量子多体可積分系とJack多項式

Quantum Integrable Particle Systems
and Jack Polynomials

中央大学大学院 理工学研究科
物理学専攻 博士課程前期課程

小笠原 丈大
Takeo Ogasawara

2005年3月

1 Introduction

相互作用のある量子多体系を厳密に解くことは一般にとても難しい。相互作用の弱い場合は平均場近似などの近似的な手法が有効な場合があるが、強い場合はその有効性が失われることが多い。本論文では相互作用の強いもので厳密に解ける一例としてCalogero-Sutherland模型を取り上げ、その固有関数がJack多項式という対称関数で与えられることを示す。

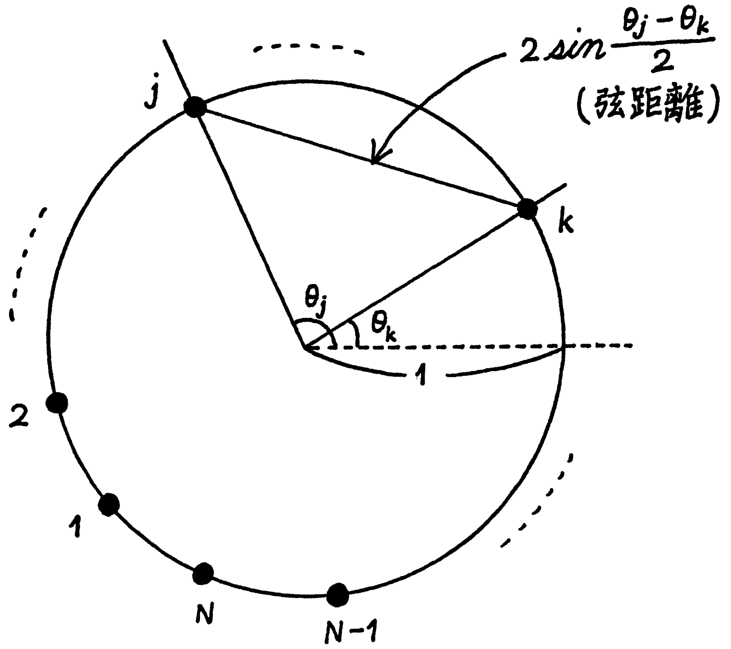
本論文では、粒子の運動は単位円周上に限るものとする。この場合、粒子間の弦距離の２乗に反比例する相互作用ポテンシャルを持つ量子１次元系となる(下図)。ハミルトニアンは

$$H_{CS} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2 \dfrac{\theta_j - \theta_k}{2}} \tag{1.1}$$

と表される。ここでθ_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$はj番目の粒子の位置座標であり回転角を表す。Nは粒子数、βは結合定数である。簡単のために粒子の質量$m = 1/2$、プランク定数$\hbar = 1$としてある。$0 < \beta < 1$のとき引力が働き、$\beta = 0, 1$のとき自由粒子となり、それ以外のときは斥力が働く。量子力学的な不確定性により引力が働いても$\beta(\beta-1) > -1/4$であれば系がつぶれることはない。

この模型は解くために考え出された何か特種なもののように見えるかもしれないが、量子多体系を研究するための足掛かりとして重要な模型の一つである。というのも、後で見るように、解法および得られる解はまったく非自明なものであるからである。

さて、このハミルトニアンH_{CS}に対して固有値問題を解くのであるが、その前の準備として次節ではまず円周上を自由に運動する相互作用のない場合について考察することにする。



2　円周上の自由粒子

一次元上の１つの自由粒子の波動関数はよく知られているように、θ を位置座標として $\psi(\theta)=\exp(ik\theta)$ である。単位円上での運動を考えて、周期的境界条件 $\psi(\theta)=\psi(\theta+2\pi)$ を課すと波数 k の取り得る値は整数に限られることになる。運動量演算子とハミルトニアンは $x=\exp(i\theta)$ という変数変換 $(\theta\to x)$ を施すと

$$\hat{P}=x\frac{\partial}{\partial x},\qquad \hat{H}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tag{2.1}$$

であり、波動関数は $\psi(x)=x^k$ (k は整数) と簡単になる。

次に、これを N 個の粒子に拡張すると、運動量演算子とハミルトニアンは単純に和をとって

$$\hat{P}_N=\sum_{j=1}^{N}x_j\frac{\partial}{\partial x_j},\qquad \hat{H}_N=\sum_{j=1}^{N}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 \tag{2.2}$$

となり、波動関数は

$$\psi_N(x)=x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_N^{\kappa_N} \tag{2.3}$$

と表される。ここで κ_j は j 番目の粒子の波数を表す。κ_j は周期的境界条件より整数であるが、複素共役をとると符号が変わるので非負整数に限るものとする。

さらに、話をボゾン系に限ることにする。すると、波動関数は任意の粒子の入れ換えに対して対称なので、分割 $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_N\geq 0)$ に対して

$$\psi_{N,b}(x)=m_\lambda\equiv\sum_{sym}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_N^{\lambda_N} \tag{2.4}$$

と表される。ここで $\sum_{sym}$ は変数 $x_1,\ldots,x_N$ に対する対称操作によって得られるすべての異なる単項式についての和である。m_λ はモノミアル対称多項式と呼ばれる。$N=3$ として m_λ の具体例を書くと

$$\begin{aligned}
m_2&=\sum_j x_j^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2\\
m_{11}&=\sum_{j<k}x_jx_k=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\\
m_3&=\sum_j x_j^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3\\
m_{21}&=\sum_{\substack{j,k\\(j\neq k)}}x_j^2x_k=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2\\
m_{111}&=\sum_{j<k<l}x_jx_kx_l=x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

などとなる。(2.3) 式の単項式 (モノミアル) を対称化したものが (2.4) 式のモノミアル対称多項式である。λ は粒子の励起の仕方を表す。実際に $\psi_{N,b}(x)$ に (2.2) 式の演算子を作用させると

$$\hat{P}_N\,\psi_{N,b}(x)=\Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\Big)\psi_{N,b}(x),\qquad \hat{H}_N\,\psi_{N,b}(x)=\Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2\Big)\psi_{N,b}(x) \tag{2.5}$$

となる。

m, n を整数とすると x_j^m と x_k^n の内積は

$$(x_j^m, x_k^n) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_k}{2\pi} e^{-im\theta_j} e^{in\theta_k} = \delta_{mn}\delta_{jk} \tag{2.6}$$

であるから、これより

$$(m_\lambda, m_\mu) = \oint m_\lambda(x^{-1}) m_\mu(x) \prod_{j=1}^{N} \frac{d\theta_j}{2\pi} = \delta_{\lambda\mu} \tag{2.7}$$

が得られる。すなわち、モノミアル対称多項式は直交基底を成す。

3 Calogero-Sutherland 模型

3.1 基底状態

Calogero-Suterland 模型については第 1 節で説明したが、もう 1 度ハミルトニアンを書くと

$$H_{CS} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2 \dfrac{\theta_j - \theta_k}{2}} \tag{3.1}$$

である。前節と同様に $x_j = \exp(i\theta_j)$ と変数変換すると

$$H_{CS} = \sum_{j=1}^{N} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 - \beta(\beta-1) \sum_{j<k} \frac{2x_j x_k}{(x_j - x_k)^2} \tag{3.2}$$

となる。ここで、1 階の微分作用素

$$b_j^\dagger = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}, \tag{3.3}$$

$$b_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \tag{3.4}$$

を導入すると

$$b_j^\dagger b_j = \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \beta \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j x_k}{(x_j - x_k)^2} - \frac{\beta^2}{4} \left(\sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \right)^2 \tag{3.5}$$

である。上式の第 3 項で j について和をとると

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \right)^2 &= \sum_{j,k}{}' \left(\frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \right)^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k,l(\neq j)}{}' \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \frac{x_j + x_l}{x_j - x_l} \\
&= \sum_{j,k}{}' \frac{4x_j x_k}{(x_j - x_k)^2} + N(N-1) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k,l(\neq j)}{}' \frac{2x_j x_k + 2x_j x_l}{(x_j - x_k)(x_j - x_l)} \\
&\quad + N(N-1)(N-2)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\sum'$ は、和をとる添え字のうち、どの 2 つの添え字も等しくないものについての和を意味する。以後同様である。右辺第 2 式の第 3 項で j のみ k, l に対して非対称なので、$j \to k \to l \to j$ と順に入れ換えて和をとり 3 で割ると

$$\frac{2}{3} \sum_{j,k,l}{}' \left\{ \frac{x_j x_k + x_j x_l}{(x_j - x_k)(x_j - x_l)} + \frac{x_k x_l + x_k x_j}{(x_k - x_l)(x_k - x_j)} + \frac{x_l x_j + x_l x_k}{(x_l - x_j)(x_l - x_k)} \right\}$$

となるが $\{\cdots\}$ の中を通分すると -1 となるから、これは

$$-\frac{2}{3} N(N-1)(N-2) \tag{3.6}$$

に等しいことになる。したがって、(3.5) 式の第 3 項で j について和をとったものは係数まで含めて

$$-\frac{\beta^2}{4}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k(\neq j)}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\right)^2=-\beta^2\sum_{j<k}\frac{2x_jx_k}{(x_j-x_k)^2}-\frac{\beta^2}{12}N(N^2-1) \tag{3.7}$$

であるから

$$H_{CS}=\sum_{j=1}^{N}b_j^\dagger b_j+E_0,\qquad E_0=\frac{\beta^2}{12}N(N^2-1) \tag{3.8}$$

と書き表せることが導かれたことになる。

この結果から、基底状態の波動関数は $b_j\psi_0^{(CS)}(x)=0$ よりすぐに

$$\psi_0^{(CS)}(x)=\left(\prod_{j=1}^{N}x_j\right)^{-\beta\frac{N-1}{2}}\prod_{j<k}(x_j-x_k)^\beta \tag{3.9}$$

と求まる。E_0 は基底状態のエネルギーである。試しに基底状態の存在確率を計算してみると

$$\left|\psi_0^{(CS)}(\theta)\right|\propto\prod_{j<k}\Big\{1-\cos(\theta_j-\theta_k)\Big\}^{\beta/2} \tag{3.10}$$

となり、斥力の相互作用により粒子の位置座標が一致するところで節を成す様子が分かる。ここで一つ注意しておく。$\beta=0,1$ のとき粒子は自由粒子であるが、$\beta=0$ とすると $\psi_0^{(CS)}(x)$ は任意の粒子の入れ換えに対して対称であるのでこれはボゾンであり、$\beta=1$ とすると同様に反対称であるのでフェルミオンである。

3.2 励起状態に向けて

次に、励起状態の波動関数を計算したいのだが、調和振動子の場合と違って $b_j^\dagger$ は生成演算子ではない ($[H_{CS},b_j^\dagger]\neq b_j^\dagger$) ので $\psi_0^{(CS)}(x)$ に $b_j^\dagger$ を作用させても励起状態の波動関数を得ることはできない。そこで、波動関数が従う方程式を直接考えることにする。

まず、励起状態の統計性は基底状態のそれと一致しなければならないので、$J(x)$ を変数 $x_1,x_2,\ldots,x_N$ に関する対称関数として励起状態の波動関数の形を

$$J(x)\psi_0^{(CS)}(x) \tag{3.11}$$

と予想する。そして、励起状態のエネルギーを E_0+E と書くと

$$H_{CS}\Big\{J(x)\psi_0^{(CS)}(x)\Big\}=(E_0+E)\Big\{J(x)\psi_0^{(CS)}(x)\Big\} \tag{3.12}$$

であるが、左から $\left(\psi_0^{(CS)}\right)^{-1}$ を作用させて E_0 の項を左辺に移行させると $J(x)$ に関する固有値問題

$$\tilde{H}_{CS}J(x)=EJ(x),\qquad \tilde{H}_{CS}\equiv\left(\psi_0^{(CS)}\right)^{-1}\circ H_{CS}\circ\psi_0^{(CS)}-E_0 \tag{3.13}$$

に帰着する。以後、$\psi_0^{(CS)}$ を ψ_0 と略すことにする。
具体的に $\tilde{H}_{CS}$ を計算する。(3.8) 式より

$$\tilde{H}_{CS} = \psi_0^{-1} \circ \sum_{j=1}^{N} b_j^\dagger b_j \circ \psi_0 \tag{3.14}$$

である。ここで

$$\hat{a}_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \eta_j = \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \tag{3.15}$$

とおくと

$$\begin{aligned} b_j^\dagger b_j \circ \psi_0 &= (\hat{a}_j + \eta_j) \circ (\hat{a}_j - \eta_j) \circ \psi_0 \\ &= (\hat{a}_j + \eta_j) \circ \Big\{ (\hat{a}_j \psi_0) + \psi_0 \hat{a}_j - \eta_j \psi_0 \Big\} \\ &= (\hat{a}_j^2 \psi_0) + 2(\hat{a}_j \psi_0)\hat{a}_j + \psi_0 \hat{a}_j^2 - \psi_0(\hat{a}_j \eta_j) - \eta_j^2 \psi_0 \end{aligned}$$

となるから

$$\tilde{H}_{CS} = \sum_{j=1}^{N} \Big[\psi_0^{-1}(\hat{a}_j^2 \psi_0) + 2\psi_0^{-1}(\hat{a}_j \psi_0)\hat{a}_j + \hat{a}_j^2 - (\hat{a}_j \eta_j) - \eta_j^2 \Big] \tag{3.16}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} (\hat{a}_j \psi_0) &= \beta \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j}{x_j - x_k} \psi_0 - \frac{\beta(N-1)}{2} \psi_0 \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \Big(\frac{2x_j}{x_j - x_k} - 1 \Big) \psi_0 \\ &= \eta_j \psi_0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$(\hat{a}_j^2 \psi_0) = (\hat{a}_j \eta_j)\psi_0 + \eta_j^2 \psi_0 \tag{3.18}$$

である。(3.17), (3.18) 式を (3.16) 式に代入すると、基底状態の寄与を取り除いたハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{CS} &= \sum_{j=1}^{N} \Big(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 + \beta \sum_{j=1}^{N} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \Big(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 + \beta \sum_{j<k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \Big(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big) \end{aligned} \tag{3.19}$$

と求まる。
結局、この $\tilde{H}_{CS}$ に対して固有値問題 $\tilde{H}_{CS} J(x) = E J(x)$ を $J(x)$ が $x_1, x_2, \ldots, x_N$ に関する対称関数であるという条件の下で解くことになった。

3.3 Jack 多項式

N 個の変数 x に対する対称関数の空間での直交基底としては (2.7) 式によりモノミアル対称多項式 m_λ があるので、これに $\tilde{H}_{CS}$ を作用させてみることにする。今後 $\sum_{j=1}^{N}\lambda_j$ を $|\lambda|$ と書くことにする。

・1 次 ($|\lambda|=1$) のとき

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{CS}\,m_1 &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2+\beta\sum_{j<k}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]\sum_{j=1}^{N}x_j\\ &= m_1+\beta\sum_{j<k}(x_j+x_k)\\ &= \Big\{1+\beta(N-1)\Big\}m_1\end{aligned}\tag{3.20}$$

よって

$$J_1=m_1\tag{3.21}$$

が固有関数である。

・2 次 ($|\lambda|=2$) のとき

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{CS}\,m_2 &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2+\beta\sum_{j<k}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]\sum_{j=1}^{N}x_j^2\\ &= 2^2m_2+2\beta\sum_{j<k}(x_j^2+2x_jx_k+x_k^2)\\ &= \Big\{4+2\beta(N-1)\Big\}m_2+4\beta m_{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{CS}\,m_{11} &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2+\beta\sum_{j<k}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]\sum_{j<k}x_jx_k\\ &= (1{+}1)\,m_{11}+\beta\sum_{j<k}(x_j+x_k)\sum_{\substack{l(\neq j)\\(\neq k)}}x_l\\ &= 2\,m_{11}+\frac{\beta}{2}{\sum_{j,k,l}}'(x_jx_l+x_kx_l)\\ &= \Big\{2+2\beta(N-2)\Big\}m_{11}\end{aligned}$$

まとめて書くと

$$\tilde{H}_{CS}\begin{pmatrix}m_2\\ m_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\beta(N-1) & 4\beta\\ 0 & 2+2\beta(N-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_2\\ m_{11}\end{pmatrix}.\tag{3.22}$$

対角化すると

$$\tilde{H}_{CS}\begin{pmatrix}m_2+\dfrac{2\beta}{1+\beta}m_{11}\\ m_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\beta(N-1) & 0\\ 0 & 2+2\beta(N-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_2+\dfrac{2\beta}{1+\beta}m_{11}\\ m_{11}\end{pmatrix}.\tag{3.23}$$

したがって、このとき固有関数が

$$J_2 = m_2 + \frac{2\beta}{1+\beta} m_{11} \tag{3.24}$$

$$J_{11} = m_{11} \tag{3.25}$$

と求まった。

・3次 ($|\lambda| = 3$) のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{CS}\, m_3 &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \beta \sum_{j<k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right] \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\
&= 3^2 m_3 + 3\beta \sum_{j<k} (x_j + x_k)(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2) \\
&= 9\, m_3 + 3\beta \sum_{j<k} (x_j^3 + x_k^3) + 6\beta \sum_{j<k} (x_j^2 x_k + x_j x_k^2) \\
&= \Big\{9 + 3\beta(N-1)\Big\} m_3 + 6\beta m_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{CS}\, m_{21} &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \beta \sum_{j<k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right] \sum_{j,k}{}' x_j^2 x_k \\
&= (2^2+1)\, m_{21} + \beta \sum_{j<k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \Bigg\{ 2(x_j^2 - x_k^2) \sum_{\substack{l(\neq j)\\(\neq k)}} x_l + 2(x_j^2 x_k - x_j x_k^2) \\
&\qquad\qquad + (x_j - x_k) \sum_{\substack{l(\neq j)\\(\neq k)}} x_l^2 + (x_j x_k^2 - x_j^2 x_k) \Bigg\} \\
&= 5\, m_{21} + \beta \sum_{j<k} \Bigg\{ 2(x_j^2 + 2x_j x_k + x_k^2) \sum_{\substack{l(\neq j)\\(\neq k)}} x_l + (x_j + x_k) \sum_{\substack{l(\neq j)\\(\neq k)}} x_l^2 + (x_j + x_k) x_j x_k \Bigg\} \\
&= \Big\{5 + \beta(3N-5)\Big\} m_{21} + 12\beta m_{111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{CS}\, m_{111} &= \left[\sum_{j=1}^{N}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + \beta \sum_{j<k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right] \sum_{j<k<l} x_j x_k x_l \\
&= (1+1+1)\, m_{111} + \frac{\beta}{4} \sum_{j,k,l,m}{}' (x_j + x_k) x_l x_m \\
&= \Big\{3 + 3\beta(N-3)\Big\} m_{111}
\end{aligned}$$

まとめて書くと

$$\tilde{H}_{CS} \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 3\beta(N-1) & 6\beta & 0 \\ 0 & 5 + \beta(3N-5) & 12\beta \\ 0 & 0 & 3 + 3\beta(N-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

ここでも同様に係数行列が上三角行列になったので、容易に対角化でき対角要素がそのまま固有値になる。そして、固有関数は上から順に

$$J_3 = m_3 + \frac{3\beta}{2+\beta}m_{21} + \frac{6\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)}m_{111} \tag{3.27}$$

$$J_{21} = m_{21} + \frac{6\beta}{1+2\beta}m_{111} \tag{3.28}$$

$$J_{111} = m_{111} \tag{3.29}$$

と求まる。

これまでに計算した $\tilde{H}_{CS}$ の固有関数 $J_\lambda(x)$ が Jack 多項式である。

一般の N 次のときも、例えば上で見たように $(3),(21),(111)$ と崩れるように基底を並べると、係数行列は上三角行列になると考えられる。この並べる順序はドミナンス順序と呼ばれるもので、$|\lambda| = |\mu|$ なる分割 λ, μ について次のように定義される。

$$\lambda \geq \mu \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } k \geq 1 \text{ に対して}$$
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \tag{3.30}$$

これによって Jack 多項式は次のように表される。

$$J_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu(<\lambda)} C_{\lambda\mu}(\beta)m_\mu(x) \tag{3.31}$$

しかし $C_{\lambda\mu}(\beta)$ を与える一般公式は解っていない。固有値の一般形は $\tilde{H}_{CS}J_\lambda(x) = E_\lambda J_\lambda(x)$ に対して

$$E_\lambda = \sum_{j=1}^{N}\Big\{\lambda_j^2 + \beta\lambda_j(N+1-2j)\Big\} \tag{3.32}$$

である。

これまで分割 λ の要素は整数に限って計算してきたが、前節と同様に波動関数の一価性からこれは整数に限られることが確かめられる。また、j 番目の粒子の運動量演算子 $x_j(\partial/\partial x_j)$ を波動関数 $J_\lambda(x)\psi_0^{(CS)}(x)$ に作用させると、λ_j は j 番目の粒子の波数から基底状態の波数の寄与を差し引いたものであることが分かる。したがって、ここでも分割 λ は励起の仕方を表す。

さて、粒子を一斉に加速させるとエネルギーはどのように変わるだろうか考えてみたい。k を任意の整数として

$$\begin{aligned}
&(x_1\cdots x_N)^{-k}\circ \tilde{H}_{CS}\circ (x_1\cdots x_N)^k \\
&= (x_1\cdots x_N)^{-k}\circ \sum_{j=1}^{N}\Big(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 \circ (x_1\cdots x_N)^k + \beta\sum_{j<k}\frac{x_j+x_k}{x_j-x_k}\Big(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} - x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) \\
&= \tilde{H}_{CS} + Nk^2 + 2k\sum_{j=1}^{N}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

であるから

$$\tilde{H}_{CS}\Big\{(x_1\cdots x_N)^k J_\lambda(x)\Big\} = \Big(E_\lambda + Nk^2 + 2k|\lambda|\Big)\Big\{(x_1\cdots x_N)^k J_\lambda(x)\Big\}. \tag{3.34}$$

すなわち、全粒子の運動量を一斉に k だけ増加させると全エネルギーは $Nk^2+2k|\lambda|$ だけ増加する。ここで k を負の整数に選べば x_j の負冪を含んだ波動関数を扱うこともできる。

ドミナンス順序は $|\lambda|\le 5$ のすべての分割についてそれぞれの次数において順序を定めることができるが、$|\lambda|=6$ では分割間で順序を定められないものがある:

$$(6)>(5\,1)>(4\,2)>\begin{matrix}(4\,1^2)\\(3^2)\end{matrix}>(3\,2\,1)>\begin{matrix}(3\,1^3)\\(2^3)\end{matrix}>(2^2\,1^2)>(2\,1^4)>(1^6).$$

このように $(4\,1^2)$ と (3^2) の間、$(3\,1^3)$ と (2^3) の間でドミナンス順序を定めることができない。このとき (3.32) 式により固有値を計算すると $E_{411}=E_{33}, E_{3111}=E_{222}$ となることが確かめられる。一般にこの順序が定められないところで縮退があることが分かる。これまでの議論では、縮退があるとき内積

$$<J_\lambda\psi_0|J_\mu\psi_0>=\oint J_\lambda(x^{-1})J_\mu(x)\psi_0(x^{-1})\psi_0(x)\prod_{j=1}^{N}\frac{d\theta_j}{2\pi} \tag{3.35}$$

に関して固有関数が直交するかどうかは分からない。

最後に、$\beta=0$ とおくと波動関数 $J_\lambda(x)\psi_0(x)$ はモノミアル対称多項式 $m_\lambda(x)$ になり、前節で扱ったボゾン系に帰着することを注意しておく。

3.4 Dunkl 作用素と可積分性

問題が解けた (解き方がわかった) ので、リウヴィルの可積分性により、ハミルトニアンと可換な作用素が $N-1$ 個存在するはずである。この保存量を構成することを考えたい。

変数 x_i と x_j を入れ換える作用素を s_{ij} として、Dunkl 作用素は

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}-\beta\sum_{j(\neq i)}\frac{1}{x_i-x_j}(s_{ij}-1) \tag{3.36}$$

と定義される。これにより全運動量演算子 P とハミルトニアン $\tilde{H}_{CS}$ は $\pi_i=x_iD_i$ とおいて

$$P=\mathrm{Res}\sum_{i=1}^{N}\pi_i,\qquad \tilde{H}_{CS}=\mathrm{Res}\sum_{i=1}^{N}\pi_i^2 \tag{3.37}$$

と表される。ここで Res は対称多項式の空間上への制限を意味する。具体的には、交換作用素 s_{ij} をすべて一番右端へ移動させてからそれを 1 とおく、という操作をする。

今考えている系は相互作用が粒子間の距離のみによるので並進対称であるから、$[P,\tilde{H}_{CS}]=0$ である。これを拡張して、一般の正の整数 m,n に対して

$$[I_m,I_n]=0,\qquad I_n\equiv\mathrm{Res}\sum_{i=1}^{N}\pi_i^n \tag{3.38}$$

を示すことができれば、独立な N 個の保存量が生成できたことになる。
Dunkl 作用素には代数関係

$$[D_i, D_j] = 0, \tag{3.39}$$

$$s_{ij} D_j = D_i s_{ij}, \tag{3.40}$$

$$[D_i, x_j] = \delta_{ij}\left(1 + \beta \sum_{k(\neq i)} s_{ik}\right) - (1-\delta_{ij})\beta s_{ij} \tag{3.41}$$

が成り立つことが証明できる。これらの関係を用いて

$$[\pi_i, \pi_j] = -\beta(\pi_i - \pi_j)s_{ij} \tag{3.42}$$

を得る。これにより

$$\begin{aligned}
[\pi_i^m, \pi_j^n] &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \pi_i^{m-k}\pi_j^{n-l}[\pi_i, \pi_j]\pi_j^{l-1}\pi_i^{k-1} \\
&= -\beta \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \pi_i^{m-k}\pi_j^{n-l}(\pi_i - \pi_j)\pi_i^{l-1}\pi_j^{k-1} s_{ij} \\
&= -\beta \sum_{k=1}^{m} \left(\pi_i^{m+n-k}\pi_j^{k-1} - \pi_i^{m-k}\pi_j^{n-1+k}\right) s_{ij} \\
&= -\beta \sum_{k=1}^{\min[m,n]} \left(\pi_i^{m+n-k}\pi_j^{k-1} - \pi_i^{k-1}\pi_j^{m+n-k}\right) s_{ij}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

と計算できる。最後の行を見ると、m と n の入れ換えに対して対称であるから

$$[\pi_i^m, \pi_j^n] = [\pi_i^n, \pi_j^m] \tag{3.44}$$

である。これより

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \pi_i^m, \sum_{j=1}^{N} \pi_j^n\right] = 0 \tag{3.45}$$

であることが分かり、さらにこれを対称多項式の空間上に制限すると

$$[I_m, I_n] = 0 \tag{3.46}$$

となる。以上により、(3.38) 式を示すことができたので、互いに独立な N 個の保存量 $I_1, I_2, \ldots, I_N$ を作り出すことができた。

4 まとめ

本論文ではCalogero-Sutherland模型の厳密解を計算した。そして、その固有関数がJack対称多項式で与えられることを示した。しかし、固有値に縮退があるときJack多項式が直交するかは分からなかった。これを解決するためには、$\tilde{H}_{CS}$に新たなパラメータを加えて相対論的な模型に拡張することで、縮退がないような状況を作り出す方法がある [1]。

謝辞

指導教官である香取眞理先生には、本論文の作成にあたり多くの御助言を頂きました。また、研究活動全般にわたり支援して下さりました。心より感謝致します。

参考文献

[1] 筧三郎 : $1/r^2$ 型相互作用模型の周辺, 京都大学数理解析研究所講究録 **1005** (1997) pp.72-94.

[2] 白石潤一：量子可積分系入門, サイエンス社 (2003).

[3] 栗田英資：Jack 多項式の物理, 数理科学 1996 年 9 月号 pp.12-19.

[4] 川上則雄・梁成吉 : 一次元量子系の物理 (その 9), 固体物理 **30** (1995) pp.425-437.

[5] 樋上和弘：1 次元 $1/r^2$ 模型, 数理科学 1996 年 1 月号 pp.5-10.

[6] S. Kakei: Common algebraic structure for the Calogero-Suterland models, *J.Phys.* **A29** (1996) L619-L624.