量子力学３　期末テスト（２００４年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること.

問題　角運動演算子 $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ は，$[L_j, L_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell} L_\ell,\ j, k = 1, 2, 3$ という交換関係を満たす．ここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$．また，$\varepsilon_{jk\ell}$ は完全反対称テンソルである．以下,

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2$$

とする．次の設問に答えなさい．[小問各 10 点，合計 100 点]

(1)　L^2 と L_3 とは可換であること，すなわち　$[L^2, L_3] = 0$　　であることを示しなさい.

(2)　次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$[L_3, L_+] = \hbar L_+, \qquad [L_3, L_-] = -\hbar L_-.$$

(3)　次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$L_+L_- = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3, \qquad L_-L_+ = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3.$$

(4)　L^2 と L_3 の同時固有状態ベクトルを $|\ell, m\rangle$ と書き,

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\ell, m\rangle, \qquad L_3|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

であるとする．ここで，ℓ, m は実数であり，$\ell \geq 0$ である．次の 2 つの関係式を導きなさい.

$$\begin{aligned} \langle \ell, m|L_+L_-|\ell, m\rangle &= \hbar^2 \Big\{\ell(\ell+1) - m(m-1)\Big\}\langle \ell, m|\ell, m\rangle, \\ \langle \ell, m|L_-L_+|\ell, m\rangle &= \hbar^2 \Big\{\ell(\ell+1) - m(m+1)\Big\}\langle \ell, m|\ell, m\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

(5)　$\langle \ell, m|L_+L_-|\ell, m\rangle \geq 0$, $\langle \ell, m|L_-L_+|\ell, m\rangle \geq 0$, $\langle \ell, m|\ell, m\rangle \geq 0$ であるので，上の関係式から

$$\ell(\ell+1) - m(m-1) \geq 0 \qquad \text{かつ} \qquad \ell(\ell+1) - m(m+1) \geq 0.$$

という条件が導かれる．この 2 つの条件式はそれぞれ次のように書きなおせることを示しなさい.

$$\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2.$$

また，これら 2 つの不等式を連立させると，次の条件に等しくなることを証明しなさい.

$$-\ell \leq m \leq \ell. \tag{2}$$

(6)　$L_-|\ell, m\rangle$ は $|\ell, m-1\rangle$ に比例すること，つまり c_- を定数として　$L_-|\ell, m\rangle = c_-|\ell, m-1\rangle$　であることを示しなさい．　**ヒント：** $L_-|\ell, m\rangle$ に左から L_3 を演算してみよ．

(7)　$L_+|\ell, m\rangle$ は $|\ell, m+1\rangle$ に比例すること，つまり c_+ を定数として　$L_+|\ell, m\rangle = c_+|\ell, m+1\rangle$　であることを示しなさい．　**ヒント：** $L_+|\ell, m\rangle$ に左から L_3 を演算してみよ．

(8)　$\langle \ell, m|\ell, m\rangle = 1$, $\langle \ell, m-1|\ell, m-1\rangle = 1$, $\langle \ell, m+1|\ell, m+1\rangle = 1$ となるように係数 c_-, c_+ を定めなさい．ただし c_-, c_+ は，不等式 (2) が成り立つときには非負の実数であるように決めなさい．　**ヒント：** 問 (3) で導いた関係式 (1) を用いなさい．

(9)　次を示しなさい．　$L_-|\ell, -\ell\rangle = 0$,　$L_+|\ell, \ell\rangle = 0$.

(10)　以上の結果から，ℓ は整数か半奇数でなければならないことを導きなさい．