量子力学３　期末テスト（２００３年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること.

次の 3 問に答えなさい．（ 裏面にも問題があるので注意しなさい．）

問題 I. 演算子 A は，シュレーディンガー表示では時間に依存しないものであるとする．ハイゼンベルク表示では，この演算子は

$$A(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) A \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)$$

というように時間発展するものと見なされる．ただしここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，また $\mathcal{H}$ は系のハミルトニアンである．シュレーディンガー表示における座標の演算子 $\vec{r} = (x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$ と運動量の演算子 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$ との間には交換関係

$$[r_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

が成り立つ．ハイゼンベルク表示でも，任意の時刻 t において

$$[r_j(t), p_k(t)] = i\hbar\delta_{jk}$$

が成り立つことを証明しなさい.

問題 II. 直交デカルト座標 (x, y, z) において y 座標の周りの微小回転を考える．回転角度を α とすると，$|\alpha| \ll 1$ のとき座標は

$$x \to x + \delta x = x + \alpha z \tag{1}$$

$$y \to y \tag{2}$$

$$z \to z + \delta z = z - \alpha x \tag{3}$$

と変換される.

(1)　3 次元極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \tag{4}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \tag{5}$$

$$z = r\cos\theta \tag{6}$$

と合わせて考えることにする．するとまず，z 座標の変位 δz は (6) より

$$\begin{aligned} \delta z &= \delta(r\cos\theta) \\ &= r\delta(\cos\theta) \\ &= -r\sin\theta\delta\theta \end{aligned}$$

と表せることが分かる．これと (3) 式 及び (4) 式 より

$$\delta\theta = \alpha\cos\varphi \tag{7}$$

と求まることを示しなさい．

(2)　(2) 式にあるように，この変換によって y 座標は不変である．つまり $\delta y = 0$ である．(5) 式を用いることにより，この不変性から

$$\delta\varphi = -\cot\theta\,\tan\varphi\,\delta\theta \tag{8}$$

という関係式を導きなさい．

(3)　(7) 式と (8) 式より，$\delta\varphi$ を α, θ, φ の関数として表す式を導きなさい．

(4)　以上の結果と，$|\alpha| \ll 1$ で成り立つ等式

$$\langle r, \theta, \varphi| \left(1 + \frac{i}{\hbar}\alpha L_y\right) = \langle r, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi|$$

から，角運動量の y 成分の演算子 L_y を $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ や $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ といった微分演算子で表す表式を導きなさい．

問題 III. 次のことがらについて説明しなさい．

(1)　アハラノフ・ボーム効果

(2)　角運動量の量子化