量子力学３　期末テスト（２００５年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可．

裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること．

問題 1

$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を，各成分 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が定数である定ベクトルとする．$\vec{\lambda}$ の大きさを $\lambda = |\vec{\lambda}|$ と書き，$\vec{\lambda}$ 向きの単位ベクトルを $\hat{\lambda}$ と書くと，$\vec{\lambda} = \lambda\hat{\lambda}$ と表される．ある定ベクトル $\vec{r}$ に対して，

$$\vec{r}(\vec{\lambda}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{\lambda}\right) \vec{r} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{\lambda}\right) \tag{1}$$

とする．

(1)　λ が小さいときには，λ について

$$\vec{r}(\vec{\lambda}) = \vec{r} + \frac{i}{\hbar}\Big[\vec{p}\cdot\vec{\lambda}, \quad \vec{r}\Big] + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{2}$$

と展開できることを示しなさい．ただし，$[A, B] = AB - BA$ (交換子) であり，$\mathcal{O}(\lambda^2)$ は λ^2 以上の微小量を表す．

(2)　$[\vec{p}\cdot\vec{\lambda}, \quad r_1]$,　$[\vec{p}\cdot\vec{\lambda}, \quad r_2]$,　$[\vec{p}\cdot\vec{\lambda}, \quad r_3]$ を求めなさい．また，その結果を用いて (2) 式を書き直してみなさい．

(3)　(1) 式で与えられた $\vec{r}(\vec{\lambda})$ は，$\vec{r}(0) = \vec{r}$ であり，微分方程式

$$\frac{d}{d\lambda}\vec{r}(\vec{\lambda}) = \hat{\lambda}$$

を満たすことを示しなさい．

(4)　(1) 式で与えられる $\vec{r}(\vec{\lambda})$ は $\vec{r}$ をどのように変換したものであるといえるか．

(5)　以上のことから，量子力学における運動量演算子 $\vec{p}$ の役割について論じなさい．

問題 2

角運動量演算子 $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ を $\vec{r}$ と $\vec{p}$ を演算子として

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

で定義する．

(1)　L_x を x, y, z, p_x, p_y, p_z を用いて表しなさい．

(2)　L_z を x, y, z, p_x, p_y, p_z を用いて表しなさい．

(3)　交換子 $[L_x, L_z]$ を計算しなさい．

(4)　上の結果から，角運動量演算子の x 成分 L_x と z 成分 L_z に対して同時に固有状態となるような状態は，一般には存在できないことを証明しなさい．

(5)　このことは物理的には何を意味しているのか述べなさい．