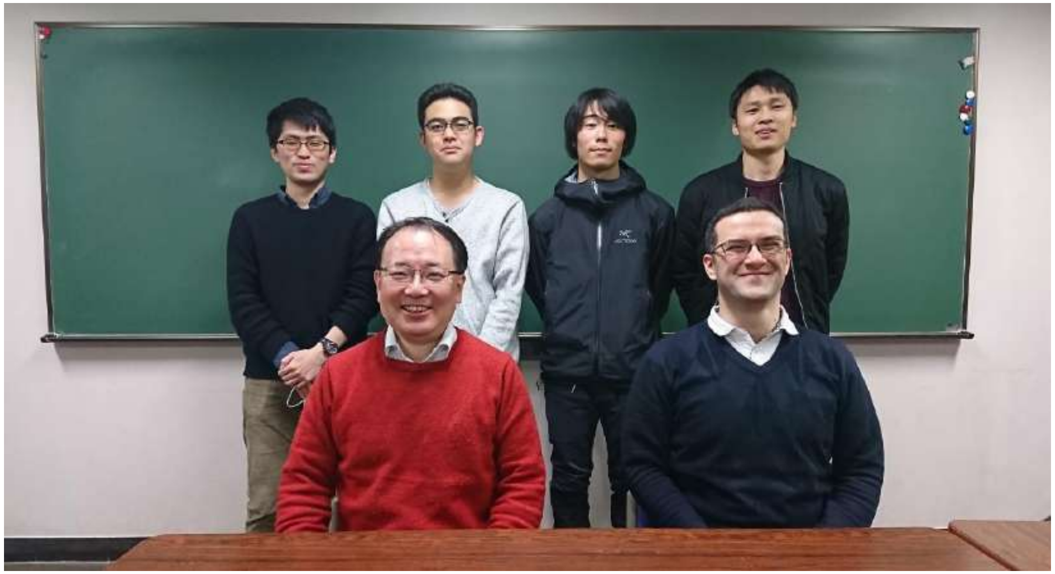
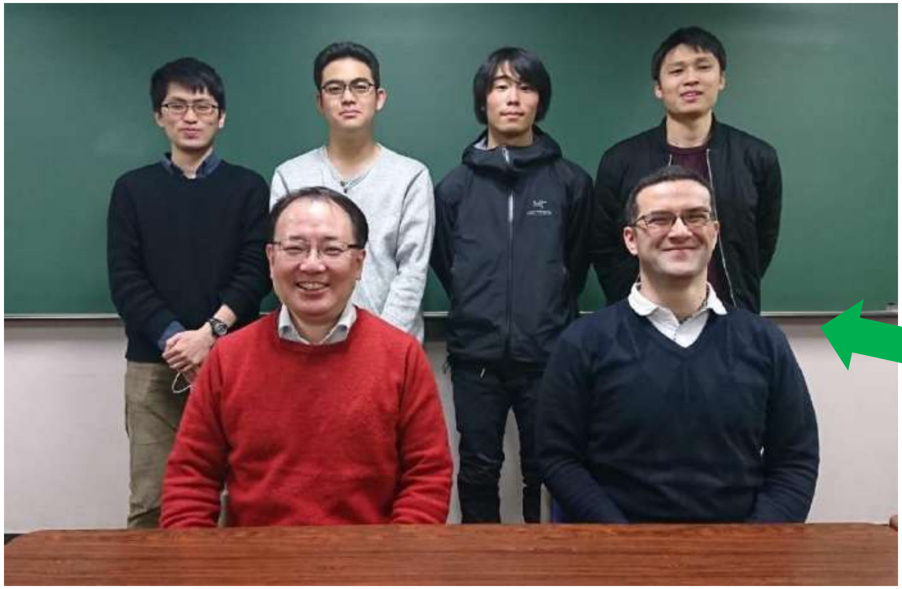
香取研究室
（統計物理学・数理物理学研究室）
卒業研究・大学院紹介



2018年10月25日（木）

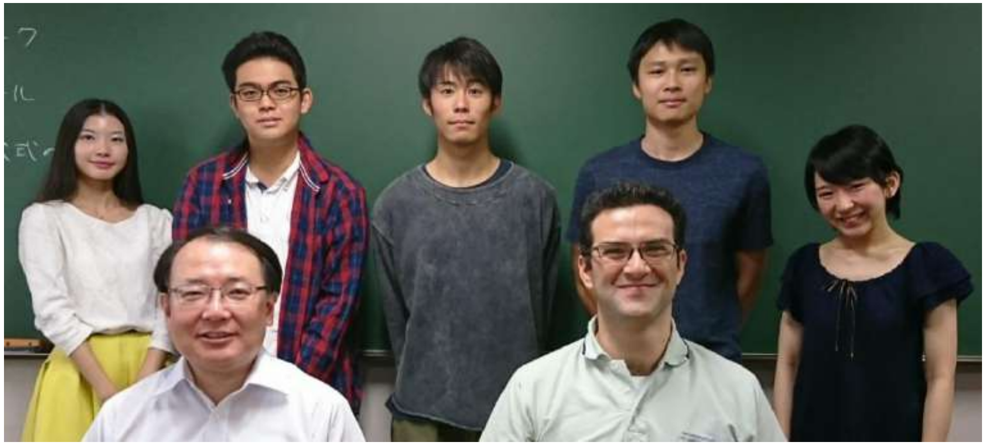
香取眞理



現在の研究室メンバー

助教　アンドラウスさん
コロンビア出身
中央大院修士（香取研）OB

今年は在外研究のため卒研はしていません。下は昨年度の卒研メンバーの写真です。女性は二人とも他大学の大学院に行ってしまいました・・・



揺らぎの研究：

揺らぎの統一理論を目指して

私は揺らぎの物理と数学に興味があります.

量子力学での揺らぎは**不確定性**から生じる原理的なものであり,

統計力学での揺らぎは情報の縮約によって生じる**ランダム性**から発生するものです.

このように, 量子力学における揺らぎと統計力学における揺らぎとは, 全く別物のように見えますが,

無限個の粒子の量子状態を扱う**量子場の理論**や,

散逸を伴う非可逆な現象を扱う**非平衡統計力学**を考えていくと,

不思議なことに両者の違いは薄れ, むしろ両者に共通する**揺らぎの本質論**に迫らなければならなくなります.

注：数学の分野で言うと「確率論（確率解析）」の研究と重なります.

来年度（2019年度）の卒業研究のテーマ
「ランダム行列理論」(Random Matrix Theory)

- ランダム行列とは成分が乱数(確率変数)である行列 (**「乱行列」**)のこと.
- こうなると何もかもハチャメチャでめちゃくちゃになってしまいそうだが，不思議なことに，行列のサイズを無限大にしていくと，**とても美しい確率法則**が現れる.
- この法則は綺麗なだけでなく**普遍的**で，さまざまな物理現象を説明する上で有効.
  原子核理論，ゲージ理論(量子色力学)，乱れた電子系(アンダーソン局在)，スピングラス，量子輸送現象，量子カオス，対数ガスの統計力学，粗い界面の成長，交通流モデルなど，**物理学での応用は幅広い**.
- 数学の分野でも**数論，数え上げ組合わせ論，群の表現論，多変数統計学，**
  工学の分野でも**通信理論**や**ネットワーク理論**，その他，
  経済・社会学，生物学，生態学の分野でも応用が広がっている.

重要なポイント：
私もアンドラウスさんも，現在，「ランダム行列理論の確率過程への応用とその拡張」をメインの研究テーマにしています.

Focus: How Animals Avoid Each Other

November 12, 2010 • *Phys. Rev. Focus* 26, 20

Foraging animals or other randomly moving entities can more easily avoid each other by taking more long-distance jumps, according to theoretical results, which may also apply to epidemics and database searches.

National Geographic/Punchstock

Vicious Lévy Flights

Igor Goncharenko and Ajay Gopinathan

Phys. Rev. Lett. 105, 190601 (2010)

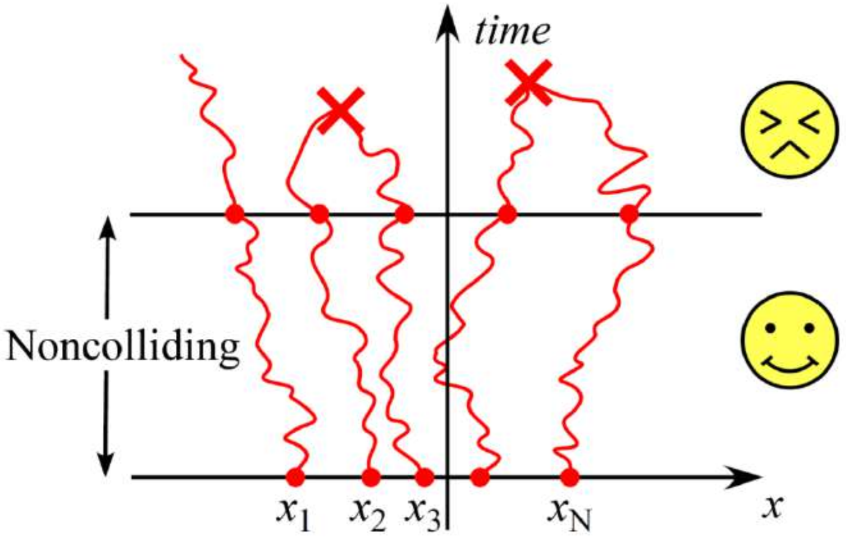
Published November 5, 2010

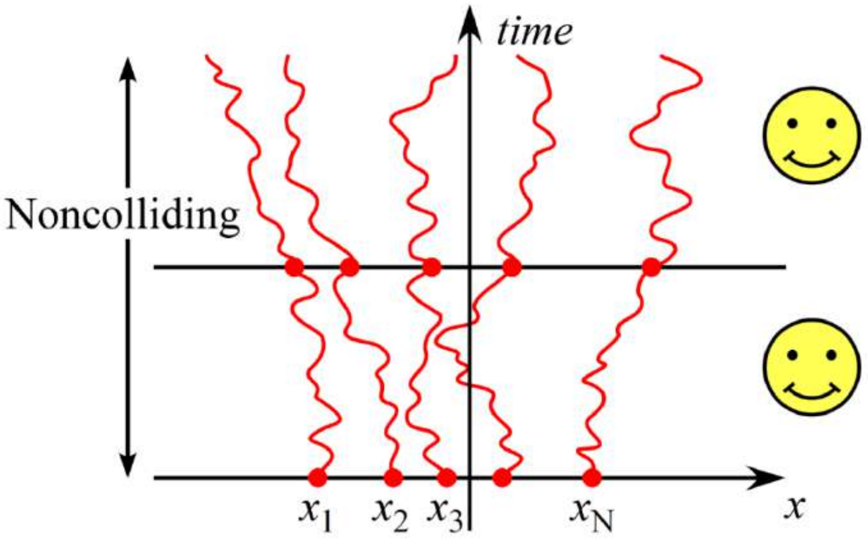
APS (アメリカ物理学会）web page より転写　https://physics.aps.org/story/v26/st20

References

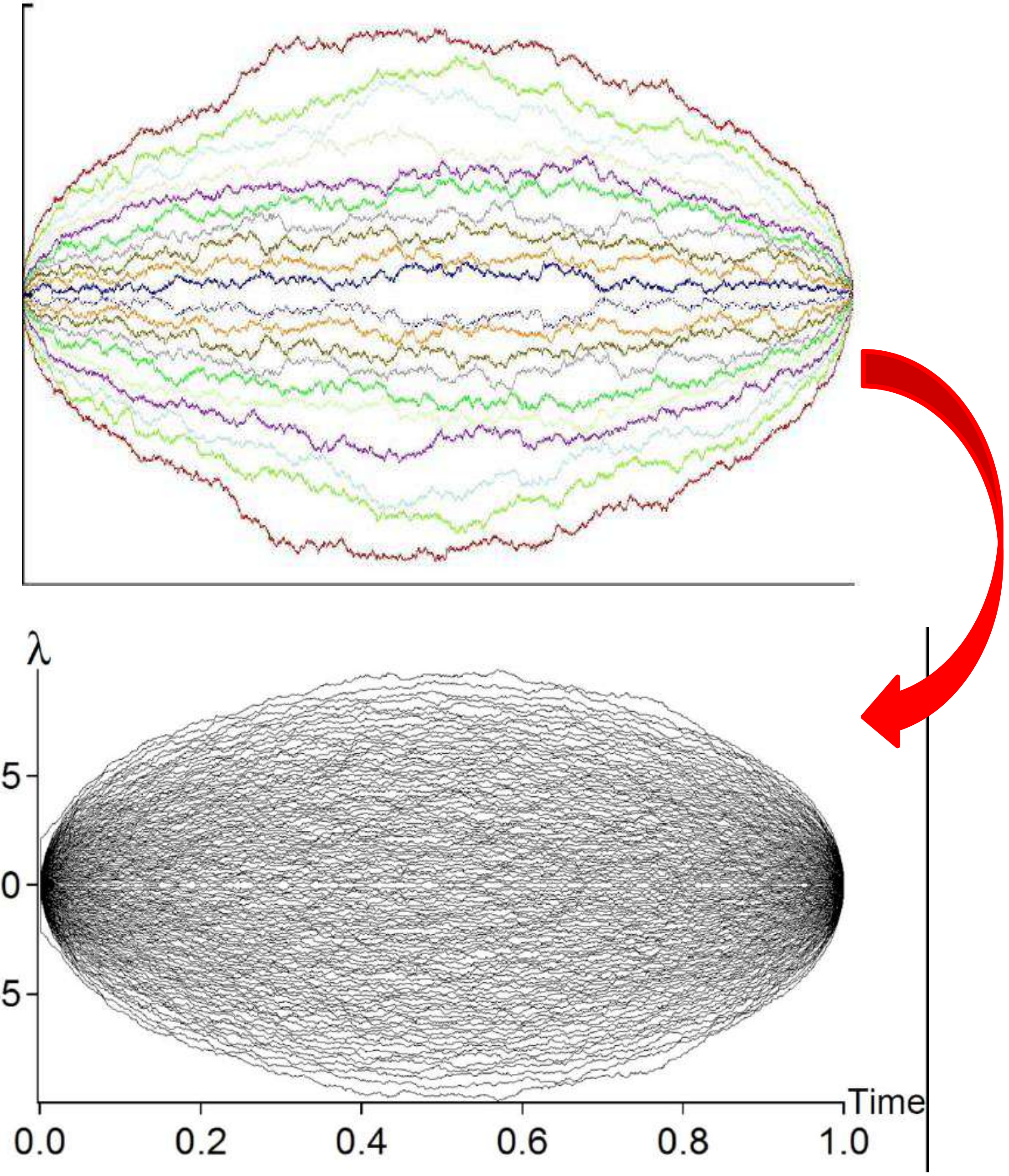
1. N. E. Humphries et al., “Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators,” Nature (London) 465, 1066 (2010)
2. F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra, and G. M. Viswanathan, “Optimizing the Encounter Rate in Biological Interactions: Lévy versus Brownian Strategies,” Phys. Rev. Lett. 88, 097901 (2002)
3. J. Cardy and M. Katori, “Families of Vicious Walkers,” J. Phys. A 36, 609 (2003)

https://physics.aps.org/story/v26/st20[2015/11/20 11:33:02]





（1次元上の）動的な棲み分けの問題

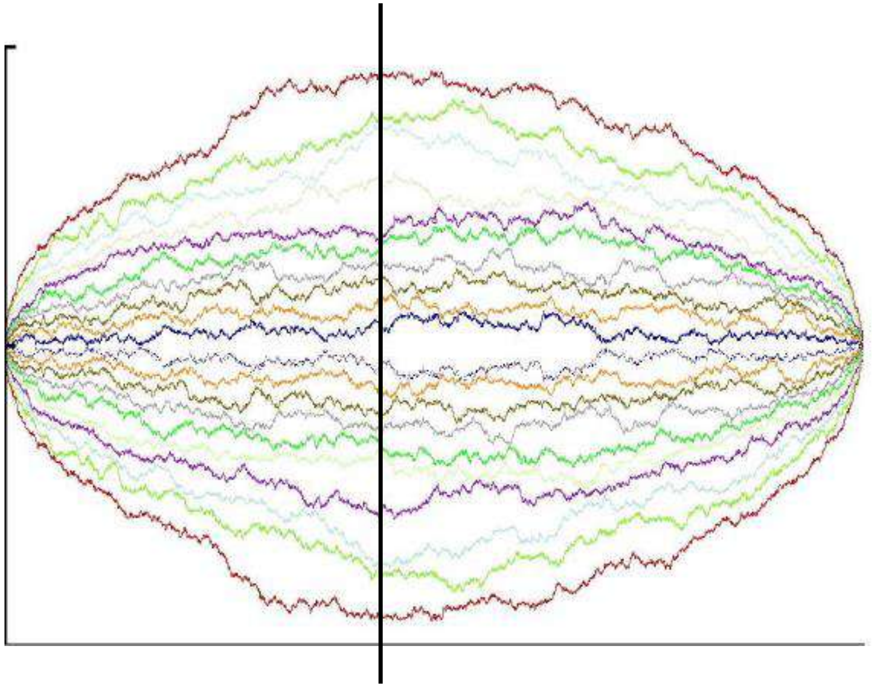


「ランダム行列の空間のブラウン運動」から
固有値の軌跡の集団を
抽出する

行列のサイズ*N*
（＝軌跡の本数）
を大きくすると，軌跡の集合に独特のパターンが現れる.

N を無限大にすると，
どうなるのであろうか？

新しいタイプの
大数の法則と
中心極限定理
（ガウスを超える！）



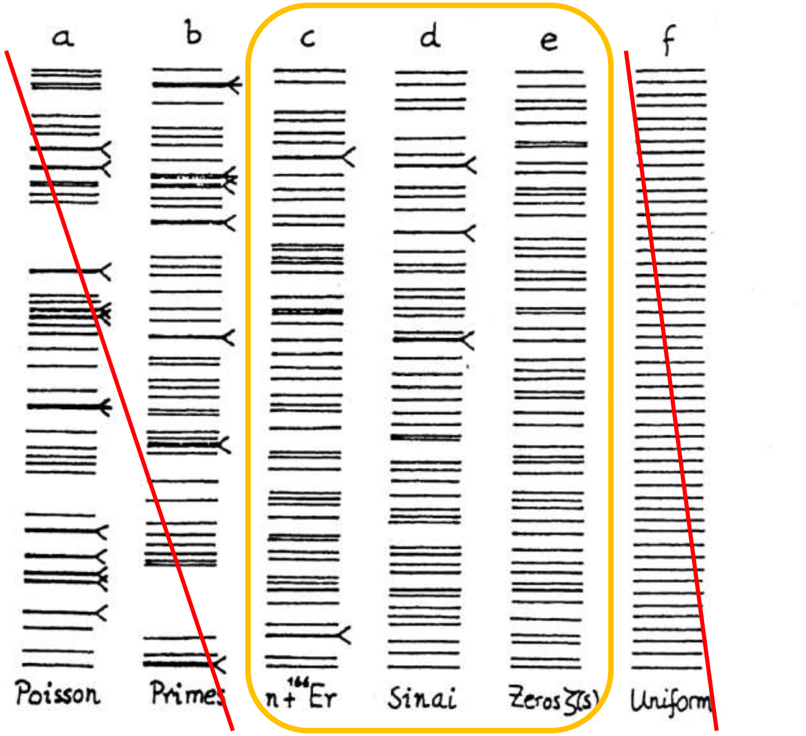


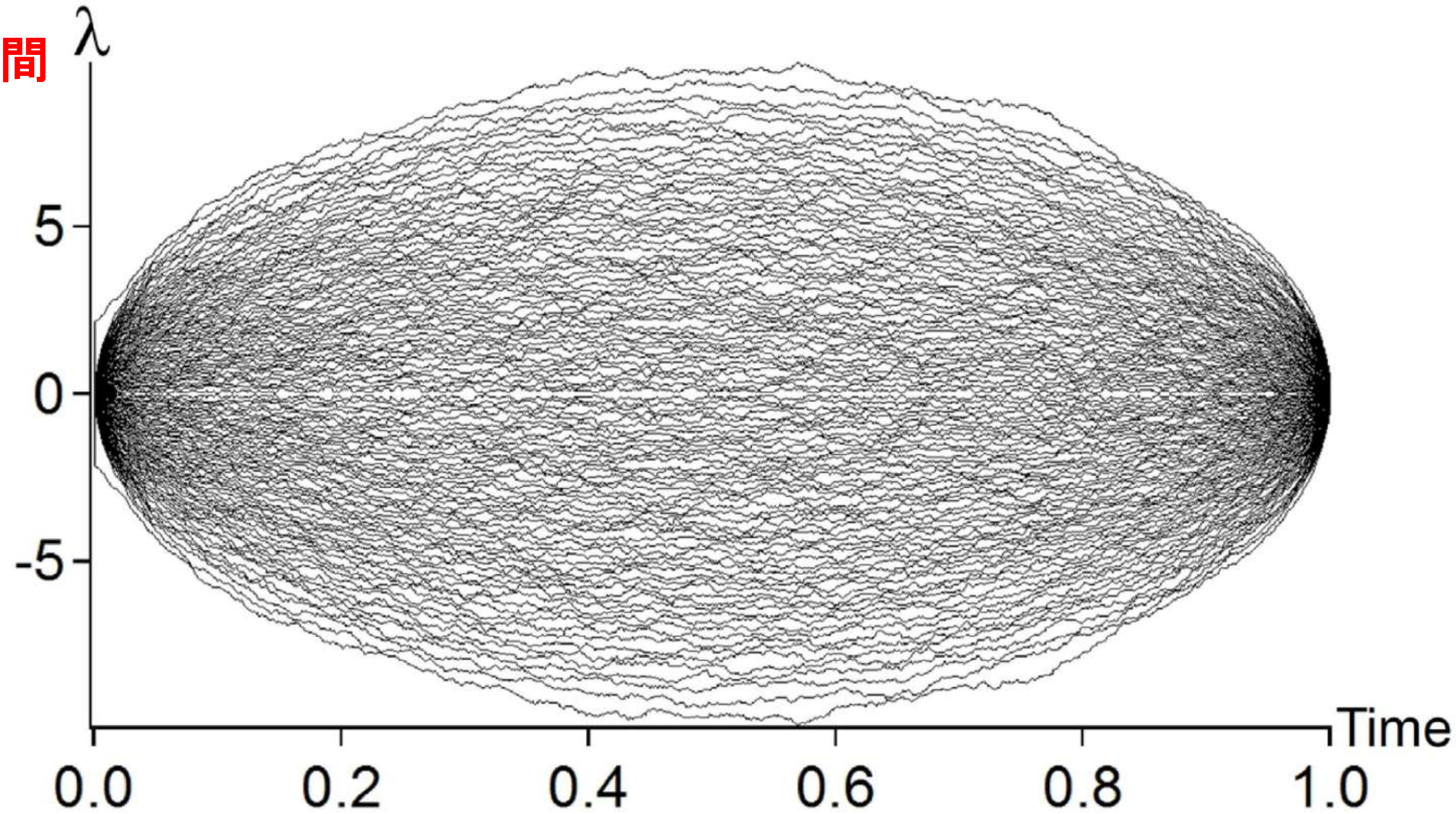
Figure 1.2. Some typical level sequences. From Bohigas and Giannoni (1984). (a) Random levels with no correlations, Poisson series. (b) Sequence of prime numbers. (c) Slow neutron resonance levels of the erbium 166 nucleus. (d) Possible energy levels of a particle free to move inside the area bounded by 1/8 of a square and a circular arc whose center is the mid point of the square; i.e. the area specified by the inequalities, $y \geqslant 0$, $x \geqslant y$, $x \leqslant 1$, and $x^2 + y^2 \geqslant r$. (Sinai's billiard table.) (e) The zeros of the Riemann zeta function on the line Re $z = 1/2$. (f) A sequence of equally spaced levels (Bohigas and Giannoni, 1984).

M.L.Mehta, Random Matrices, 3rd ed., Elsevier, 2004; p.11 より転写

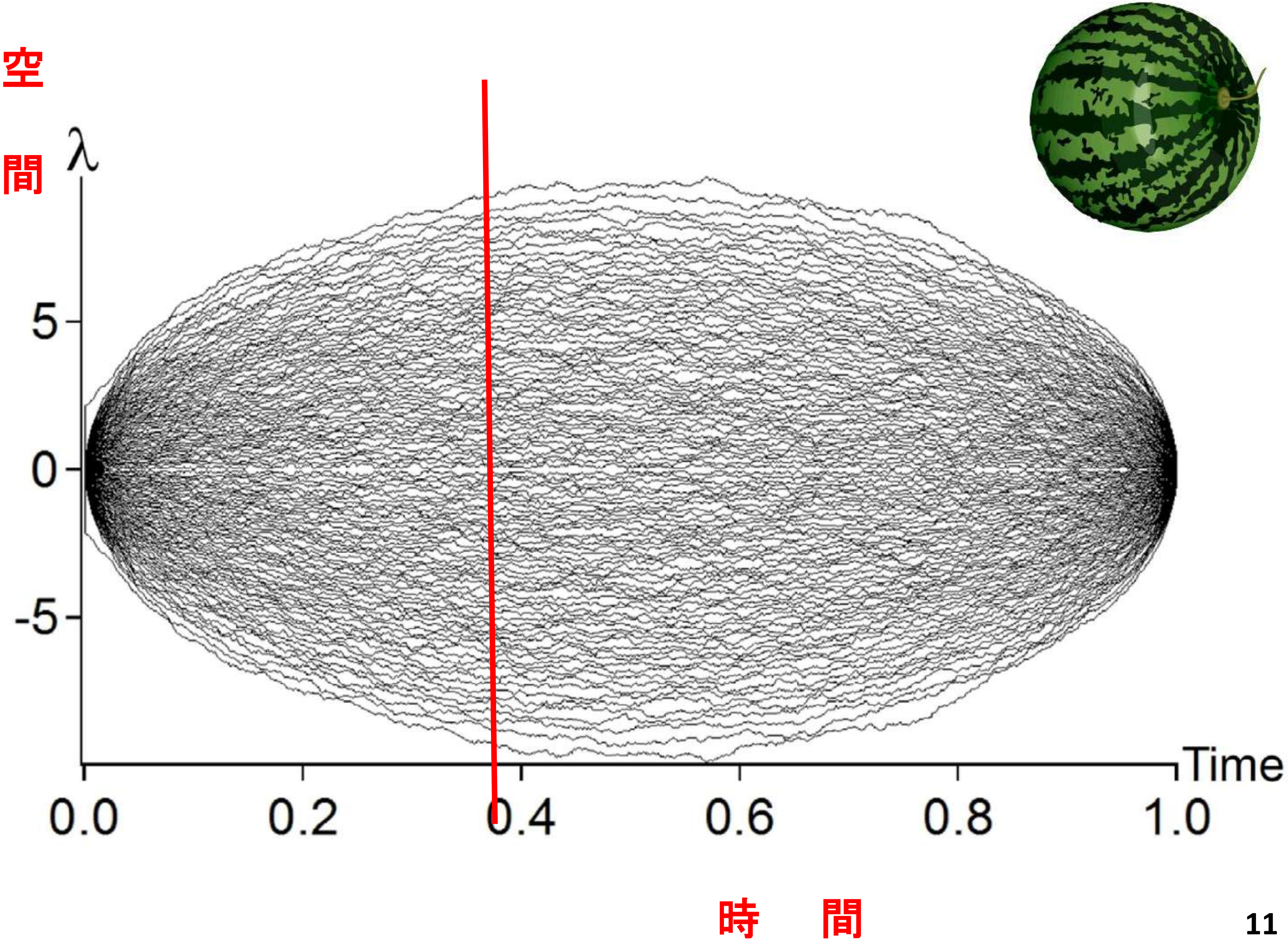
空

間

小林奈央樹氏（日大）作図



時　間


空
間
λ
5
0
-5
Time
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
時　間

Theorem 1 (Wigner の半円則)

$N \to \infty$ の極限で，各時刻 $t > 0$ ごとに粒子密度関数 $\rho(t, x)$ は次のように与えられる．

$$\rho(t,x) \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{2t}}\sqrt{2N - \dfrac{x^2}{2t}}, & \text{if } -2\sqrt{Nt} \le x \le 2\sqrt{Nt}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 各ブラウン運動の分散は $\sqrt{t}$.
- N 粒子非衝突BMでは，**棲み分けの効果**（粒子間斥力）のため $2\sqrt{N}$ 倍される．
- $-2\sqrt{Nt} \le x \le 2\sqrt{Nt}$ の範囲に集中し，その外には存在しない．
  (有限な support を持った分布則.)

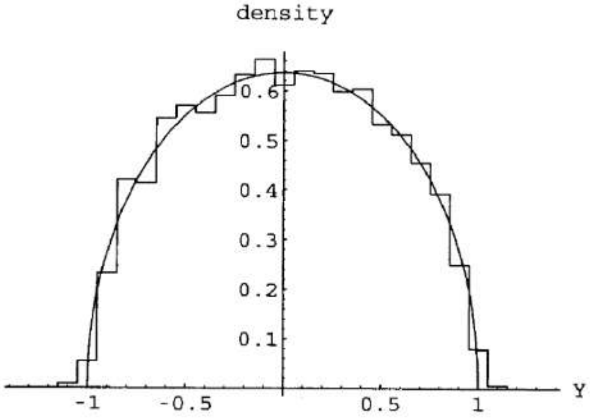
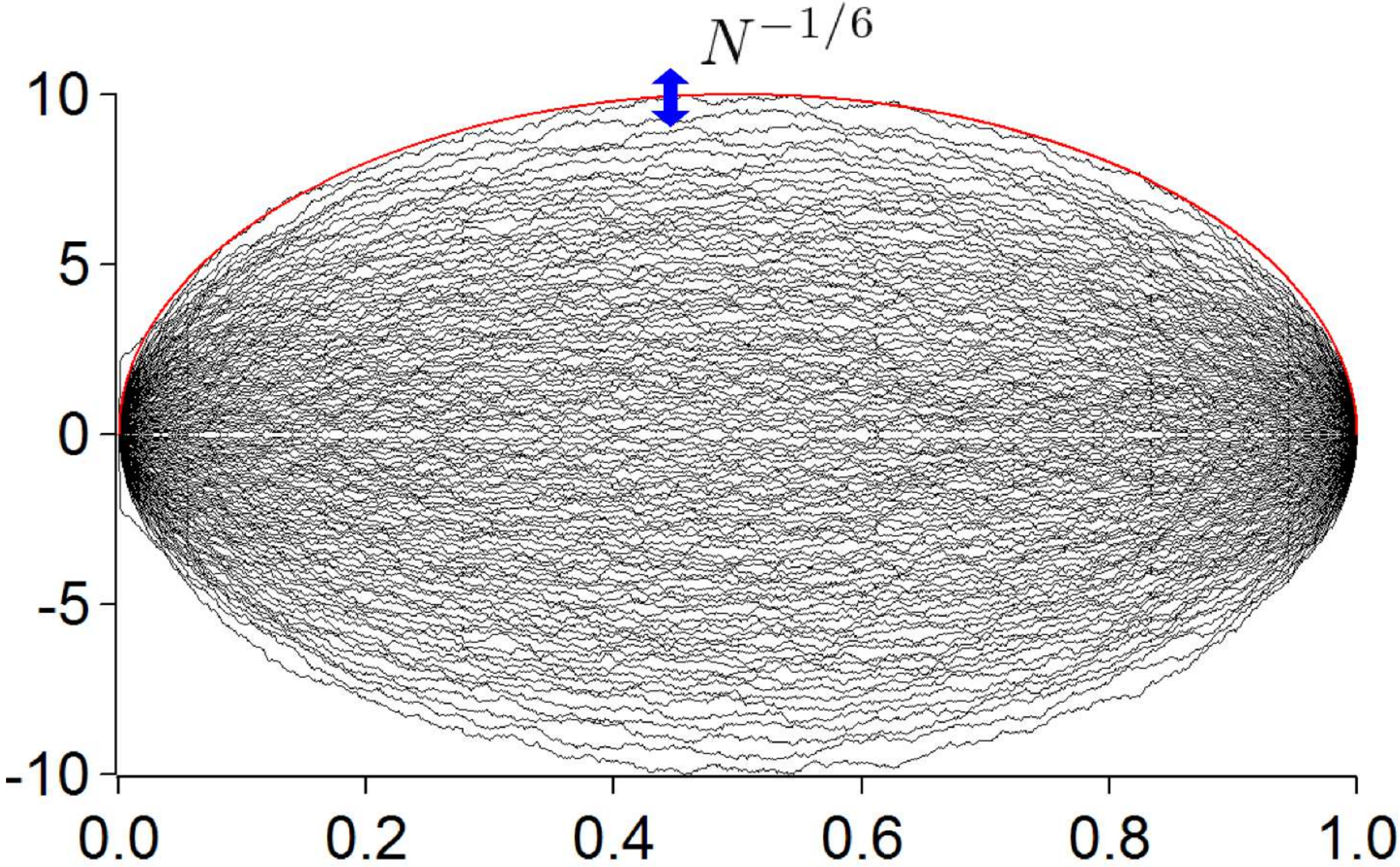


Figure 1.1 Empirical demonstration of the Wigner semicircle law for 10 × 10 matrices from the GUE.

P.J.Forrester, `Log-Gases and Random Matrices’ (2010)より引用

一番外側の粒子の経路（soft edge）の揺らぎの分布に着目



Theorem 2 (Tracy-Widom 分布)

$\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$ を $\mathbf{0}$ からスタートした非衝突BM $\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_N(t)), t\geq 0$ の確率測度とする.
(i) 次の極限分布が存在する

$$F_{\mathrm{TW}}(x)\equiv\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}^{\mathbf{0}}\left[\frac{\max_{1\leq j\leq N}X_j(t)-2\sqrt{Nt}}{t^{1/2}\boxed{N^{-1/6}}}<x\right],\quad x\in\mathbb{R}.$$

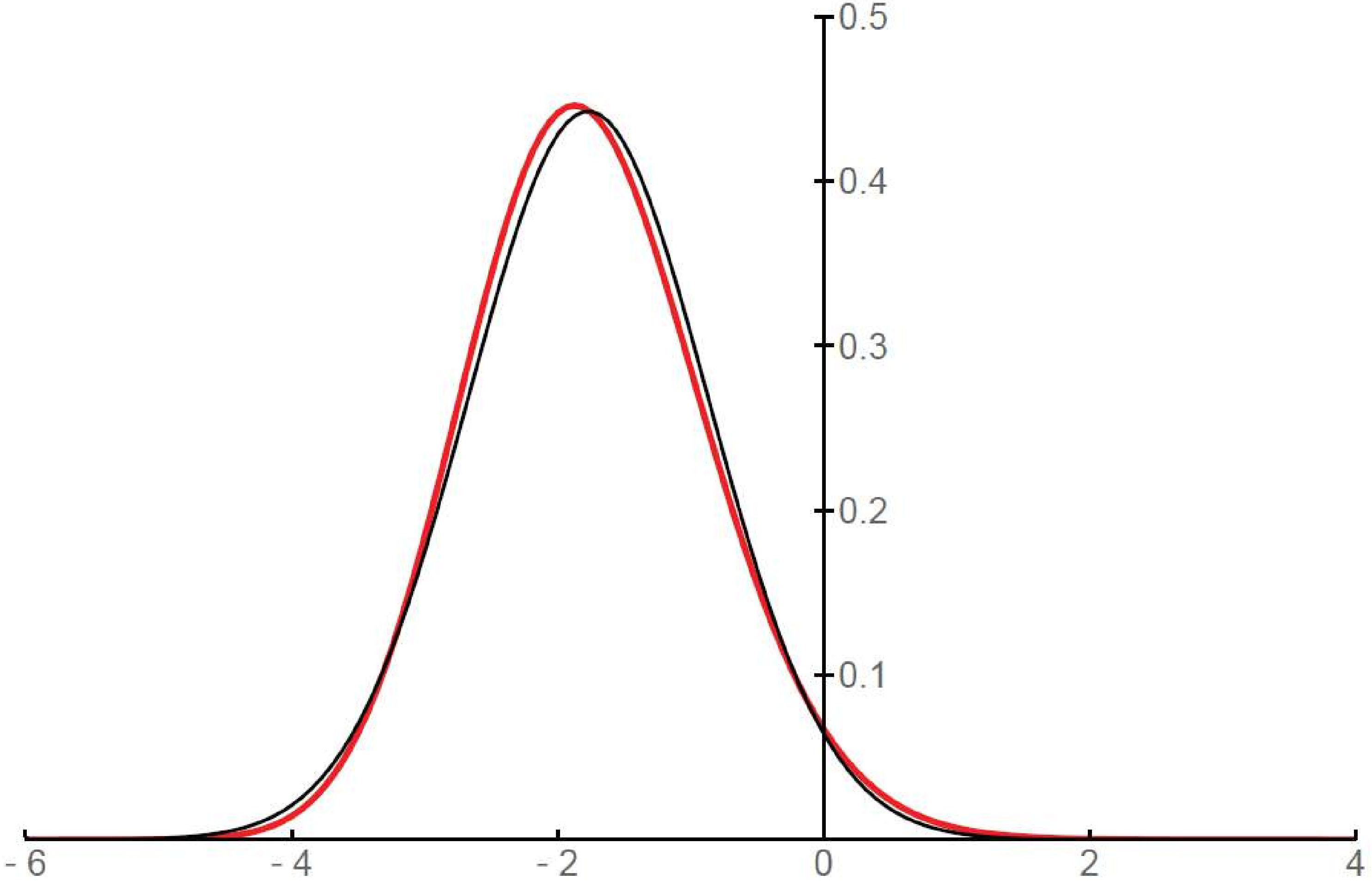
この分布を **Tracy-Widom** 分布という.
(ii) $F_{\mathrm{TW}}(x)$ は次の表現をもつ.

$$F_{\mathrm{TW}}(x)=\exp\left(-\int_x^\infty(u-x)f_{\mathrm{HM}}(u)^2du\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

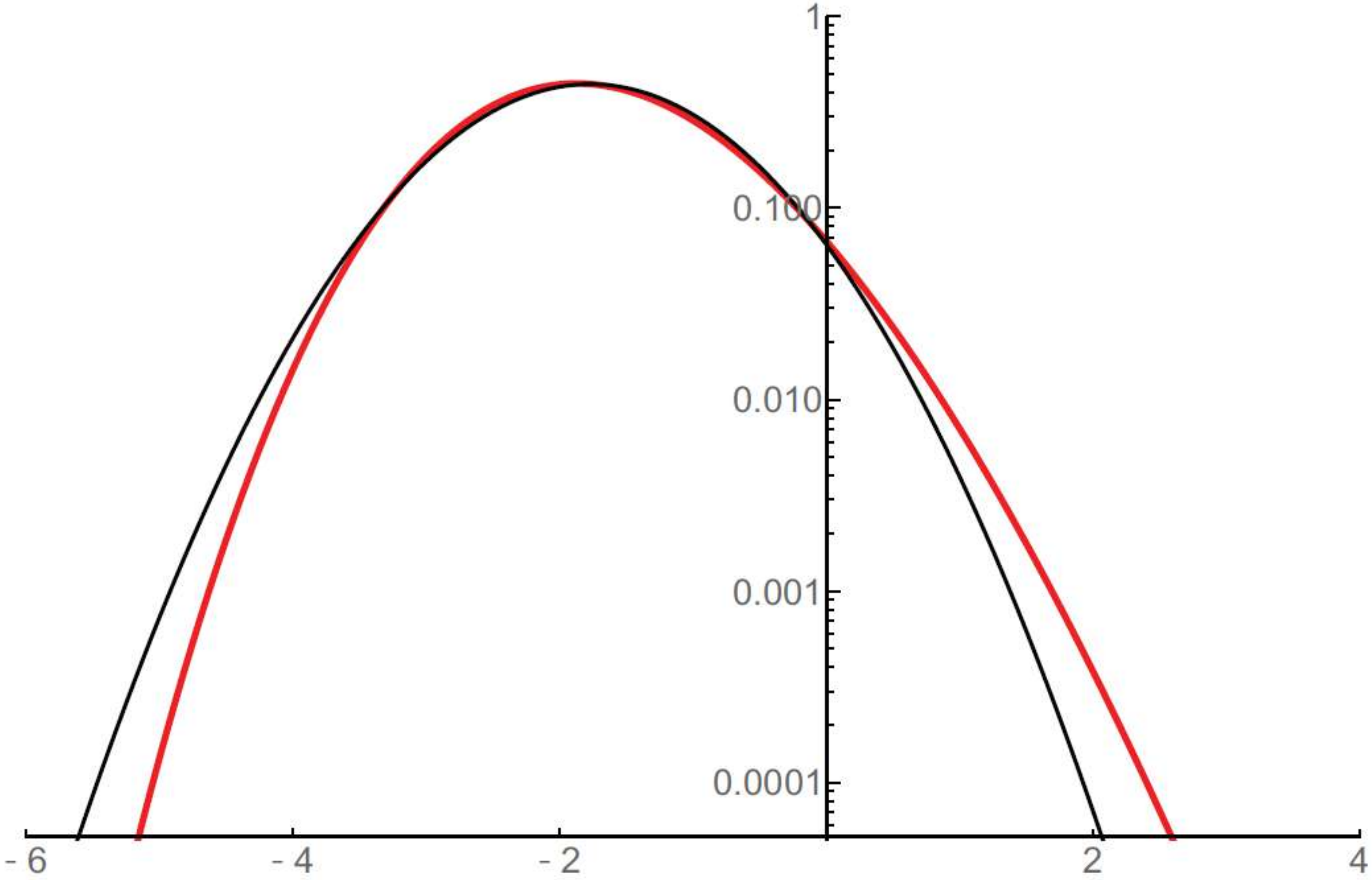
ここで，$f_{\mathrm{HM}}(u)$ は，Painlevé II 方程式

$$f''(u)=uf(u)+2f(u)^3$$

の解で, $u\to\infty$ で $f(u)\simeq\mathrm{Ai}(u)$ となるものである. $\mathrm{Ai}(x)$ は Airy 関数 $\mathrm{Ai}(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\cos\left(\frac{k^3}{3}+kx\right)dk.$
この解は唯一定まり，**Hastings-McLeod** 解とよばれる.



赤曲線：Tracy-Widom 分布
黒曲線：平均と分散を一致させたガウス分布



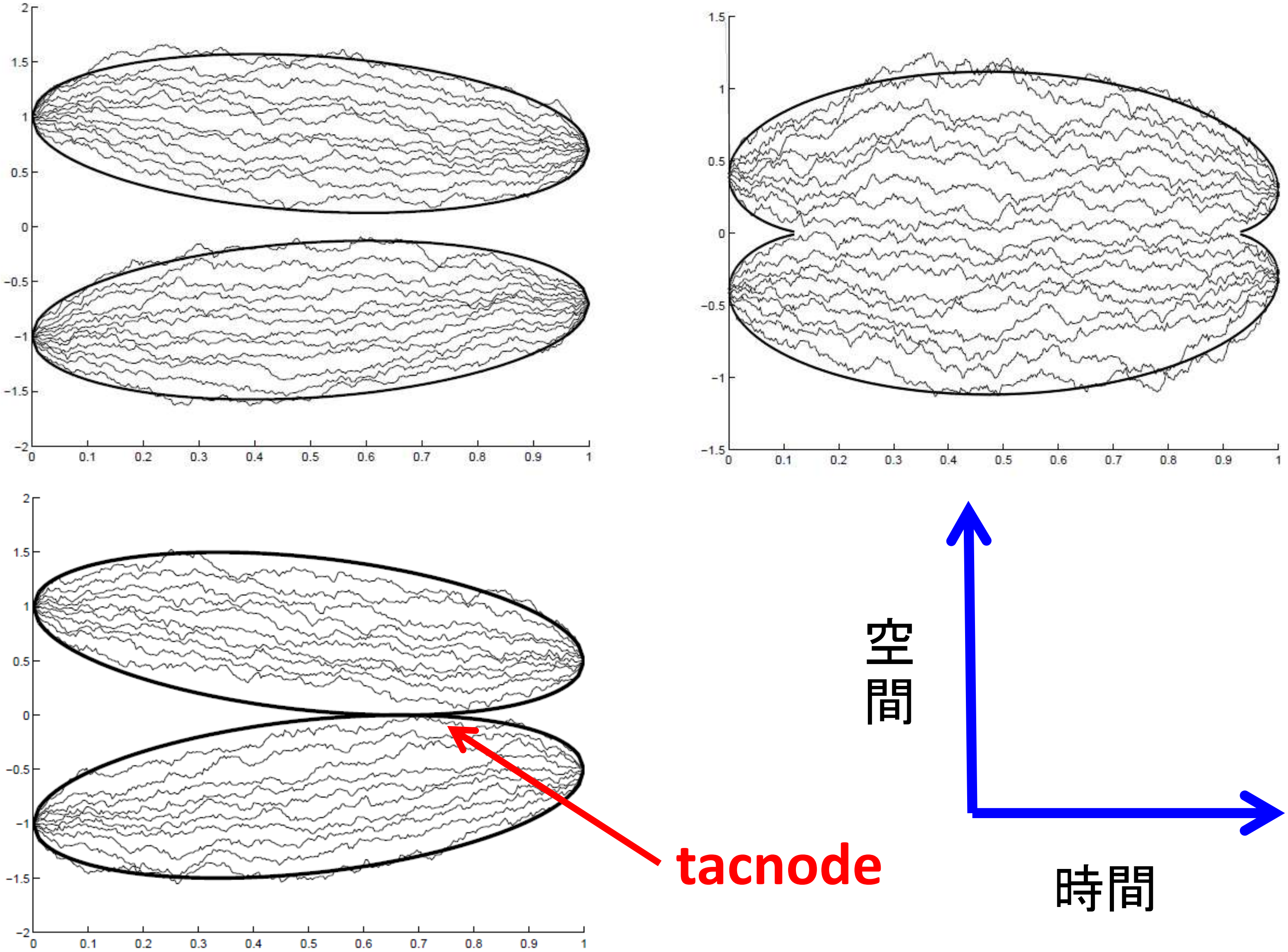
赤曲線：Tracy-Widom 分布

黒曲線：平均と分散を一致させたガウス分布

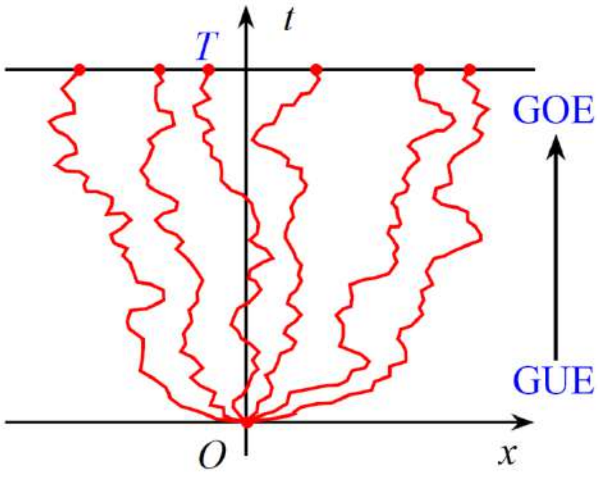
片対数プロットすると違いが良く見える.

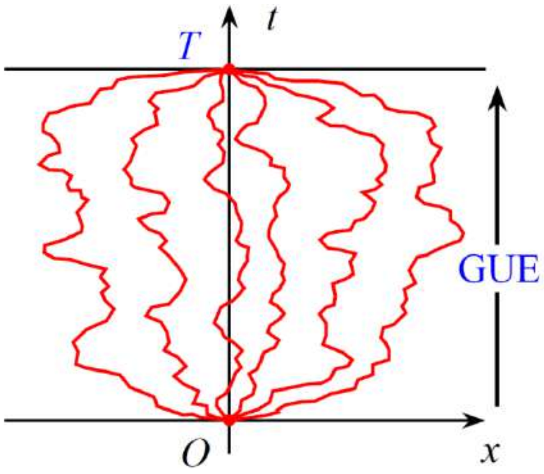
初期配置（と終配置）を変えると，いろいろなパターンが実現する.

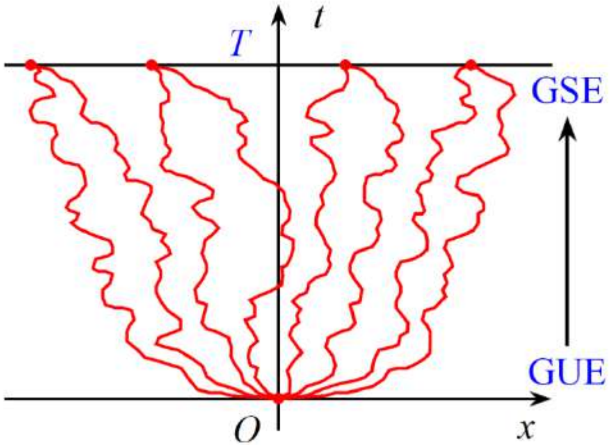
Delvaux, Kuijlaars, Zhang: Commun. Pure Appl. Math. **64** (2011) 1305 より引用

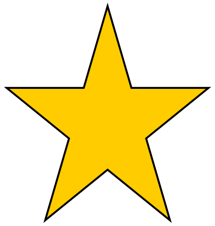


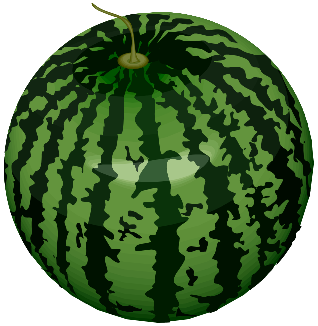
非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー
⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)







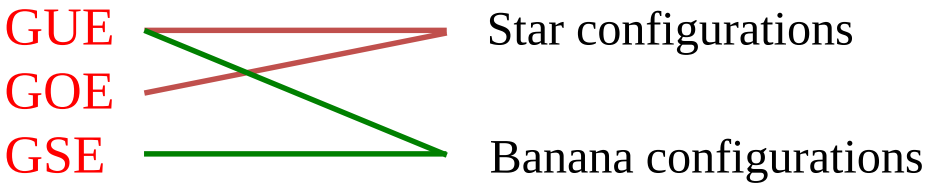




ViciousWalks/Random Matrix 対応

- There are 10 CLASSES of Gaussian Random Matrix Theories.

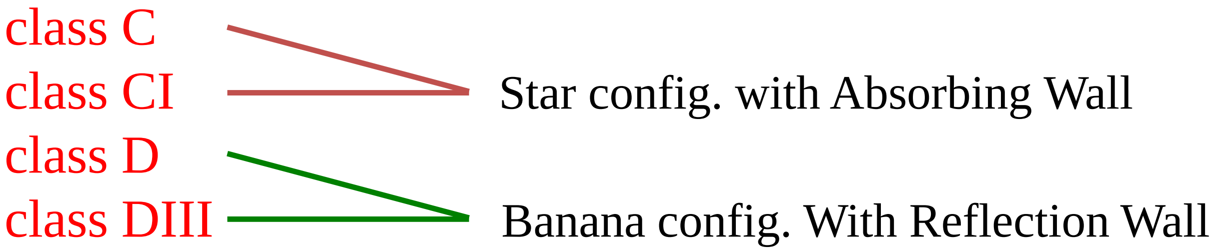
Standard (Wigner-Dyson)


GUE
GOE
GSE
Star configurations
Banana configurations

Nonstandard (chiral random matrices) Particle Physics of QCD


chGUE
chGOE
chGSE
Realized by Noncolliding Systems of
2D **Bessel processes** and **Generalized Meanders**

Nonstandard (Altland-Zirnbauer) Mesoscopic Physics with Superconductivity


class C
class CI
class D
class DIII
Star config. with Absorbing Wall
Banana config. With Reflection Wall

All of the 10 eigenvalue-distributions can be realized by the Noncolliding Diffusion Particle Systems (Vicious Walks).

Katori and Tanemura, J.Math.Phys.(2004)

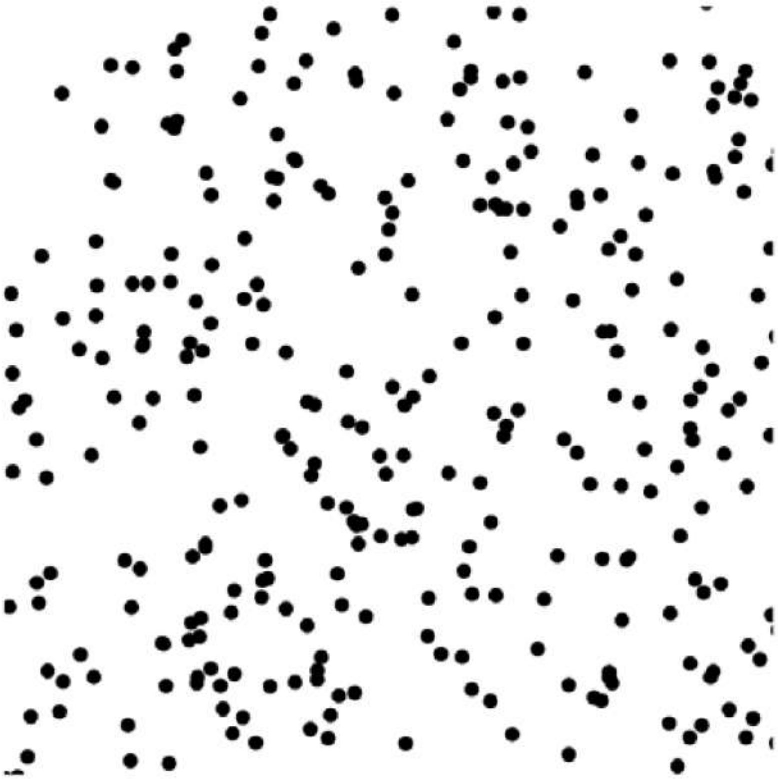


図１：Poisson 点過程．平面上の一様ランダムな点の配置であるが，実現した配置には粒子分布の空間的な粗密が見られる．

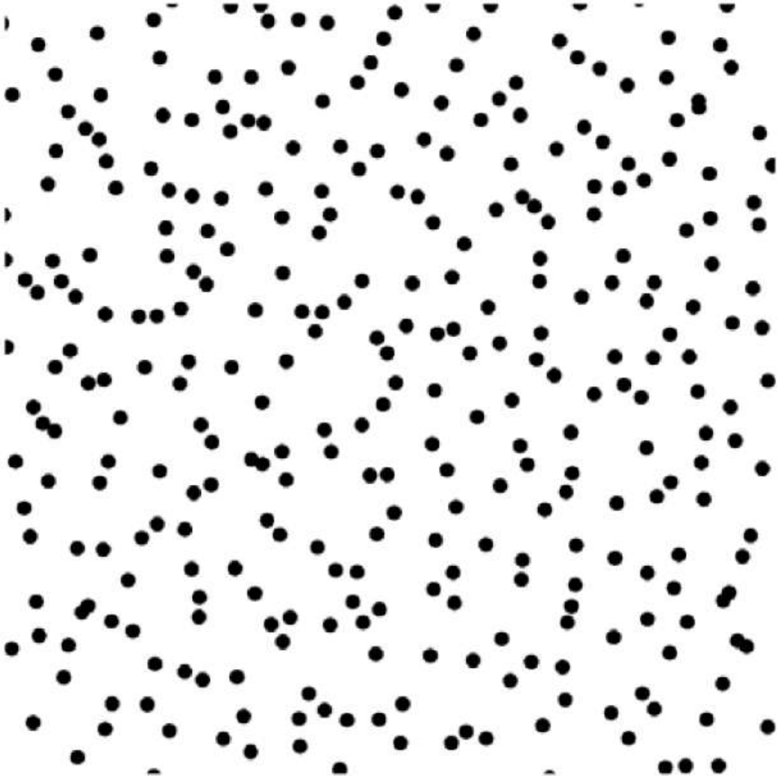


図２：複素ランダム行列の複素平面上の固有値分布として実現される Ginibre 点過程．粒子間に斥力相互作用が働き，棲み分けが実現している．（粒子数密度は図１と同じ．）

２次元上の静的な棲み分けの問題

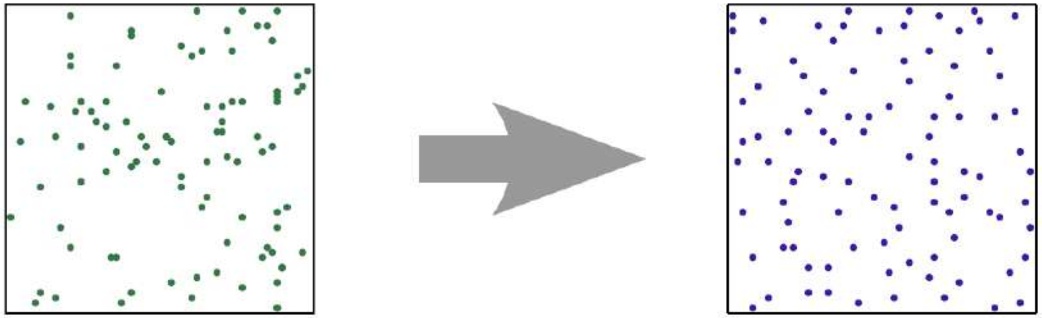


Figure 2: On the left, points are sampled randomly; on the right, repulsion between points leads to the selection of a diverse set of locations.

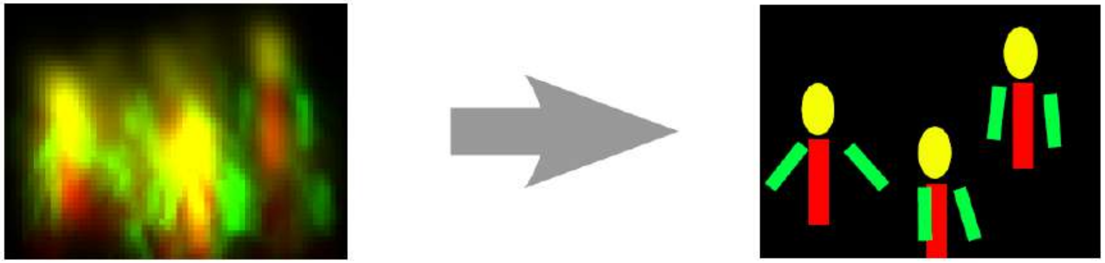


Figure 3: On the left, the output of a human pose detector is noisy and uncertain; on the right, applying diversity as a filter leads to a clean, separated set of predictions.

Kulesza, A., Taskar, B.: Determinantal point processes for machine learning. Foundations Trends Mach. Learn. **5**, 123–286 (2012)

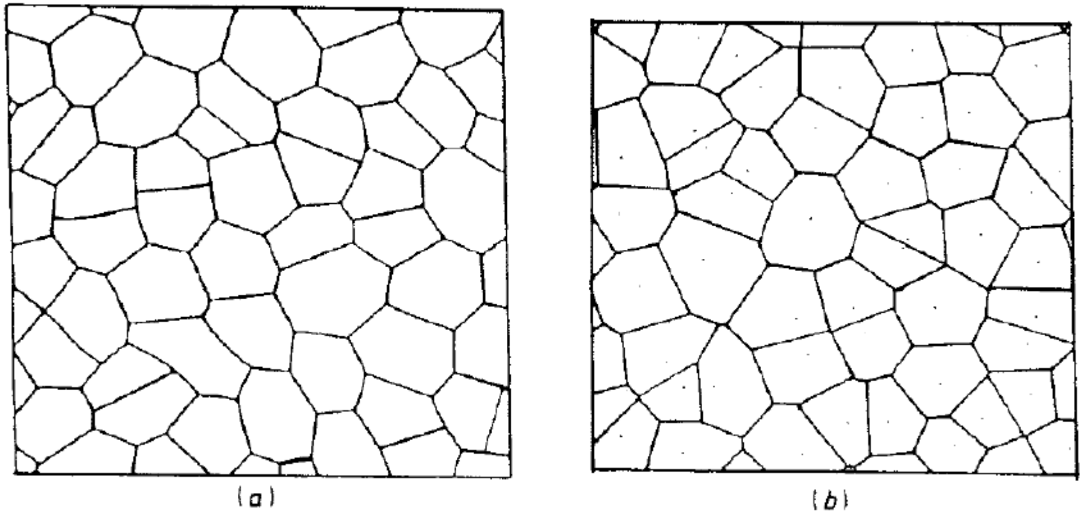
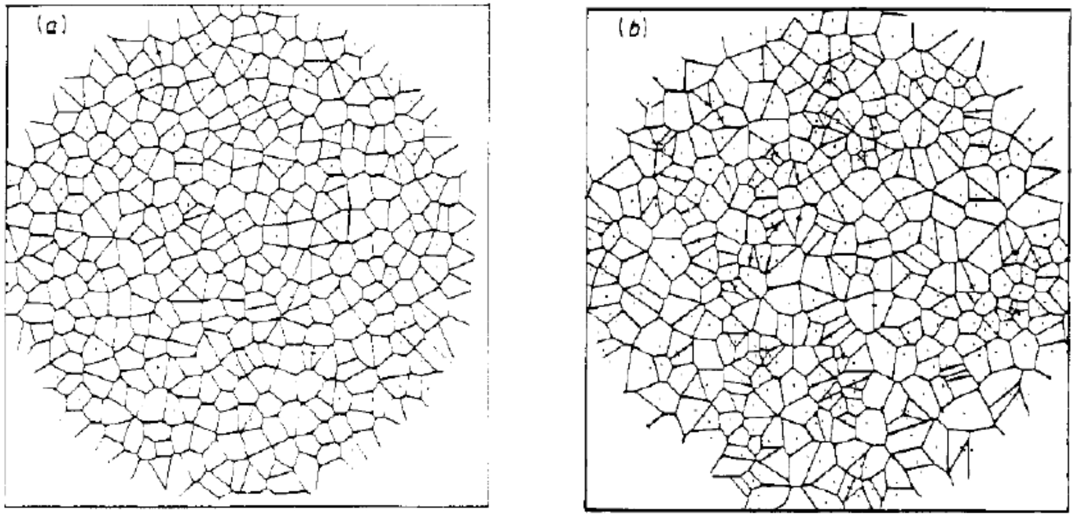


Figure 1. (*a*) Cells from the epidermal epithelium of the cucumber (after Lewis 1928). (*b*) Voronoi tessellation generated from a complex Gaussian random matrix.



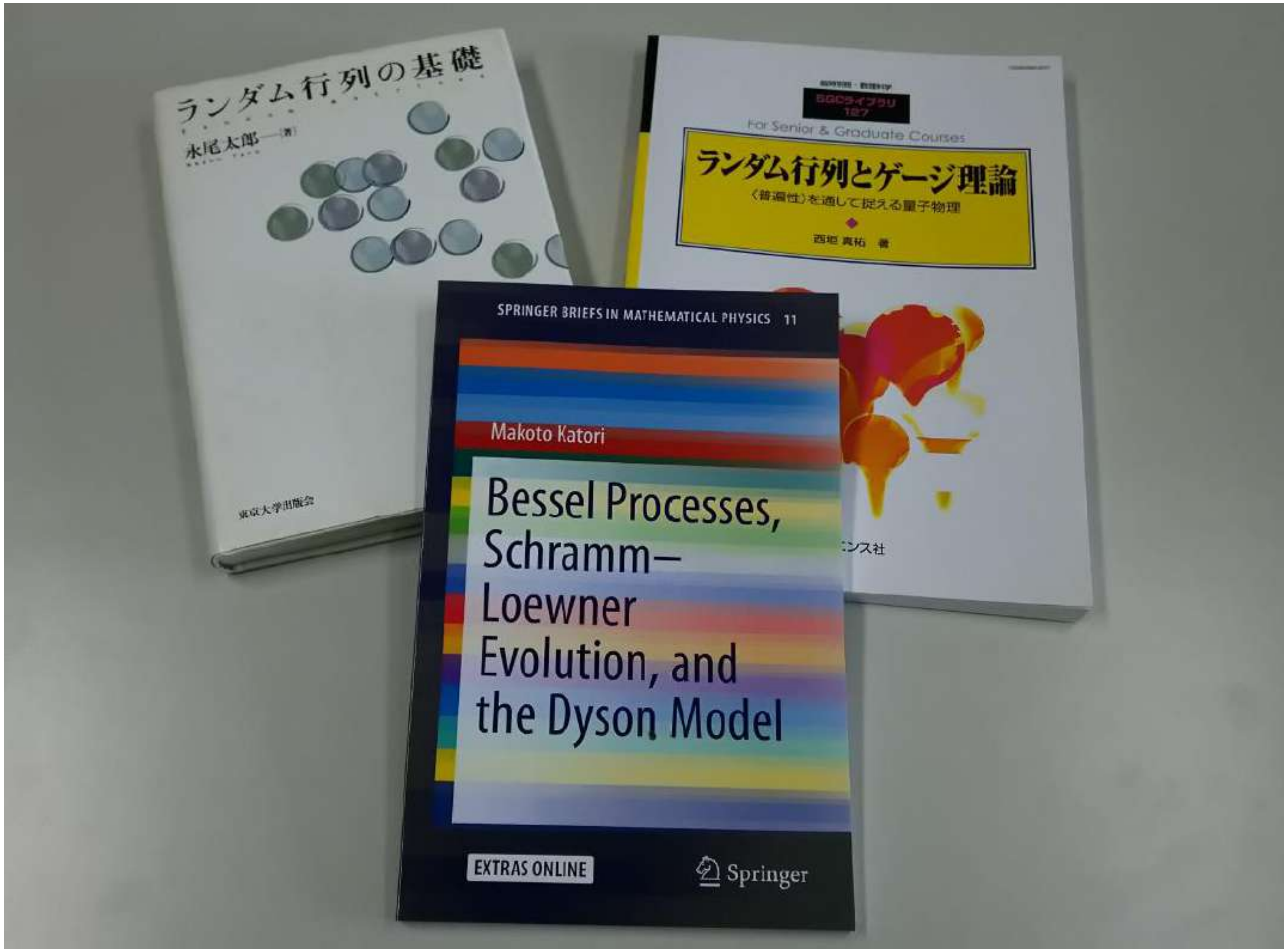
Ginibre

Poisson

Figure 3. (*a*) Random matrix Voronoi froth, $N = 400$, $\sigma = 1$, (*b*) Random Voronoi froth, $N = 400$ points distributed according to a Poisson process in a circle of radius 20.

G Le Caert, G. Le, Ho, J. S.: The Voronoi tessellation generated from eigenvalues of complex random matrices.
J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 3279-3295 (1990)

ランダム行列と非平衡統計力学(確率過程)に関する
解説書も最近出版されるようになった．私も1冊執筆した．
卒研では，これらの教材を使って，**ランダム行列理論の研究を目指す**．



大学院への進学を（いまのところはまだ）漠然と考えている人も多いと思う.
今回の卒研課題として（すこし難しいかもしれないが），
私たちがまさに研究している内容を選んだ理由の一つは，
大学院に進学する人が，卒研から円滑に大学院での研究に移行できるようにしたかったから.
（ゆくゆくは）理論物理学のホットな研究課題に挑戦したいと思っている人を歓迎します.

私の研究室での卒研および大学院進学に興味ある人は，
直接私を訪ねて下さい.

居室：1 号館 5 階 1538 室，e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

卒研のより具体的な計画や大学院進学について相談しましょう.
[私の都合のよい日時を居室ドアに貼っておきます.]

2018年11月3日（土） 10：30～16：00
理工白門祭で研究室公開
→ **1号館5階1526号室**に来てください
M0（4年生）と大学院生たちが研究テーマのポスター展示をします

大学院での研究案内

研究室では，大学院生や助教のアンドラウス氏と一緒に

(1) ランダム行列理論や群の表現論と関係する確率過程
(2) 組み合わせ論と確率過程論のq−拡張と楕円関数拡張
(3) 臨界現象・フラクタルパターンと
Schramm−Loewner 方程式(SLE)
(4) ガウス自由場とリウビル量子重力理論
(5) 非平衡相転移を示す交通流モデルや粗い界面成長
の数理モデル

などについて，勉強と研究をしています．

大学院での研究案内

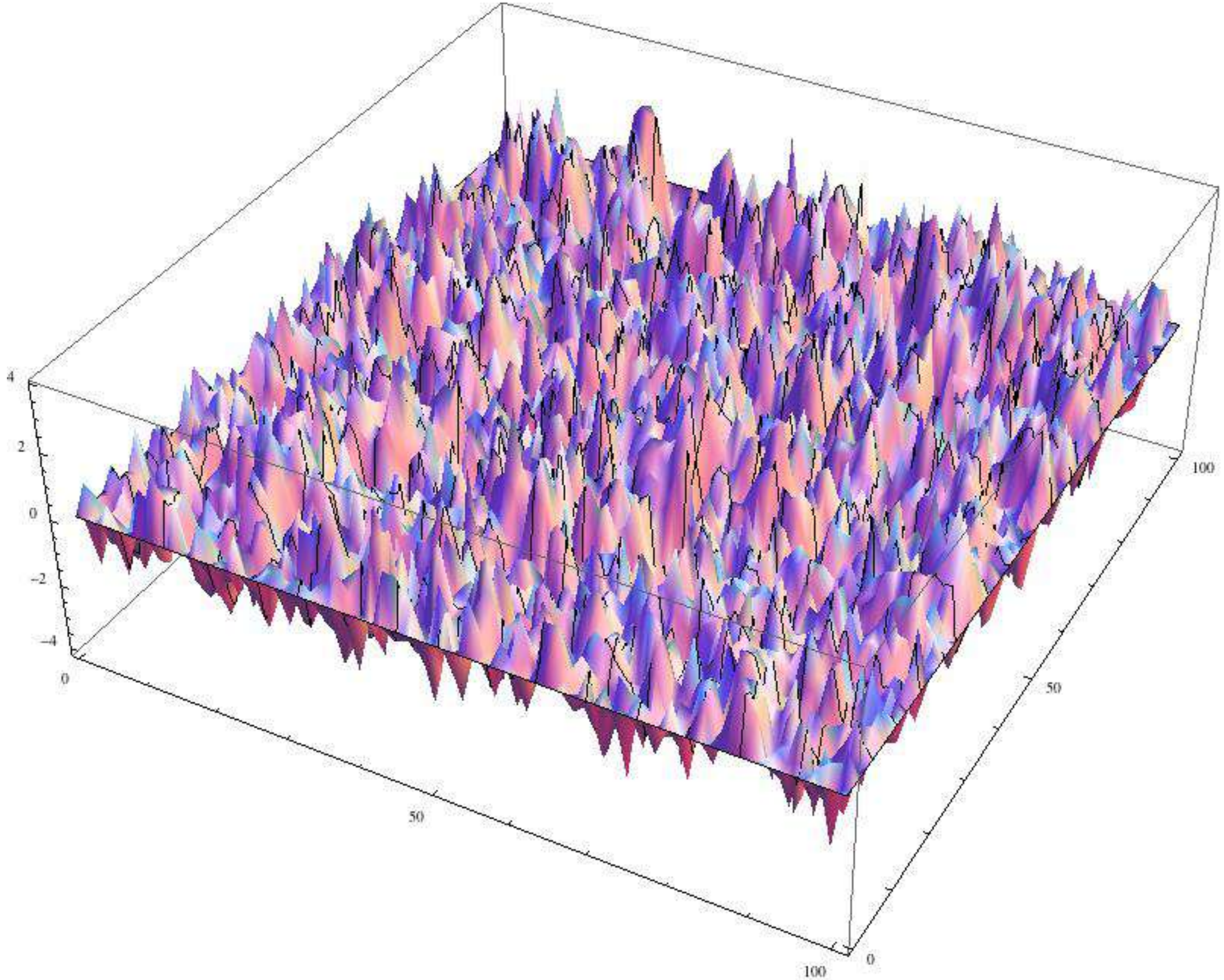
研究室では，大学院生や助教のアンドラウス氏と一緒に

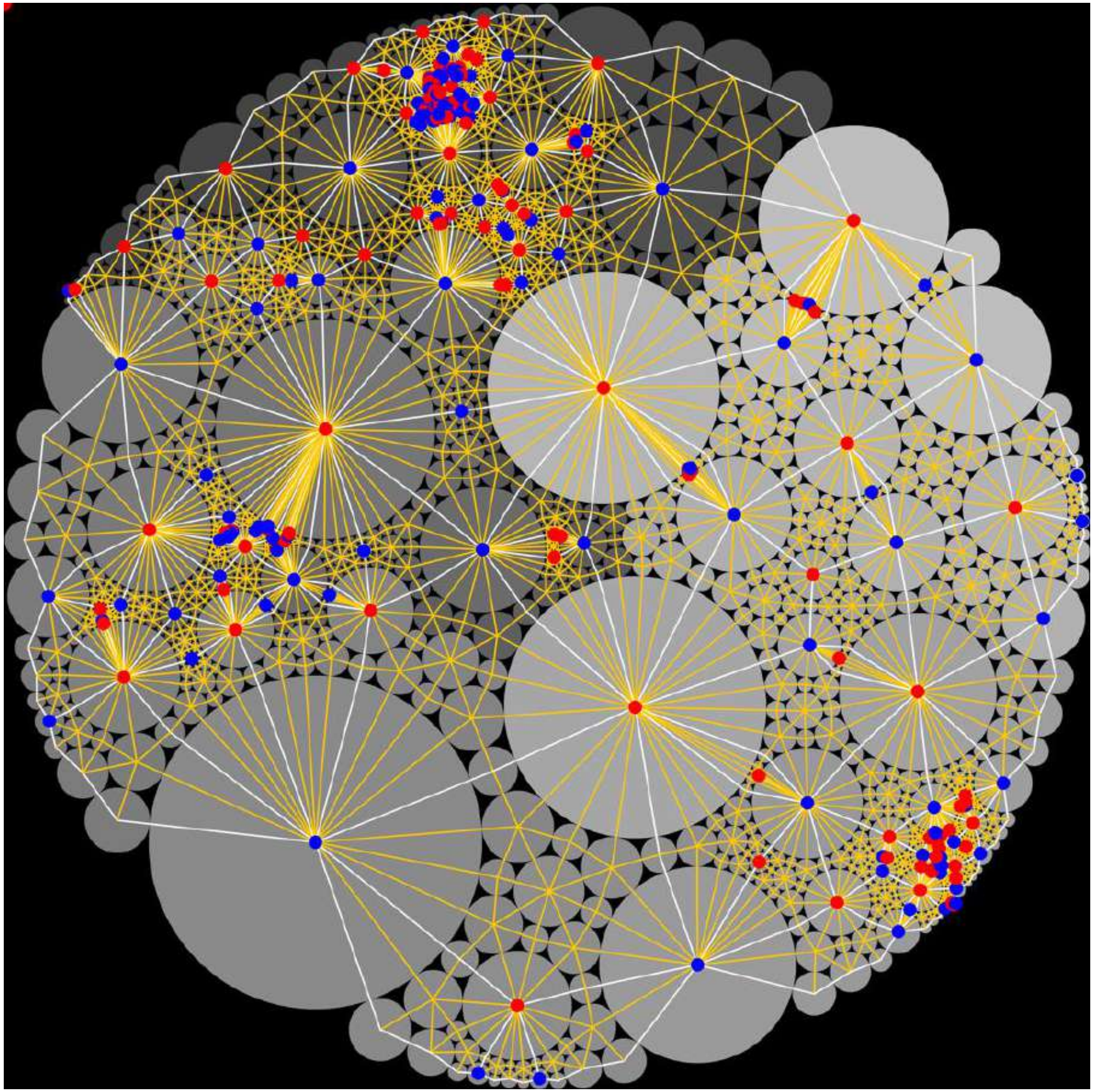
(1) ランダム行列理論や群の表現論と関係する確率過程
(2) 組み合わせ論と確率過程論のq-拡張と楕円関数拡張
(3) 臨界現象・フラクタルパターンと
Schramm-Loewner 方程式(SLE)
(4) ガウス自由場とリウビル量子重力理論
(5) 非平衡相転移を示す交通流モデルや粗い界面成長
の数理モデル

などについて，勉強と研究をしています.

ガウス自由場のシミュレーション図

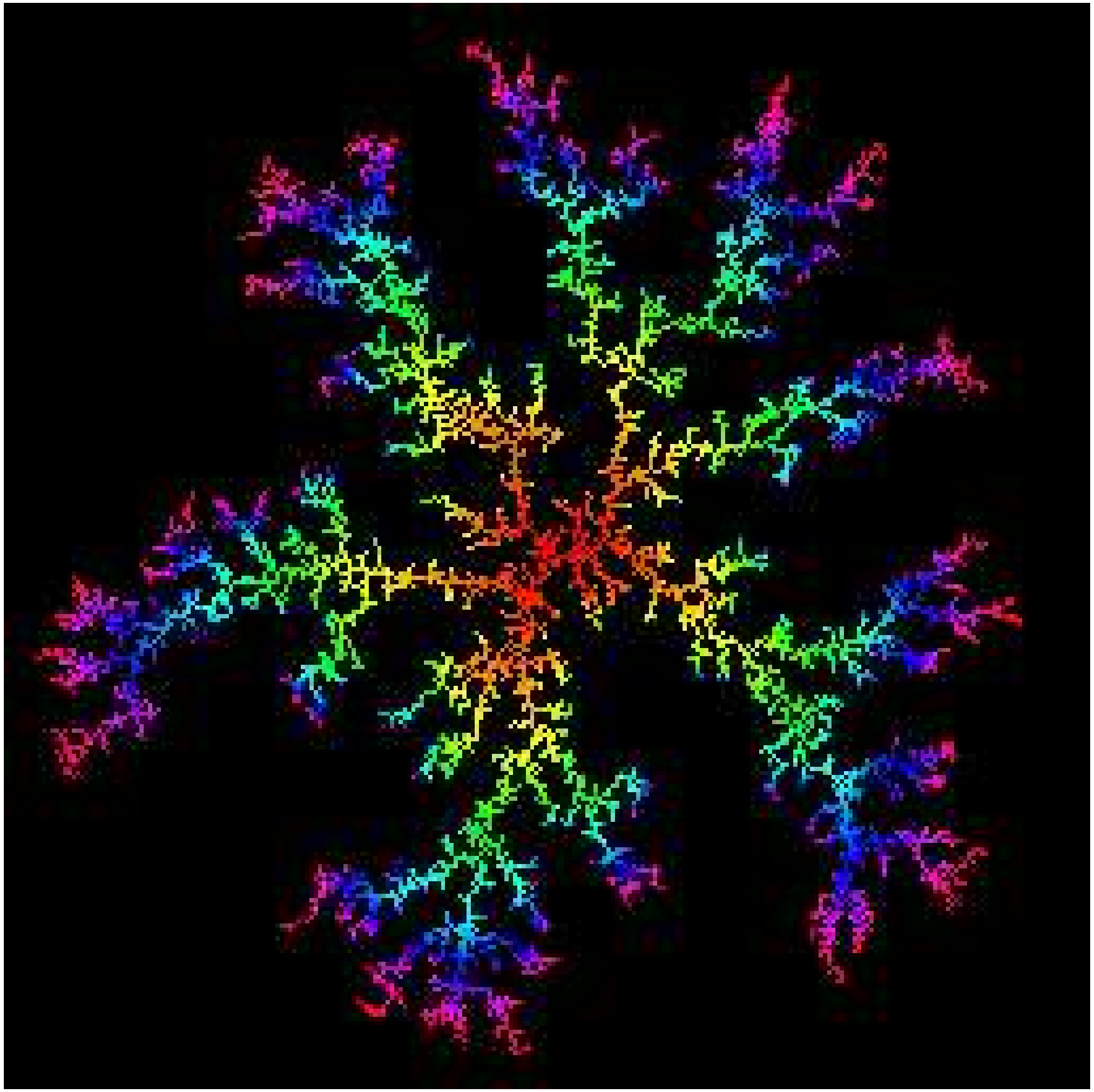
(S. Sheffield の web site より http://math.mit.edu/~sheffield/)





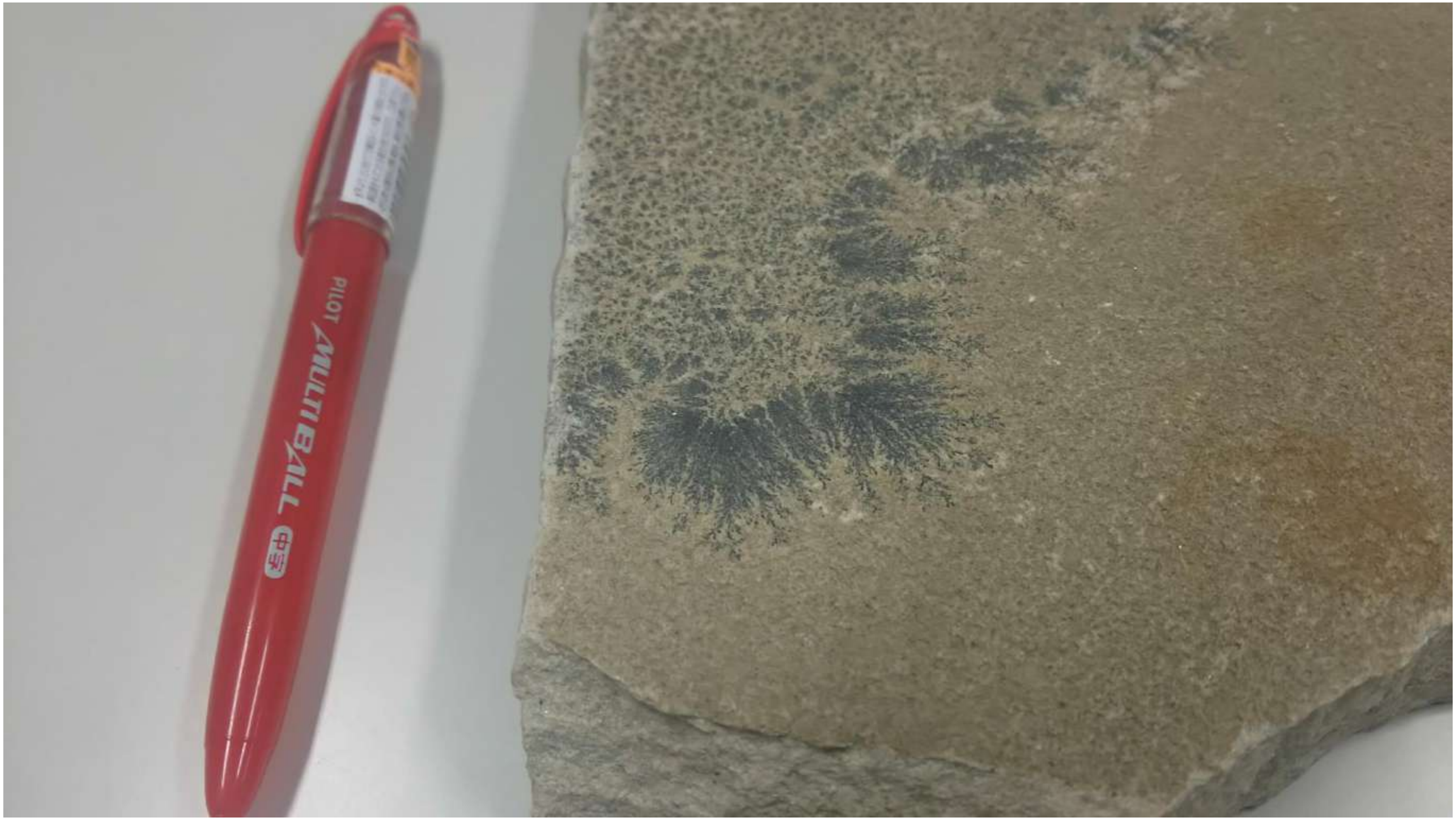
random triangulation

(S. Sheffield の web site より http://math.mit.edu/~sheffield/)

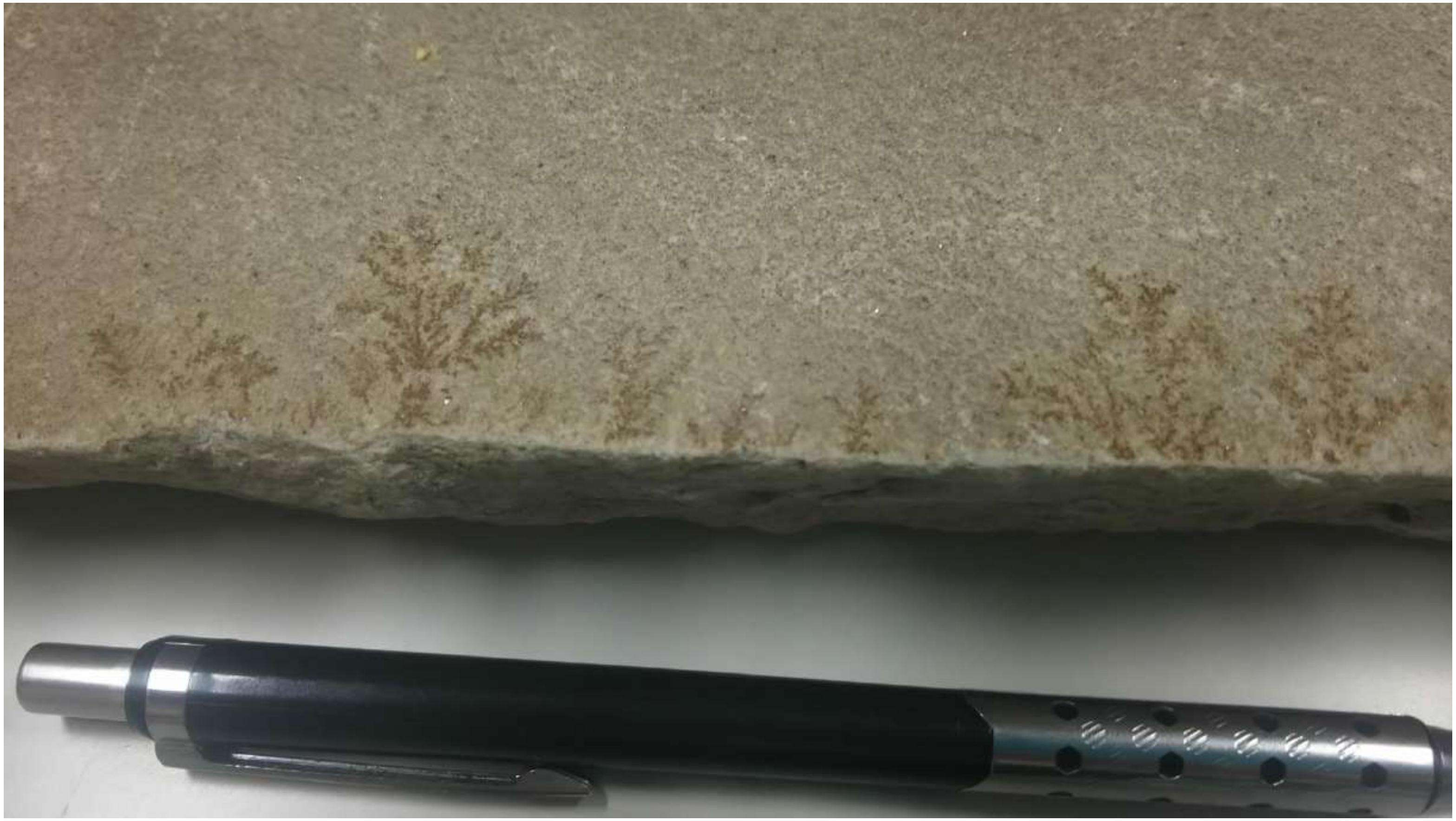


Euclidean Diffusion Limited Aggregation (**DLA**)
introduced by Witten-Sander 1981.
(S. Sheffield の web site より http://math.mit.edu/~sheffield/ ）

DLA in nature: Magnese oxide patterns on the surface of a rock.
(S. Sheffield の web site より http://math.mit.edu/~sheffield/ ）



これは研究室（１５２６号室）に転がっていた石の写真です。
（多分、前の助教の小林奈央樹氏（現：日大准教授）がどこかで拾って来たもの。）



これは研究室（１５２６号室）に転がっていた石の写真です。
（多分、前の助教の小林奈央樹氏（現：日大准教授）がどこかで拾って来たもの。）

これは研究室（１５２６号室）に転がっていた石の写真です。
（多分、前の助教の小林奈央樹氏（現：日大准教授）がどこかで拾って来たもの。）

研究室のホームページ

http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/

に活動記録や資料（写真や pdf.file）があるので参照下さい.

なお，私は2016年度から5年間，国内の大きな研究プロジェクトにメンバーとして参加しています.
（科研費（Ｓ）「無限粒子系の確率解析学」）

大学院生たちにも重要な国際会議やスクールに参加する機会を提供できます.

日本数学会主催の季期研究所(MSJ-SI) **サマースクール＋国際会議**
Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability
2019年7月31日(水) ～ 8月9日(金)
九州大学数理/マス･フォア･インダストリ-研究所

Louigi Addario-Berry (McGill University)
Alexander I. Bufetov (Université d'Aix-Marseille)
Ivan Corwin (Columbia University)
Frank den Hollander (Universiteit Leiden)
Gregory F. Lawler (Chicago University)
Grégory Miermont (École Normale Supérieure de Lyon)

Thank you very much
for your attention.