な値をとり、 $\beta(l, r) = \beta(r, l)$ また $\beta(\infty, \infty) = 0$ とする。

このようなスピン系のクラスに対して、次の定理が知られている。

定理

$n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ に対して、いつも正の値をとる関数 $\beta(n)$ で、次の三つの条件を満たすようなものがあるときに限って、NPS は δ_0 以外の詳細釣合を満たす定常分布を持つ。

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(n) < \infty$,
- (2) $1 \leq l, r < \infty$ なる任意の l, r に対して

$$\beta(l, r) = \frac{\beta(l)\beta(r)}{\beta(l+r)} \quad (6.6)$$

- (3) $1 \leq l < \infty$ なる任意の l に対して

$$\beta(l, \infty) = \beta(l) \quad (6.7)$$

さらに、このときの定常分布の形も関数 $\beta(n)$ によって決まってしまう。¹⁴⁾

さて問題の 1 次元コンタクト・プロセスであるが、この spin flip rate (2.6) は (6.5) で

$$\beta(l, r) = \begin{cases} 2\lambda & l=r=1 \text{ のとき} \\ \lambda & l=1 \text{ あるいは } r=1 \text{ で } l+r > 2 \text{ のとき} \\ 0 & l \geq 2 \text{ かつ } r \geq 2 \text{ のとき} \end{cases} \quad (6.8)$$

としたものに他ならない。ところが、このような $\beta(l, r)$ に対しては、上記の定理の 3 条件を満たすような $\beta(n)$ は存在しないのである: (6.8) 式に対して定理の条件 (3) を課すと $\beta(1) = \lambda$ かつ $n \geq 2$ に対しては $\beta(n) = 0$ と定まるが、これらを条件 (2) の (6.6) 式に代入すると $\beta(1, 1)$ は発散してしまう。これは (6.8) 式の $\beta(1, 1) = 2\lambda$ と矛盾する。つまり、コンタクト・プロセスは δ_0 以外には詳細釣合を満たす定常分布を持たないことになる。

しかしながら前節で証明したように、コンタクト・プロセスは $\lambda > \lambda_c$ のときには δ_0 以外の定常分布を持つ。よって、この分布は詳細釣合を満たさないものであるということが結論されるのである。

7. おわりに

d 次元のコンタクト・プロセスにおける相転移は、 $d+1$ 次元の方向付きパーコレーション転移と似たものであることは、5 節の説明を読むと予想されるであろう。実際、繰り込み群の方法¹⁵⁾や計算機シミュレーションなどによって、この二つは同じユニバーサリティ・クラスに属することが示されている。各次元におけるいろいろな臨界指数の値もかなりの精度で評価されており、その臨界現象に関する研究は物理の分野ではすでに一段落ついているともいえる。

しかし、相転移の結果現れる非自明な定常分布 ν_λ が具体的にはどのようなものかについては、未だまったく解っていないというのも正しいところである。詳細釣合を満たさない定常状態の確率分布はどのような形で与えられるのかという問題は、基礎的な問題として依然残っている。

数学の確率論の分野では、コンタクト・プロセスの問題は 1974 年の Harris の論文³⁾以来、詳しく研究されている。その中で著者が面白いと思うものに、1978 年の Holley と Liggett の議論がある。¹⁶⁾ これは、 $\beta(n)$ という関数をうまく選んで、これから前節の定理の 3 条件を満たすように定められた $\beta(l, r)$ を感染率を持つ NPS の定常分布を構成し、これでもって ν_λ を近似するという試みである。コンタクト・プロセスという最近接相互作用しか持たないプロセスの (詳細釣合を満たさない) 定常分布を、長距離相互作用を持つプロセスの (詳細釣合を満たす) 分布で近似するというのである。彼らは、 $\lambda \geq 2$ のときに、 ν_λ を下からおさ

える近似的な分布を巧妙に作ってみせた。この結果はまた、 $\lambda_c \leq 2$ を証明したことにもなる。数値的には $\lambda_c \approx 1.649$ と評価されているので、¹⁷⁾ 厳密な結果としてはかなり良い上限になっている。しかし、この方向の研究はその後ほとんど進んでいない。¹⁸⁾ もしかするとコンタクト・プロセスの問題は、3次元イジング・モデルのように難問として残ってしまうのかもしれない。¹⁹⁾

最後に、関連した話題をいくつか挙げてこの小論を終えることにしたい。コンタクト・プロセスは $\eta_i(x) \in \{0, 1\}$ の2値のプロセスであるが、3値以上のプロセスに拡張したらどうなるであろうか。免疫の効果も考慮した伝染病のモデル²⁰⁾や、生態系のモデル、^{21, 22)} あるいは触媒表面の化学反応系に対する数理モデル²³⁾として、各格子点が3値以上の値をとるプロセスが最近いろいろ提案されている。これらは計算機シミュレーションなどによって精力的に調べられており、コンタクト・プロセスのような2値のプロセスには見られなかったような新しい現象も報告されている。しかしながら、3値以上の値をとるプロセスに対しては、系統的な解析方法はまだ確立していない。厳密な結果が個別の問題ごとにいくつか得られ始めているという段階である。²⁴⁾

また2値のプロセスにおいても、複数の粒子が相互作用した結果粒子消滅が起こる、といった attractive ではない遷移則(注6参照)を持つプロセスに対しては、厳密に示されている結果は少ない。これらのプロセスでは、attractive な場合に証明された種々の単調性が保証されなくなるからである。²⁵⁾ それにも関わらず、臨界現象は attractive な場合と同じユニバーサリティ・クラスに属するというシミュレーションの結果が出されており、²⁶⁾ 今後の研究が待たれる。

別の課題として、ここで取り上げたコンタクト・プロセスのような接触感染過程で、さらに各個体が移動する(与えられた rate でホッピングする)場合にはどうなるかという問題がある。特に、適当なスケールング極限をとりホッピングの rate を無限大にすると、系は偏微分方程式で記述されるようになる。確率論の分野で、この方向の研究の進展が予想される。

この解説を書くにあたり、共同研究者の室蘭工大共通群数理科学系の今野紀雄氏に多くの助言をいただいた。また、中大理工物理の松下貢氏は原稿を丁寧に読んで下さった。ここに謝意を表する。

注及び参考文献

- 1) スピン系も含めた格子上の粒子系の確率過程に対する確率論的なアプローチと厳密な結果が次の教科書に詳しく書かれている、T.M. Liggett: *Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, New York, 1985). ここで述べたことは、この Chapter IV に Proposition 2.7, Theorem 2.13 及び Theorem 2.14 として与えられている。
- 2) G. ニコリス・I. プリゴジン著、安孫子誠也・北原和夫訳: 複雑性の探求(みすず書房, 1993).
- 3) 次のモデルはいずれもコンタクト・プロセスと等価か、ほとんど等しいものである。a) 自触媒化学反応系に対する F. Schlögl の第1モデル(Z. Phys. 253 (1972) 147-161)の格子モデル版(P. Grassberger and A. de la Torre: Ann. Phys. 122 (1979) 373-396). b) 高エネルギー物理の分野で研究された Reggeon field theory の格子モデル版である Reggeon quantum spin model (R.C. Brower, et al.: Phys. Lett. 76B (1978) 213-219). c) N. Goldenfeld の結晶成長のモデル(J. Phys. A 17 (1984) 2807-2821).
確率論の分野では、コンタクト・プロセスは T. E. Harris (Ann. Probab. 2 (1974) 969-988) によって、相互作用する無限自由度の確率過程として導入され研究が始められた。
- 4) D. Griffeath: *Additive and Cancellative Interacting Particle Systems*, (Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 724, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979). R. Durrett: *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation* (Wadsworth Publishing, California, 1988).
- 5) 例えば G.R. Grimmett and D.R. Stirzaker: *Probability and Random Processes*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford, 1992).
- 6) 周囲の感染者が多いほど感染率が大きくなり、逆に周囲に非感染者が多いほど治癒率が大きくなるような遷移則は、attractive であると言われる。磁性体のスピンモデルの言葉で言えば、ferromagnetic であるということ。
- 7) ここで述べたようなことは文献1の Chapter VI に詳しく書かれている。
- 8) C. Bezuidenhout and G. Grimmett: Ann. Probab. 18 (1990) 1462-1482.
- 9) この節の議論は、文献4の Durrett の教科書の Chapter 5 による。
- 10) もととの空間 \mathbb{Z} 上の格子点と區別して、時空平面を離散化した \mathbb{Z}^2 あるいは \mathbb{V} 上の格子点をここでは便宜上サイトと呼ぶことにする。
- 11) W. Kinzel and J.M. Yeomans: J. Phys. A 14 (1981) L163-L168.
- 12) Durrett の教科書にあるように contour 法 (Peierls's argument のこと) による。なお、パーコレーションを数学的に解析する方法については、次の教科書に丁寧な説明がある。樋口保成: パーコレーション—ちょっと変わった確率論入門(遊星社, 1992).
- 13) 文献1の Chapter I を参照。
- 14) この定理は文献1の Chapter VII に Theorem 1.2, Theorem 4.2, Theorem 4.7 として与えられている。定常分布は、感染者数が有限である NPS においては、 $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ($n \geq 2$) に対して、 $\mu(\xi) = \prod_{i=1}^{n-1} \beta(x_{i+1} - x_i)$ と定まる。このような分布は renewal measure と呼ばれる。感染者数が無限である場合も同様に定まる。
- 15) J.L. Cardy and R.L. Sugar: J. Phys. A 13 (1980) L423-L427.
- 16) R. Holley and T.M. Liggett: Ann. Probab. 6 (1978) 198-206 及び参考文献1の Liggett の教科書の pp. 268-275 を参照。
- 17) R.C. Brower, M.A. Furman and M. Moshe: Phys. Lett. 76B (1978) 213-219. R. Dickman: J. Stat. Phys. 55 (1989) 997-1026. N. Konno and M. Katori: J. Phys. Soc. Jpn. 59 (1990) 1581-1592.
- 18) ここで扱ったプロセスは正確には basic contact process と呼ばれる。Holley-Liggett の議論はこれを含むいくつかのコンタクト・プロセスのクラスに対して拡張できることが最近分かってきた。T.M. Liggett: *Spatial Stochastic Processes*, ed. K.S. Alexander and J.C. Watkins (Birkhäuser, Boston, 1991) pp. 105-140. T.M. Liggett: *Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems*, ed. R. Durrett and

- H. Kesten (Birkhäuser, Boston, 1991) pp. 339-358. M. Katori and N. Konno: J. Phys. A (印刷中).
- しかし、basic contact processの λ_c に対して2より小さい上限を与えるという試みは成功していない。香取眞理、今野紀雄: 統計数理 **38** (1990) 243-256を参照のこと。
- 19) 文献8で挙げた論文の結果(これは1989年に出された)までを含めた、コンタクト・プロセスに対するレビューとして、R. Durrett: *The Contact Process, 1974-1989, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 27*, ed. W. Kohler and B.S. White (American Mathematical Society, 1991) pp. 1-18がある。これに対してL. Grayは、「これは死亡記事か? コンタクト・プロセスの寿命は15才ではまだ尽きてはいないだろう」と、*Is the Contact Process Dead?* (同pp. 19-29)という論文でいくつかの基本的な問題提起をしている。(なお文献8のBezuidenhout and Grimmettの論文のタイトルは“The Critical Contact Process Dies Out”であった。)
- 20) T. Ohtsuki and T. Keyes: Phys. Rev. A **33** (1986) 1223-1232.
- 21) K. Tainaka: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 2588-2590; Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2688-2691; J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 4257-4258. K. Tainaka and S. Fukazawa: *ibid.* **61** (1992) 1891-1894.
- 22) H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki and K. Satō: Prog. Theor. Phys. **88** (1992) 1035-1049. 佐藤一憲: 生物物理 **31** No. 4 (1991) 32-35.
- 23) R.M. Ziff, E. Gulari and Y. Barshad: Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2553-2556. D. Considine, H. Takayasu and S. Redner: J. Phys. A **23** (1990) L1181-L1186.
- 24) M. Bramson and D. Griffeath: Ann. Probab. **17** (1989) 26-45. E.R. Grannan and G. Swindle: J. Stat. Phys. **61** (1990) 1085-1103. R. Durrett and G. Swindle: Stoch. Proc. Appl. **37** (1991) 19-31. R. Durrett and C. Neuhauser: Ann. Appl. Prob. **1** (1991) 189-206. C. Neuhauser: Probab. Theory Relat. Fields **91** (1992) 467-506.
- 25) M. Bramson and L. Gray: Z. Wahrsch. verw. Gebiete **68** (1985) 447-460. M. Katori and N. Konno: Physica A **186** (1992) 578-590. M. Katori and N. Konno: *Formation, Dynamics and Statistics of Patterns, Vol. 2*, ed. K. Kawasaki and M. Suzuki (World Scientific, Singapore, 1993) pp. 23-72.
- 26) H. Takayasu and A. Yu. Tretyakov: Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 3060-3063. I. Jensen: Phys. Rev. E **1** (1993) R1-R4.

物理教育 第41巻 第4号 (1993) 目次

特別企画

理科教育の危機をめぐる経団連事務局と懇談

.....篠原俊光, 岩崎一雄, 滝川洋二, 唐木 宏

特集 I 物理 IB「探求活動」をどのように捉えるか

生徒実験から探求へ.....井田屋文夫

「科学の方法」と「探求の科学」.....笠 耐

中学における探求の過程の実践.....高橋哲郎

実験の授業「考えるための時間に」.....川角 博

特集 II 東北支部特集

自作の気圧計と温度計による混合後の気体の圧力測定

.....吉野 弘

モデル化の落とし穴.....須藤 鑑

物理における原理・原則と立式スタイルの関係.....斉藤浩樹

誤差を考えさせよう.....阪路 裕

物理教師は悩んでいる.....佐々木 武

圧電フィルムを使った振動の合成と波動の説明.....堀込智之

生徒は興味津々、先生の作った面白器械.....松岡浩三

分ける→つなぐ→分かる.....野路茂樹

真空放電・陰極線の実験におけるX線の発生について

.....日下昭一

波動方程式を正しく導かせる工夫.....渡辺 望

論説

「遠心力」という語の使い方.....林 伝一郎

研究報告

熱気球の生徒個人実験化により探求活動を促す一つの試み

.....横塚正充

超音波振動子とレーザーを使った液体中の音速測定.....根本直人

正準集団のイメージ.....石川雄一郎

アトウッド実験の教育的意義.....南原律子

新素材エレキテルとその周辺機器.....矢野淳滋

沈降法による液体の粘性係数の測定.....東原正治, 大西良雄

連載 (科学史)

自然科学の古典をどこに求めるか.....西條敏美

実験講座

ワンチップマイコン内蔵データロガーによる物理計測

.....山本高之, 後藤貴裕, 伊藤正貴