

砂山の可換モデル

香取眞理

〈中央大学理工学部物理学教室 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp〉

自己組織化臨界現象を示す基本モデルとして有名な **Bak, Tang, Wiesenfeld (BTW)** の砂山モデルが可換であることが分かってきた。このモデルのなだれプロセスが可換であるという発見により、解析の手段が与えられたのである。Dhar 理論の簡単な紹介の後で、計算機シミュレーション結果が示唆する **Kadanoff** らと **Ghaffari** らの予想を取り上げる。厳密解を計算することによりこの2つの予想が正しいことを証明する。

1. はじめに

1987年に **Bak, Tang, Wiesenfeld (BTW)** は、あるダイナミカルなモデルの計算機シミュレーション結果を報告した。¹⁾ この系は、その都度ランダムに選ばれた格子点上に加えられる局所的な摂動(砂粒の注入)と、それによって引き起こされる決定論的な連鎖反応(砂山のなだれ現象)とからなる確率的セルオートマトンであり、砂山モデル(sandpile model)と命名された。BTWの発見は、摂動は全くランダムでありながら、プロセスをしばらく繰り返していくうちに、なだれの空間的規模分布と継続時間分布とが、ともに冪乗分布であるような定常状態(すなわち、ごく小規模ななだれが頻発するが、非常に大規模ななだれもしばしば誘発されるので、次に起こるなだれがいったいど

程度の大きさにまで発展するのか、實際上予測不能な状況)に至る、というものである。なだれを起こすルールは自然なものであり、特に調節すべきパラメタも持たないごく単純なモデルであったので、BTWはこれこそが自己組織化臨界現象(self-organized criticality; SOC)²⁻⁵⁾を示す基本モデルであると強く主張した。

SOCという概念は多くの研究者の心を捉えた。そして、この簡単な確率的セルオートマトンが「本当にSOCを示すのか」、「SOC成立の必要十分条件は何か」⁶⁾といった問に答えるため統計力学的な研究が進められてきた。スタートのBTWの論文と同様に、計算機シミュレーションによる数値的研究が主流であるが、その中で1990年のDharの論文⁷⁾に始まる一連の研究は解析的なものである。

Dhar の発見は、BTW モデルのなだれプロセスは可換であるということであり、彼はこの可換性を保持した形で BTW モデルを拡張する限り、それらのモデルに共通した理論が作れることを示した。Dhar は、このクラスの確率的セルオートマトンを可換砂山モデル (Abelian sandpile model; ASM) と呼んだ。その可換性ゆえに、なだれの規模分布に関連するいくつかの重要な統計量が厳密に計算できるのである。⁸⁻¹⁰⁾

厳密解を計算する最大のメリットは、パラメタの陽な関数として答を得ることにより、計算機シミュレーションではなかなか白黒がつかない微妙な問題を解決できることにある。我々は、次の2つの問題を取り上げた。

(P1) なだれの広がり方が異方的になると、SOC のユニバーサリティ・クラスが変わることが、Kadanoff らの計算機シミュレーションによって示されている。「異方性がわずかでも入れば、SOC のユニバーサリティ・クラスは即座に変わる」という彼らの予想¹¹⁾を証明できないか？

(P2) BTW の砂山モデルでは (格子の境界では砂粒子の散逸があるが、バルクでのなだれでは) 粒子数は保存している。Ghaffari らは計算機シミュレーションの結果から、BTW モデルではこの粒子の保存則が SOC 成立の必要条件であるという予想をたてた。¹²⁾ この予想を証明できないか？ また、臨界性の破れが連続的 (2次相転移的) であることを示せないか？

最近我々は、異方性を表すパラメタ c を持つ ASM (directed ASM)^{13, 14)} と、粒子数保存則の破れを表すパラメタ α を持つ ASM (non-conservative ASM)^{15, 26)} の厳密解を計算して、この2つの問題を解決した。

2. ASM の定義と Dhar の可換砂山理論

Dhar による ASM の定義は、以下に述べるようにきわめて一般的である (図1を参照)。^{7, 8)} まず N 個の格子点からなる任意の格子 Λ を考える。これは正方格子や単純立方格子のような規則格子でも、Cayley tree でも、あるいは不規則な構造を持つネットワークでも、 N が有限なら何でも良い。各格子点 $x \in \Lambda$ 上に自然数 $z(x) \in \{1, 2, 3, \dots\}$ を割り振る。これは、その格子点上の砂山の高さを表す確率変数である。¹⁶⁾

次に各成分が整数である $N \times N$ の行列 Δ を指定する。この行列の対角成分は $\Delta(x, x) = [\text{格子点 } x \text{ 上の安定な砂山の高さの上限値}]$ であり、非対角成分は $\Delta(x, y) = -[x \text{ での砂山が崩れたときに } y \text{ へ飛び移る粒子の数}]$ であるが、一般には、行列 Δ は次の3つの条件を満たすものなら何でも良い (ただし、各成分は整数)。(i) $\Delta(x, x) > 0 \forall x \in \Lambda$, (ii) $\Delta(x, y) \leq 0 \forall x \neq y \in \Lambda$, (iii) $\sum_y \Delta(x, y) \geq 0 \forall x \in \Lambda$.

すべての格子点 x で $z(x) \leq \Delta(x, x)$ のとき、配置 $\mathcal{G} =$

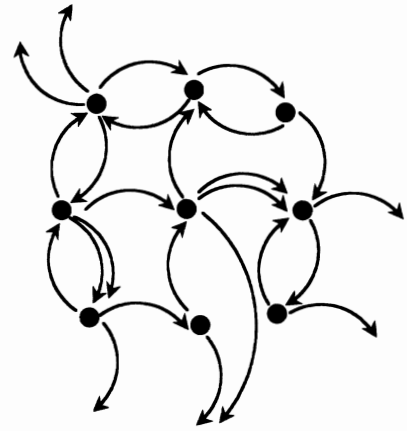


図1 有限格子上の ASM の1例を図示したもの。黒丸は格子点を表す。各格子点ごとに安定な砂山の高さの上限値を設定し、高さがそれを超えたときにトッピングを起こす。ある格子点でトッピングが起こったときには、その点が発する矢印1本ごとに1粒子を矢印に沿って移動させる。矢印の先に格子点がある場合には粒子をその上に乗せ、ない場合にはその粒子を消滅させる。

$\{z(x)\}$ は安定であるといい、1カ所でも $z(x) > \Delta(x, x)$ となる格子点 (不安定格子点) があるときには、その配置 \mathcal{G} は不安定であるということにする。いま、初期配置は安定であったとする。配置 \mathcal{G} に対して次の操作 [A], [B] を考える。

[A] (粒子のランダム注入による摂動) Λ の中から全くランダムに格子点を1つ選ぶ。そして $z(x) \rightarrow z(x) + 1$ (他の格子点上の変数はそのまま) とする。この操作を、配置が不安定になるまで繰り返す。

[B] (トッピング toppling) ある格子点 x が不安定になったら、すべての $y \in \Lambda$ に対して $z(y) \rightarrow z(y) - \Delta(x, y)$ とする。すなわち、不安定格子点 x から $\Delta(x, x)$ 個の粒子が失われ、そのうちの $-\Delta(x, y) = |\Delta(x, y)|$ 個の粒子が他の格子点 y へ飛び移る。

トッピング [B] によって新たに得られた配置が安定なときには、再び [A] の摂動を加える。しかし、トッピングにより別の格子点が新たに不安定になった場合には、引き続きその格子点のトッピングを行う。1つの配置にいくつもの不安定格子点があるときには、順次そのすべてでトッピングを行う (後述のように、その順序は任意で良い)。とにかく、再び安定な配置に落ち着くまでトッピング [B] を繰り返す。1回の摂動で引き起こされるこの一連のトッピングをなだれ (avalanche) と見なす。

トッピング [B] は決定論的であるが、粒子注入 [A] はランダムなプロセスなので、全体として ASM は確率過程 (確率的セルオートマトン) である。このような格子上の確率過程では、配置 \mathcal{G} の出現頻度の定常分布を定めることが問題となるのであるが、粒子注入 [A] が逐次行われる下で定常分布が成立するためには、どこかで粒子の散

逸がなければならない。行列 A の条件 (iii) において、特に $\sum_y A(x, y) = A(x, x) - \sum_{y: y \neq x} |A(x, y)|$ が (ゼロではなく) 正であるような格子点 x では、1 回のトッピングによってその分の粒子が系から失われる。通常は、有限格子 A の境界上の格子点のトッピングにおいて、格子の外にこぼれ落ちた粒子は消滅するものとする。ASM は開放散逸系であり、実現される定常分布は非平衡定常状態を表す。

1 回のなだれの間にかかるトッピングの回数を T とする。なだれが止んだら [A], [B] を繰り返す。そして、非平衡定常状態における、なだれ

継続時間 T の平均値 $\langle T \rangle$ やその分布などを調べるのが研究課題である。

BTW のオリジナルなモデルは、 A を $L \times L (=N)$ の正方格子として、 $A(x, y) = 4$ ($x=y$ のとき), $A(x, y) = -1$ (x, y が最近接格子対であるとき), $A(x, y) = 0$ (それ以外) とした場合である。トッピングは最近接の 4 つの格子点に粒子が 1 つずつ飛び散るといごく自然な拡散であり、特にパラメタはない。

さて、Dhar が発見した可換性について述べよう。いま \mathcal{G} として安定な配置を考えることにする。まず格子点 x に粒子を加え、それによって引き起こされるなだれが終了した後に、別の格子点 y に新たに粒子を加えてなだれを引き起こす。この 2 つのなだれの結果得られる安定な配置は、実は、 x と y についての操作の順番を交換して、格子点 y から発するなだれを先に起こしてから次に x からのなだれを起こした後に得られる安定な配置と全く等しいのである。なだれを起こす順番が可換というわけである。

このなだれの可換性は、行列 A の条件 (ii) によって保証されている。非対角成分が正になることがないので、ある格子点のトッピングにより、それ以外の格子点上の砂山は高くなることはあっても低くなることはない。そのため、ある配置において 2 つの格子点が同時に不安定であったとき、その一方の格子点でトッピングが起こっても、他方の格子点は依然として不安定なままである。このことに注意すると、複数の不安定格子点がある場合でも、どこから先にトప్పルさせるかの順番にはよらずに、トッピング後の配置が一意的に決まることが示せる (図 2 を参照)。

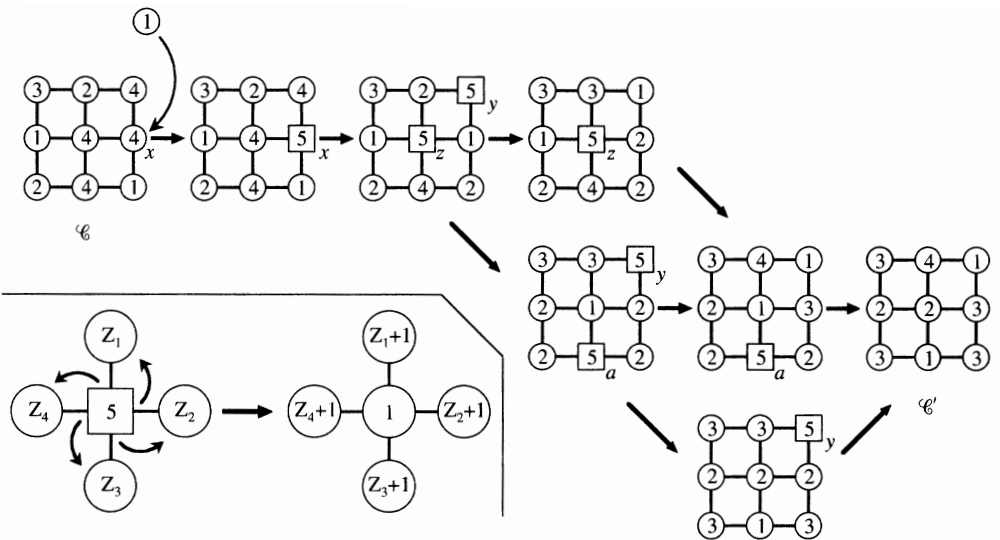


図 2 トッピングの可換性を表す例。3×3 の正方格子上の BTW モデルを考える。各格子点の値はその点での砂山の高さ z を表す。左下の挿入図にあるように、この値が 5 以上になると不安定化し、四方に 1 粒子ずつ拡散する (格子の外にこぼれ落ちた粒子は消滅)。配置 \mathcal{G} の格子点 x に 1 粒子が注入されたことにより引き起こされるなだれの様子を図示した。上段は格子点 x, y, z, a の順、中段は x, z, y, a の順、下段は x, z, a, y の順にトッピングが起こった場合をそれぞれ示している。いずれの場合も、なだれ終了後の安定な配置は等しく \mathcal{G}' である。なお、このなだれの継続時間は $T=4$ である。

なだれは摂動と一連のトッピングとから成るので、このことから、参考文献 17 のようになだれの可換性を証明することができる。

現実の砂山斜面のなだれは可換ではない。降雨により下方の土砂がえぐられて急勾配の箇所ができたとして、そこから右下方に土砂崩れ (トッピング) が起こる危険性と左下方に土砂崩れが起こる危険性が同時に生じたとする。いま、右下方への土砂崩れが起こったとすると、それによりその付近の傾斜が緩やかになるので、もはやその後で左下方への土砂崩れが起こることはない。つまり実際には、一方の土砂崩れが他方の土砂崩れを抑制するという一種の干渉があるのである。この負の干渉の効果を取り込むには、行列 A の条件 (ii) を破って一部の非対角成分を正にしなければならないが、そうすると異なる格子点でのトッピングが非可換になってしまうことになる。¹⁸⁾

Dhar は可換性を用いて、(i) ASM の定常状態では、安定な配置のうちの、ある特別な条件を満たす配置 (その総数は $\det A$ で与えられる) だけが出現し、(ii) その出現頻度分布は一様分布である (つまり等重率則が厳密に成立する) ことを証明した。^{7, 19)}

この定常状態において、格子点 x に粒子が加えられたときに、それによって引き起こされるなだれによって格子点 y で起こるトッピングの回数の平均値を $G(x, y)$ とする。これは、 x での摂動が y に伝播する度合いを表すプロパゲータ (グリーン関数) である。いま、格子点 x に粒子が加えられたとする。定常状態では各格子点 $z \in A$ 上で、粒子の流入の平均 $= \delta_{xz} + \sum_{y: y \neq z} G(x, y) |A(y, z)|$ (δ_{xz} はクロネ

ッカーのデルタ)と流出の平均 $=G(x, z)\Delta(z, z)$ とは釣り合っているはずなので, 差分方程式 $\sum_y G(x, y)\Delta(y, z)=\delta_{xz}$ が成立する. よって,

$$G(x, y)=[\Delta^{-1}](x, y) \quad (1)$$

である.⁷⁾

以上が, Dhar の可換砂山理論の骨子である.

3. 有向可換砂山モデル

まず有向可換砂山モデル¹³⁾を説明する. 格子 Λ を $L \times L$ ($=N$)の正方格子とし, 2方向の単位ベクトルを e_1, e_2 と書く. 行列 Δ を

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} 2(c+1)\zeta & x=y \text{ のとき} \\ -c\zeta & y=x+e_i \text{ (} i=1, 2 \text{) のとき} \\ -\zeta & y=x-e_i \text{ (} i=1, 2 \text{) のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (2)$$

とする. ここで, c は任意の正の有理数であり, $c\zeta$ が自然数となるように自然数 ζ を定める. パラメタ c は異方性を表し, $c=\zeta=1$ のとき BTW モデルに帰着する.²⁰⁾ パラメタ (c, ζ) を持つモデルと $(1/c, c\zeta)$ のモデルとは, 格子の上下, 左右を入れ替えただけの違いなので, 以下の計算で $c>1$ と仮定しても一般性は失われない.

さて, なだれの継続時間の平均 $\langle T \rangle$ を一般の c について求めることにより, 問題 (P1) に答えよう. 式 (1) より

$$\langle T \rangle = \frac{1}{N} \sum_x \sum_y [\Delta^{-1}](x, y) \quad (3)$$

である. 逆行列を求めるためには Δ を対角化しなければならない. 等方的な場合 ($c=1$) にはフーリエ変換によって対角化できる.⁷⁾ $c>1$ の場合には次の $N \times N$ 行列

$$P_{\pm}(n, x) = \frac{2}{L+1} \prod_{i=1}^2 c^{\pm x_i/2} \sin\left(\frac{n_i x_i}{L+1} \pi\right) \quad (4)$$

によって, $\Lambda = P_+ \Delta P_-$,

$$\Lambda(n, n') = 2\zeta \left\{ 1 + c - \sqrt{c} \sum_{i=1}^2 \cos\left(\frac{n_i}{L+1} \pi\right) \right\} \delta_{n, n'} \quad (5)$$

と対角化できるので,

$$\langle T \rangle = \frac{2c^2}{L^2(L+1)^2\zeta} \sum_{n_1=1}^L \sum_{n_2=1}^L \frac{1}{1+c-\sqrt{c} \sum_{i=1}^2 \cos\left(\frac{n_i \pi}{L+1}\right)} \\ \times \prod_i \sin^2\left(\frac{n_i \pi}{L+1}\right) \frac{2-(-1)^{n_i}(c^{(L+1)/2}+c^{-(L+1)/2})}{\left\{1+c-2\sqrt{c} \cos\left(\frac{n_i \pi}{L+1}\right)\right\}^2} \quad (6)$$

という表式が得られる. そして, $L \gg 1$ のとき

$$\langle T \rangle \approx \frac{1}{3(c-1)\zeta} L \quad (7)$$

となることが示せる.¹³⁾

$c=1$ とすると, (6) 式の分母の $1+c-\sqrt{c} \sum_i \cos(n_i \pi / (L+1))$ は $\sum_i 2 \sin^2(n_i \pi / 2(L+1))$ となり, これは各 n_i の

値に対して $L \rightarrow \infty$ で L^{-2} のオーダーでゼロになる. よって完全に等方的な場合 ($c=1$) の $\langle T \rangle$ の L 依存性は $c \neq 1$ のときとは異なり, $L \gg 1$ で $\langle T \rangle \sim L^2$ となる.⁷⁾ このことは, (7) 式の L の係数が $c \rightarrow 1$ で発散することにも現れている. 以上の結果は次のようにまとめられる.

$L \gg 1$ のとき, $\langle T \rangle \sim L^x$ であり, 指数 x は

$$x = \begin{cases} 2 & c=1 \text{ のとき} \\ 1 & c \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (8)$$

極限 $L \rightarrow \infty$ で $\langle T \rangle$ が冪乗発散することは, なだれの継続時間に特徴的の長さが無いことを示し, T の分布関数が冪乗分布であることを示唆する. また結果 (8) 式は, 問題 (P1) の Kadanoff らの予想が正しいことを意味する.

結果 (8) 式は, 直観的にはランダムウォークとの類推によって理解できるであろう. 等方的な場合, 距離 L だけ離れた場所に至るのにランダムウォーカーは平均 L^2 ステップを要するが, ある方向に少しでもバイアスがかけられると, 平均移動距離はステップ数に比例するようになる.²¹⁾

4. 非保存可換砂山モデル

次に問題 (P2) に答えよう. 正方格子上の粒子数非保存可換砂山モデルを次のように定義する.

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} 4\alpha\zeta & x=y \text{ のとき} \\ -\zeta & x \text{ と } y \text{ とが最近接のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

ただし α は1以上の有理数で, $\alpha\zeta$ が自然数となるように自然数 ζ を定める. 1回のトッピングの間に $4(\alpha-1)\zeta$ 個の粒子が消滅する ($\alpha=1$ で BTW モデルに帰着).

前節と同様になだれの継続時間の平均値 $\langle T \rangle$ を計算すると, $\alpha>1$ のとき

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle T \rangle = \frac{1}{4\zeta(\alpha-1)} < \infty \quad (10)$$

であることが示せる. 少しでも粒子消滅があると $\langle T \rangle$ は $L \rightarrow \infty$ でも発散しない, つまり系は臨界性を失ってしまうのである.¹⁵⁾

さらに, 高さ-高さ相関関数 $C_{11}(r)$ も計算できる. 距離 r だけ離れた2点 x と y を考える. そして, 定常状態において $z(x)=1$ である確率を $P_1(x)$, $z(x)=1$ かつ $z(y)=1$ である確率を $P_{11}(x, y)$ と書くことにすると, $C_{11}(r) = \lim_{L \rightarrow \infty} [P_{11}(x, y) - P_1(x)P_1(y)]$ と定義される. 前節で述べたような計算を行うことにより, $r \gg 1$ では

$$C_{11}(r) = \text{定数} \times \frac{e^{-r/\xi}}{r} \quad (11)$$

と求めることができた. ここで

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{2} \sinh^{-1} \sqrt{\alpha^2 - 1}} \sim (\alpha - 1)^{-1/2} \quad (12)$$

は相関長である.²⁶⁾ つまり $\alpha>1$ のときは, $C_{11}(r)$ は指数

関数的に減衰するのである。一方、粒子消滅がない場合 ($\alpha=1$) には $C_{11}(r) \sim r^{-4}$ であることが示せる。²²⁾ したがって (11) 式からも、少しでも粒子消滅があると臨界性が失われることが結論される。

パラメタ $\alpha (>1)$ が 1 に近い有理数であるときには、 ζ を大きな自然数とするので、1 回のトップリングで多数の粒子が四方に飛び散ることになる。そのうちのごく少数の粒子だけが消滅しても、なだれ全体の様子はさほど影響を受けないようにも思われるが、実際には $\alpha \neq 1$ のときには必ず臨界性が失われてしまうという結果は興味深い。

また、なだれの平均継続時間 $\lim_{L \rightarrow \infty} \langle T \rangle$ や相関長 ξ が $\alpha \rightarrow 1$ で冪乗発散することにより、 $\alpha \rightarrow 1$ での臨界性の出現は 2 次相転移的であることが分かる。

5. おわりに

本稿では、計算機シミュレーションの結果から提出された 2 つの予想が、ともに Dhar の厳密解の手法を用いて証明できたことを報告した。^{13, 15, 26)} 異方性のパラメタ c が 1 (等方的) からわずかにずれた場合や、粒子数保存がごくわずかだけ破れた場合 ($\alpha \neq 1$) を計算機シミュレートすることは、かなり難しい。²³⁾ このような場合に厳密解がその力を示すことになる。本研究で新たなパラメタを導入したことにより、元来はパラメタを持たなかった BTW モデルが、実は $c = \alpha = 1$ という特別な場合にあるという見方もできるようになった。特に非保存 ASM では、BTW モデルの SOC は $\alpha = 1$ での臨界現象ということになる。²⁶⁾

本稿で述べた ASM ではトップリングはすべて決定論的に行われたが、これを確率論的に行うこともできる。^{24, 25)} 1998 年のパリでの StatPhys 20 の総合講演で、Dhar は「確率論的トップリングを持つモデルでも演算子 $\{a(x)\}$ の可換性が保たれる場合がある。ただしその場合、演算子の間にある関係式が付加されてしまうので解析を進める上で新たな困難が生じる」という指摘をした。⁸⁾ これ以外にも、文献 8 にはいくつも興味深い問題提起がある。

参考文献

1) P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld: Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 381; Phys. Rev. A **38** (1988) 364.

2) 中西 秀: 日本物理学会誌 **49** (1994) 267.
 3) 香取眞理: 『複雑系を解く確率モデル』(講談社, 1997).
 4) P. Bak: *How Nature Works* (Oxford Univ. Press, 1997).
 5) H. J. Jensen: *Self-Organized Criticality* (Cambridge Univ. Press, 1998).
 6) R. Dickman, A. Vespignani and S. Zapperi: Phys. Rev. E **57** (1998) 5095 は、4) の Bak の本にあるように SOC で “how nature works” が説明されたとすると、今度は “how SOC works” に答えることが急務である、とコメントしている。
 7) D. Dhar: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1613.
 8) D. Dhar: Physica A **263** (1999) 4.
 9) E. V. Ivashkevich and V. B. Priezzhev: Physica A **254** (1998) 97.
 10) 国内では小川泰先生のグループが独自の研究を進めている。佐々木亘、小川 泰: 日本物理学会第 52 回年会, 1997, 28a-YJ-10. 萩野真一, 小川 泰: 日本物理学会 1997 年秋の分科会, 6p-YE-15. 木内 豊: 物性研究 **71-1** (1998) No. 10, 63.
 11) L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu and S.-M. Zhou: Phys. Rev. A **39** (1989) 6524.
 12) P. Ghaffari, S. Lise and H. J. Jensen: Phys. Rev. E **56** (1997) 6702.
 13) T. Tsuchiya and M. Katori: J. Phys. A **32** (1999) 1629; Physica A **266** (1999) 358.
 14) 鎌倉徳計, 本田勝也: 日本物理学会第 50 回年会, 1995, 28p-C-14. 寺尾卓也, 本田勝也: 日本物理学会 1997 年秋の分科会, 8a-YD-10.
 15) T. Tsuchiya and M. Katori: Phys. Rev. E **61** (2000) 1183.
 16) 1 次元系では、隣接格子点間の砂山の高さの差 (勾配) を表すと言った方が正確であるが、ここでは説明を簡単にするために、高さを表すものとする。
 17) 不安定配置 $\mathcal{C} = \{z(x)\}$ において、2 つの格子点 v と w とがともに不安定であったとする。まず格子点 v をトップルさせると配置は $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_v = \{z(x) - \mathcal{I}(v, x)\}$ となる。 \mathcal{C}_v においても格子点 w は不安定なので、次に w をトップルさせると $\mathcal{C}_v \rightarrow \mathcal{C}_{vw} = \{z(x) - \mathcal{I}(v, x) - \mathcal{I}(w, x)\}$ となる。逆にまず w をトップルさせてから次に v をトップルさせたとすると、配置 $\mathcal{C}_{wv} = \{z(x) - \mathcal{I}(w, x) - \mathcal{I}(v, x)\}$ を得るが、明らかに $\mathcal{C}_{vw} = \mathcal{C}_{wv}$ である。つまり、異なる格子点でのトップリングは可換である。また摂動は 1 カ所だけ z の値を増やすものなので、それとトップリングも可換である。
 18) 香取眞理: 粉体工学会第 18 回計算粉体力学グループ会, 1999, 同志社大。
 19) S. N. Majumdar and D. Dhar: Physica A **185** (1992) 129.
 20) 例えば $c = 1.01$ に対しては、 $\zeta = 100$ とせよ。これは、(2) 式で $c = 1$, $\zeta = 100$ とした等方的なモデルに 1% の異方性に加えられたものである。(3) 式からわかるように、 ζ が 100 倍されても $\langle T \rangle$ は 1/100 になるだけで、以下で議論する L 依存性は変わらない。
 21) S. Havlin and D. Ben-Avraham: Adv. Phys. **36** (1987) 695.
 22) S. N. Majumdar and D. Dhar: J. Phys. A **24** (1991) L357.
 23) 島村美裕紀, 土屋智子, 香取眞理: 日本物理学会第 54 回年会, 1999, 28p-XF-5. S. S. Manna, L. B. Kiss and J. Kertész: J. Stat. Phys. **61** (1990) 923.
 24) S. S. Manna: J. Phys. A **24** (1991) L363.
 25) H. Kobayashi and M. Katori: J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 2536, **66** (1997) 2367.
 26) M. Katori: 投稿準備中。

(1999 年 10 月 4 日原稿受付)