偏微分方程式を用いたSchramm-Loewner発展の解析

2022年2月24日

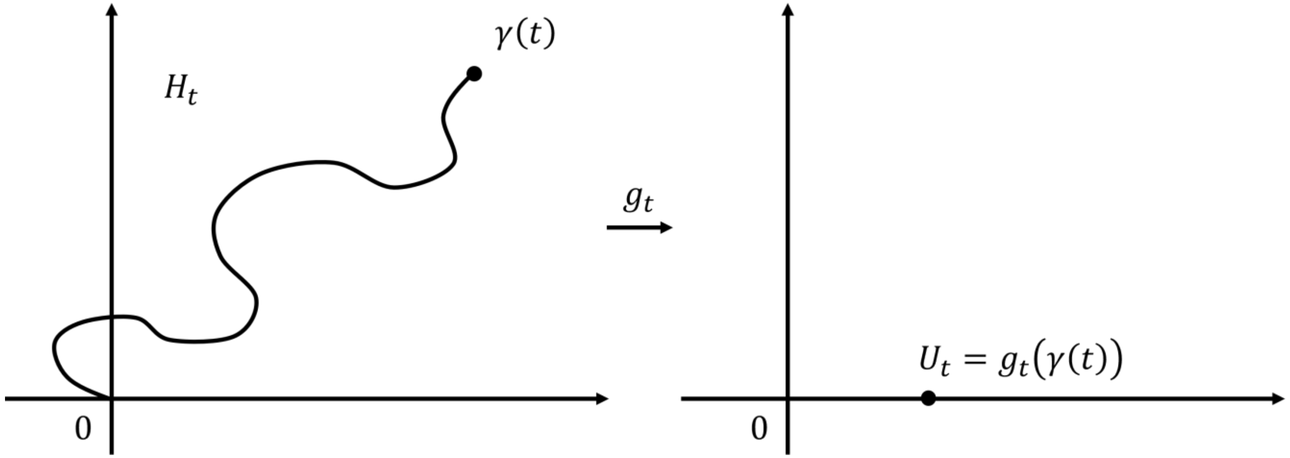
香取研 M2 高山大河

Schramm-Loewner発展

- Schramm-Loewner発展
  (Schramm-Loewner Evolution)
  - Schrammによって提案された，ランダムな平面フラクタル曲線の1パラメータ族.
  - 2次元格子上の統計物理学に登場するいくつかの離散モデルの連続極限を記述することが知られている.
  - パラメータκを付して，SLE$_\kappa$と書く.

Loewner方程式

- t：時刻，　$\mathrm{t} \in [0, \infty)$
- $\gamma[0, t]$：単純曲線（$\gamma(t)$は先端）
- $\mathbb{H}$:複素上半平面，
  $$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$$
- H_t: $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$
- g_t: $H_t \to \mathbb{H}$の共形変換
- U_t: Loewner方程式の駆動関数，　$U_t = g_t\big(\gamma(t)\big)$
- Loewner方程式：

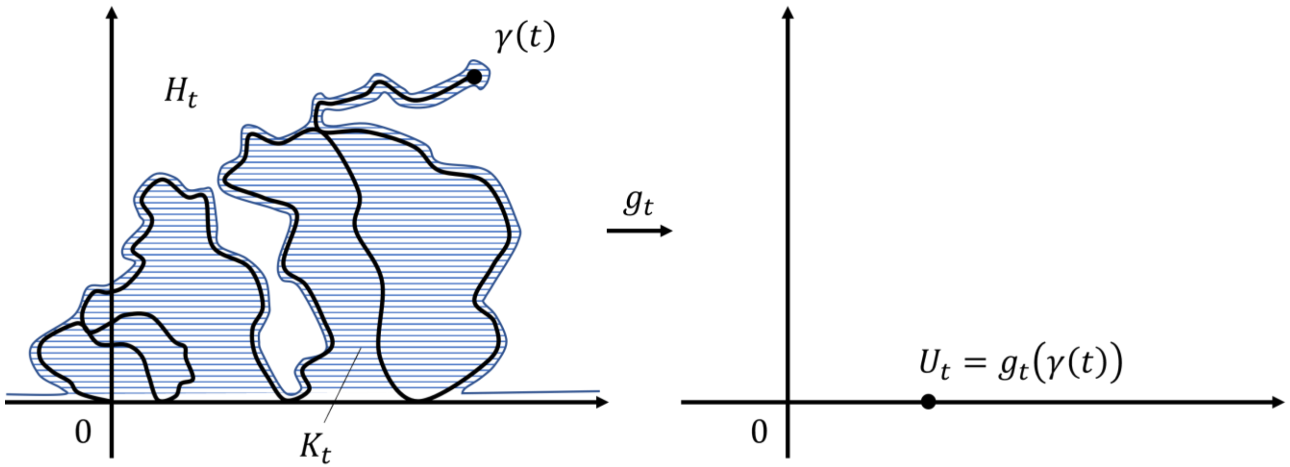


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z.}$$

chordal SLE_κに対する前進微分方程式

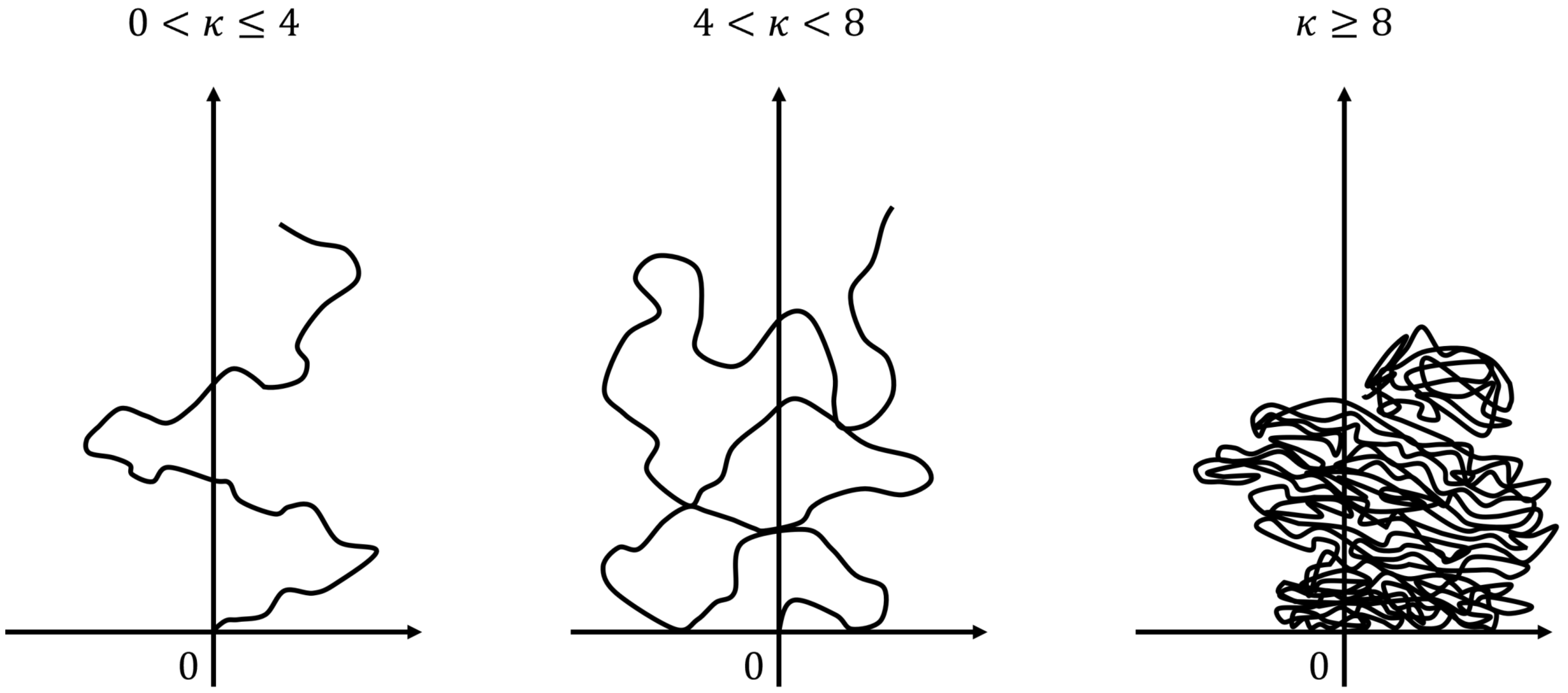
- t：時刻，$t \in [0,\infty)$
- $\mathbb{H}$:複素上半平面，
  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$
- B_t:1次元標準ブラウン運動
- U_t: Loewner方程式の駆動関数，
  $U_t = \sqrt{\kappa} B_t = g_t(\gamma(t)),\ \kappa > 0$
- chordal SLE_κに対する前進微分方程式：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z.}$$



- $\{g_t\}_{t\geq 0}$：解g_tの族，SLE_κと呼ぶ.
- $\gamma[0,t]$：SLE_κ曲線（$\gamma(t)$は先端）
- H_t: $\mathbb{H} \setminus \gamma[0,t]$の非有界な連結領域
- K_t：SLE_κ曲線$\gamma[0,t]$のhull，
  $K_t = \mathbb{H} \setminus H_t$
- $g_t : H_t \to \mathbb{H}$の共形変換

各κに対するSLE$_\kappa$曲線の振る舞い



2次元統計物理モデルとの対応

SLE_κ は2次元格子上の統計物理モデルの連続極限と次の様に対応していることが知られている.

$\kappa = 2$	loop-erased random walk
$\kappa = \frac{8}{3}$	self-avoiding walk
$\kappa = 3$	臨界Ising 界面曲線
$\kappa = 4$	臨界4状態Potts 模型
$\kappa = \frac{24}{5}$	臨界3状態Potts 模型
$\kappa = \frac{16}{3}$	臨界Ising 模型
$\kappa = 6$	臨界浸透探索模型
$\kappa = 8$	uniform spanning tree

先行研究について

先行研究

- T.J.Lyons, V.Margarint and S.Nejad, Convergence to closed-form distribution for the backward SLE$_\kappa$ at some random times and the phase transition at κ=8, arXiv:1910.05519v1 [math.PR].

chordal SLE$_\kappa$に対する後進微分方程式

- chordal SLE$_\kappa$に対する後進微分方程式:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}h_t(z) = \frac{-2}{h_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \quad h_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H}.}$$

ここで，$z_t = x_t + \sqrt{-1}y_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t$，$z_0 = \sqrt{-1}$とおくと，

$$dz_t = \frac{-2}{z_t}dt - \sqrt{\kappa}dB_t$$

となり，両辺の実部と虚部を比較することで，

$$dx_t = \frac{-2x_t}{x_t^2 + y_t^2}dt - \sqrt{\kappa}dB_t, \qquad dy_t = \frac{2y_t}{x_t^2 + y_t^2}dt$$

を得る.

確率過程D_tに対するSDE

関数$f(x,y)=\frac{x}{y}$を考え，これに次の様に伊藤の公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
df(x_t,y_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x_t}dx_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2}(dx_t)^2 + \frac{\partial f}{\partial y_t}dy_t + \frac{\partial^2 f}{\partial y_t^2}(dy_t)^2 \\
&= -\frac{4x_t/y_t}{x_t^2+y_t^2}dt - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_t}dB_t.
\end{aligned}
$$

この時，$D_t=\frac{x_t}{y_t}$とおくと，この確率過程D_tに対して次の確率微分方程式(stochastic differential equation; SDE)を得る．

$$
\boxed{dD_t = -\frac{4D_t}{x_t^2+y_t^2}dt - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_t}dB_t, \qquad D_0=0.}
$$

ここで定義したD_tは$z_t=h_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t$の偏角のcotangentに相当する．

確率過程T_tに対するSDE

- 確率過程D_tに対するSDE:

$$dD_t = -\frac{4D_t}{x_t^2 + y_t^2} dt - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_t} dB_t, \qquad D_0 = 0.$$

ランダム時間変換:

$$\tilde{u}(s) = \int_0^s \frac{dt}{y_t^2},$$

$$c(u) = \inf\{s \geq 0 : \tilde{u}(s) \geq u\}.$$

変換後のブラウン運動:

$$\tilde{B}(u) = \int_0^u \frac{dB_{c(r)}}{y_{c(r)}}.$$

$$\frac{dD_{c(u)}}{\sqrt{\kappa}} = -\frac{4D_{c(u)}/\sqrt{\kappa}}{\left(x_{c(u)}/y_{c(u)}\right)^2 + 1} du - d\tilde{B}_u, \qquad D_{c(0)} = 0.$$

$$T_u = \frac{D_{c(u)}}{\sqrt{\kappa}},\ u \geq 0$$

- 確率過程T_uに対するSDE:

$$\boxed{dT_u = -\frac{4T_u}{1 + \kappa T_u^2} du + d\tilde{B}_u, \qquad T_0 = 0.}$$

Kolmogorov 前進方程式

確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

に対して，生成子$\mathcal{G}$は

$$\mathcal{G}_x = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

生成子$\mathcal{G}$の随伴演算子$\mathcal{G}^*$は

$$\mathcal{G}_y^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}a(y) + \frac{\partial}{\partial y}b(y)$$

と与えられる．ここで，時間間隔tの間にxからyに遷移する確率密度関数を$p_t(x,y)$とおくと，Kolmogorov 前進方程式は

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) &= \mathcal{G}_y^* p_t(x,y)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[a(y)p_t(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y}[b(x)p_t(x,y)]\end{aligned}}$$

で与えられる．

T_uのSDEに対するKolmogorov 方程式

確率過程T_uの確率微分方程式に対するKolmogorov 前進方程式は次の様に与えられる.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t(x,y) + \frac{4y}{1+\kappa y^2}\frac{\partial}{\partial y}p_t(x,y) + \frac{4(1-\kappa y^2)}{(1+\kappa y^2)^2}p_t(x,y).}$$

ただし，初期条件は

$$\lim_{t\to 0} p_t(x,y) = \delta(y)$$

である.

T_uの定常確率密度関数の従う微分方程式

T_uのSDEに対するKolmogorov 前進方程式において，

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y) = 0$$

とすることで，確率過程T_uの定常確率密度関数$\rho(T)$の従う微分方程式

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dT^2}\rho(T) + \frac{4T}{1+\kappa T^2}\frac{\partial}{\partial T}\rho(T) + \frac{4(1-\kappa T^2)}{(1+\kappa T^2)^2}\rho(T) = 0$$

を得る．

T_uの定常確率密度関数$\rho(T)$

- 定常解$\rho(T)$：

$$\rho(T) = C_1 T(\kappa T^2+1)^{-4/\kappa}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{4}{\kappa},\frac{3}{2};-\kappa T^2\right) + 2C_2(\kappa T^2+1)^{-4/\kappa}$$

ただし，C_1, C_2は任意定数.

ここで，確率密度関数は非負である必要があるため，

$$\boxed{\rho(T) = C(\kappa T^2+1)^{-4/\kappa}.}$$

ただし，Cは規格化定数であり，

$$C = \left(\int_{-\infty}^{\infty}(\kappa T^2+1)^{-4/\kappa}dT\right)^{-1}.$$

ガンマ関数:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\,,\ \mathrm{Re}\,z > 0.$$

Pochhammer記号:

$$(\cdot)_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{\Gamma(\cdot+k)}{\Gamma(\cdot)}, & k>0 \end{cases}$$

超幾何関数:

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}z^k\,.$$

定常確率密度関数$\rho(T)$に対する変数変換

定常確率密度関数$\rho(T)$に対して,

$$T=-\frac{1}{\sqrt{\kappa}\tan\theta},\qquad \tilde{\rho}(\theta)=\rho\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}\tan\theta}\right)$$

として，$T\to\theta$の変数変換を行う．すると,

$$\tilde{\rho}(\theta)=\tilde{C}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta$$

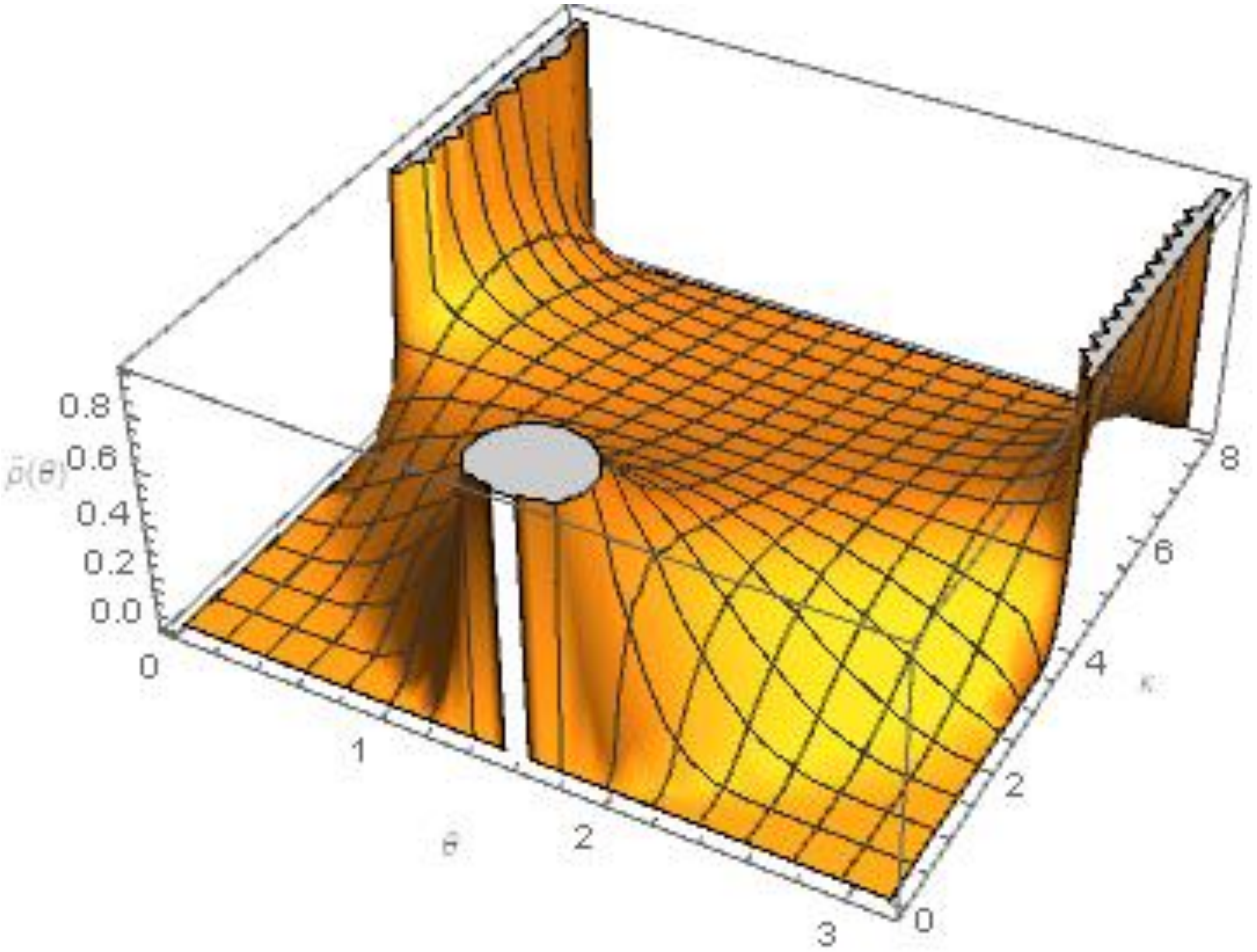
を得る．ただし，$\tilde{C}$は規格化定数であり,

$$\tilde{C}=\left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta\,d\theta\right)^{-1}.$$

ここで，変数θは$z_t=h_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t$の偏角に相当する．

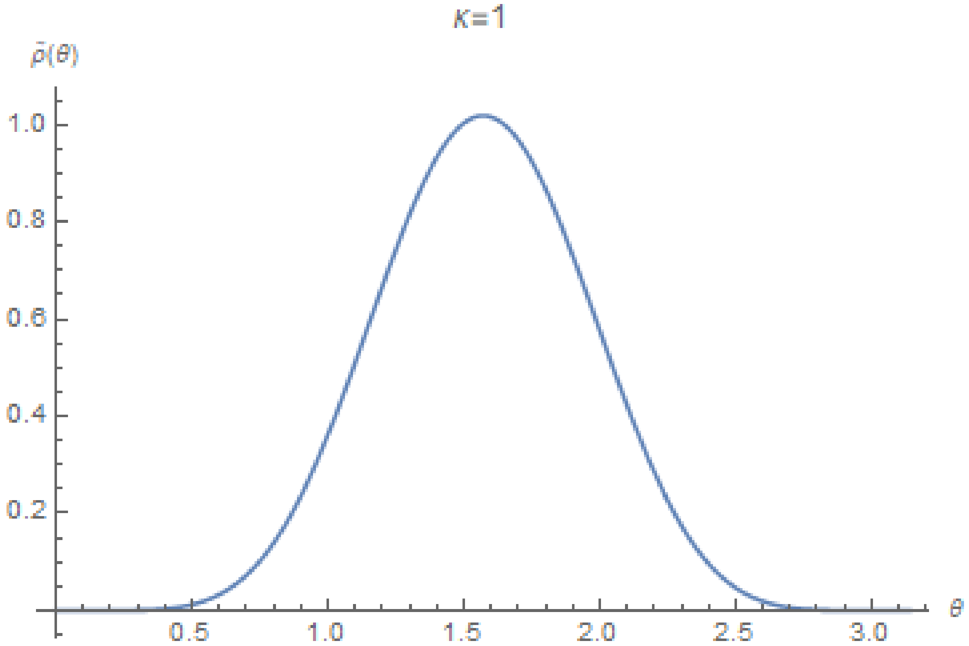
$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta$$



$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

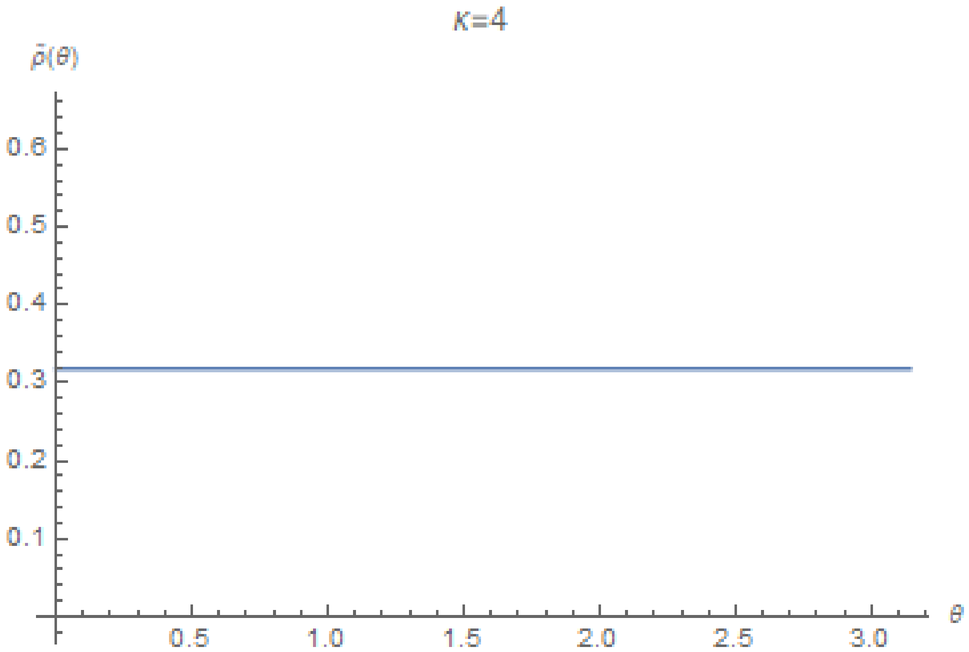
$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta\,d\theta\right)^{-1}.$$



- $0 < \kappa < 4$
  - $\theta = \frac{\pi}{2}$にピークがある.
  - SLE$_\kappa$曲線が虚軸方向に成長しやすい.

$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

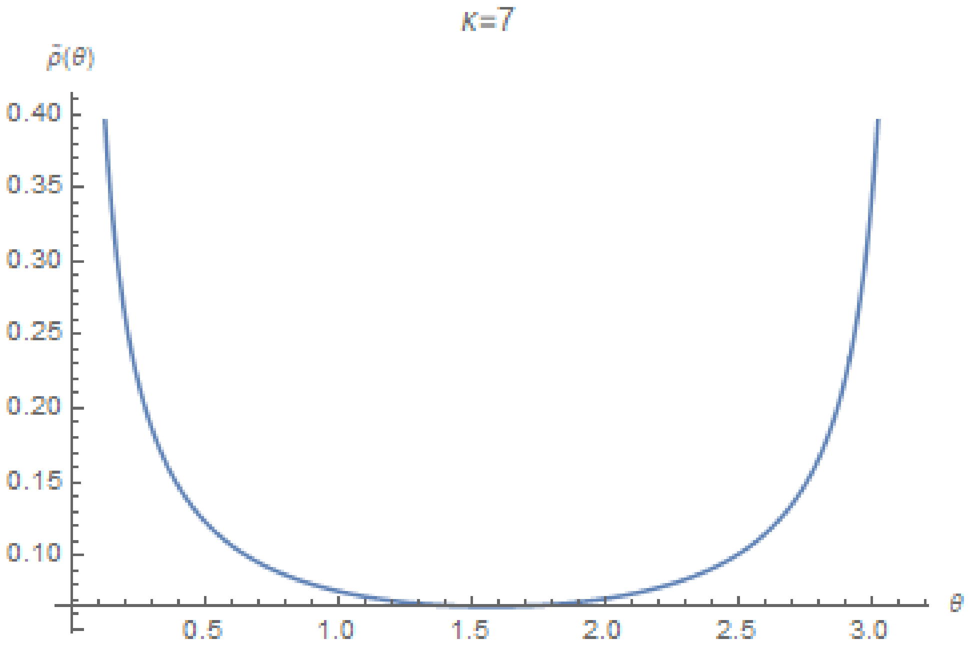
$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \, d\theta \right)^{-1} .$$



- $\kappa = 4$
  - θについて一様な分布.
  - SLE$_\kappa$曲線が等方的に成長しやすい.

$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{8}{\kappa}-2}\theta\,d\theta\right)^{-1}.$$



- $4 < \kappa < 8$
  - $\theta = 0, \pi$で発散するが，$\tilde{C}$は有限.
  - SLE_κ曲線が実軸方向に成長しやすい.

$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \, d\theta \right)^{-1} .$$

- $\kappa \geq 8$
  - $\theta = 0, \pi$で発散し，$\tilde{C}$の積分も発散する.
  - 規格化不可能.

$\tilde{\rho}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \, d\theta \right)^{-1} .$$

- $\kappa = 4$で，$\tilde{\rho}(\theta)$の空間依存性に変化があった.
- $\kappa = 8$で，$\tilde{\rho}(\theta)$の可積分性に変化があった.

- これらの変化は，SLE_κ曲線の挙動の$\kappa = 4, 8$での変化に対応している.

研究結果

随伴演算子$\mathcal{G}^*$に対する固有値問題

随伴演算子$\mathcal{G}^*$に対する次の固有値問題を考える.

$$\mathcal{G}_y^* u(y;\lambda) = -\lambda u(y;\lambda)$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(y;\lambda) + \frac{4y}{1+\kappa y^2}\frac{\partial}{\partial y}u(y;\lambda) + \frac{4(1-\kappa y^2)}{(1+\kappa y^2)^2}u(y;\lambda) = -\lambda u(y;\lambda).$$

これを満たす対$(\lambda, u(y;\lambda))$によって得られる

$$U(t,y;\lambda) = e^{-\lambda t}u(y;\lambda)$$

は，確率過程T_u のSDEに対するKolmogorov 前進方程式を満たす.

随伴演算子$\mathcal{G}^*$に対する固有値問題

対$(\lambda, u(y;\lambda))$が全て求まり，固有値λが正に連続で分布していると仮定すると，それらを適当な重み関数で積分したもの

$$q(t,y;\Lambda) = \int_0^\infty U(t,y;\lambda)\Lambda(\lambda)d\lambda$$

が確率過程T_u のSDEに対するKolmogorov 前進方程式の解となる.

ただし，重み関数$\Lambda(\lambda)$は

$$\lim_{t\to 0} q(t,y;\Lambda) = \int_0^\infty u(y;\lambda)\Lambda(\lambda)d\lambda = \delta(y)$$

を満たす様に定める.

固有値方程式のSchrödinger型への変形

2階微分作用素L_fを次の通り定義する．

$$L_f = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{4y}{1+\kappa y^2}\frac{d}{dy} + \frac{4(1-\kappa y^2)}{(1+\kappa y^2)^2} + \lambda.$$

この時，解くべき固有方程式は

$$L_f u(y;\lambda) = 0.$$

ここで，yの関数$s(y)$を次で定義し，$y \to s(y)$と変数変換する．

$$s(y) = \int_0^y \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} dx = \sqrt{2}y$$

これによりL_fは次の$\tilde{L}_f$へと変換される．ただし$\tilde{u}(s(y);\lambda) = u(y;\lambda)$とした．

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{L}_f\tilde{u}\right)(s(y);\lambda)\\ &= \frac{d^2}{ds^2}\tilde{u}(s(y);\lambda) + \frac{8s}{2+\kappa s^2}\frac{d}{ds}\tilde{u}(s(y);\lambda) + \left[\frac{16-8\kappa s^2}{(2+\kappa s^2)^2} + \lambda\right]\tilde{u}(s(y);\lambda).\end{aligned}$$

固有値方程式のSchrödinger型への変形

次に，sの関数$r(s)$を次の様におく．

$$r(s) = \exp\left\{-\int_0^s \frac{4t}{2+\kappa t^2}dt\right\} = \left(1+\frac{\kappa}{2}s^2\right)^{-2/\kappa}.$$

これを用いて相似変換$\tilde{L}_f \to r^{-1}\tilde{L}_f r$を行うと，

$$\left(r^{-1}\tilde{L}_f(rr^{-1}\tilde{u})\right)(s;\lambda) = \frac{d^2}{ds^2}\left(r^{-1}\tilde{u}(s;\lambda)\right) - \left[\frac{(16+4\kappa)s^2-8}{(2+\kappa s^2)^2} - \lambda\right]\left(r^{-1}\tilde{u}(s;\lambda)\right)$$

となる．よって，元の固有値方程式は

$$\boxed{-\frac{d^2}{ds^2}\left(r^{-1}\tilde{u}(s;\lambda)\right) + \frac{(16+4\kappa)s^2-8}{(2+\kappa s^2)^2}\left(r^{-1}\tilde{u}(s;\lambda)\right) = \lambda\left(r^{-1}\tilde{u}(s;\lambda)\right)}$$

の様にSchrödinger型へと書き換えられる．

固有値方程式の$\lambda = 0$での解

先行研究の結果から,

$$u(y;0) = C(1+\kappa y^2)^{-4/\kappa}.$$

これに対して,先程と同様の変数変換を行うことで, Schrödinger型に変形した固有値方程式の$\lambda = 0$での解

$$\boxed{r^{-1}\tilde{u}(s;0) = C\left(1+\frac{\kappa}{2}s^2\right)^{-2/\kappa}}$$

を得る.

$r^{-1}\tilde{u}(s;0)$に対する変数変換

固有値方程式の$\lambda = 0$での解$r^{-1}\tilde{u}(s;0)$に対して，

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}\tan\theta}, \qquad \tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = r^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}\tan\theta}\right)\tilde{u}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}\tan\theta};0\right)$$

として，$s \to \theta$の変数変換を行う．すると，

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta$$

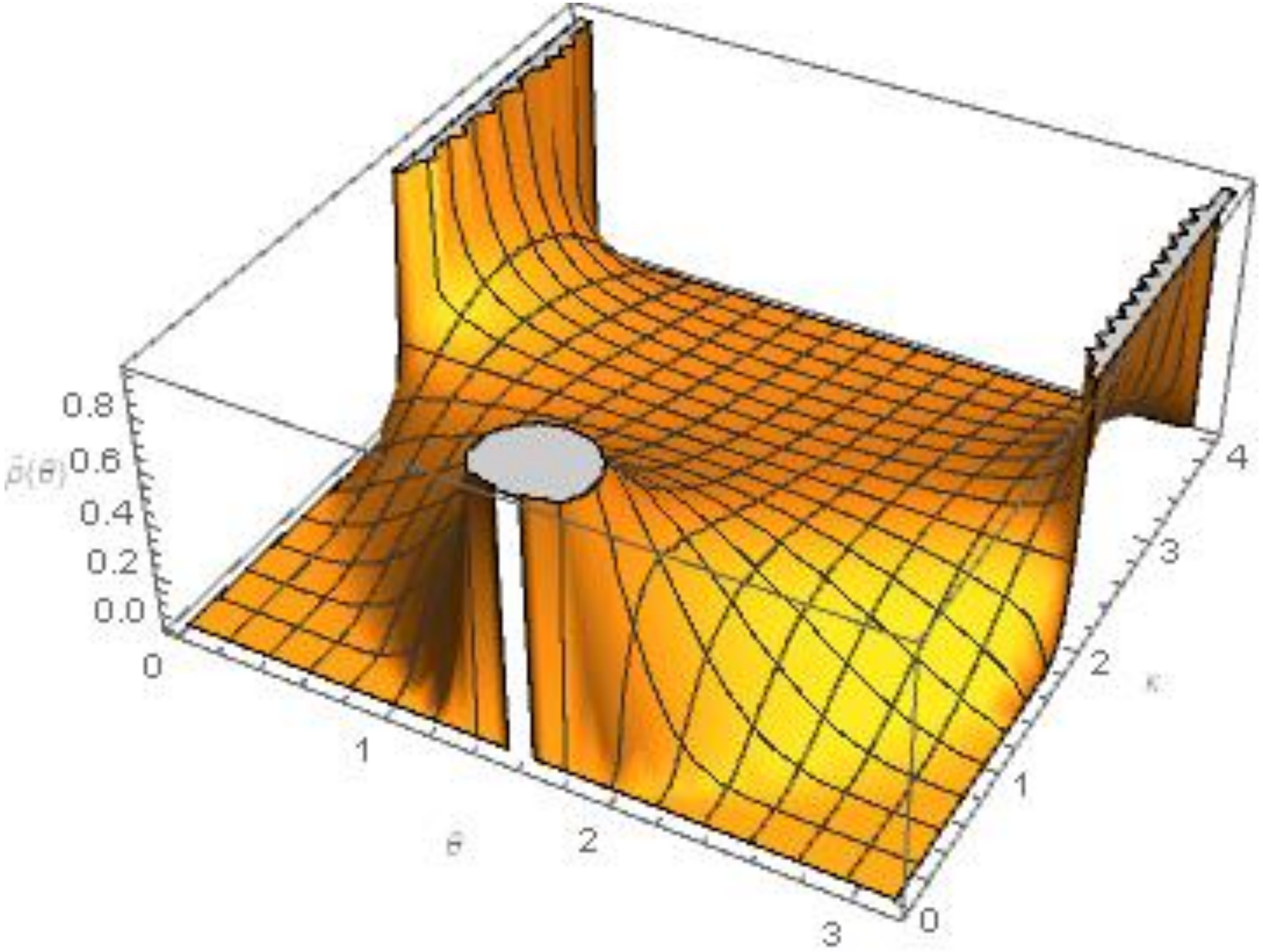
を得る．ただし，$\tilde{C}$は規格化定数であり，

$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\, d\theta\right)^{-1}.$$

ここで，変数θは$z_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t$の偏角に相当する．

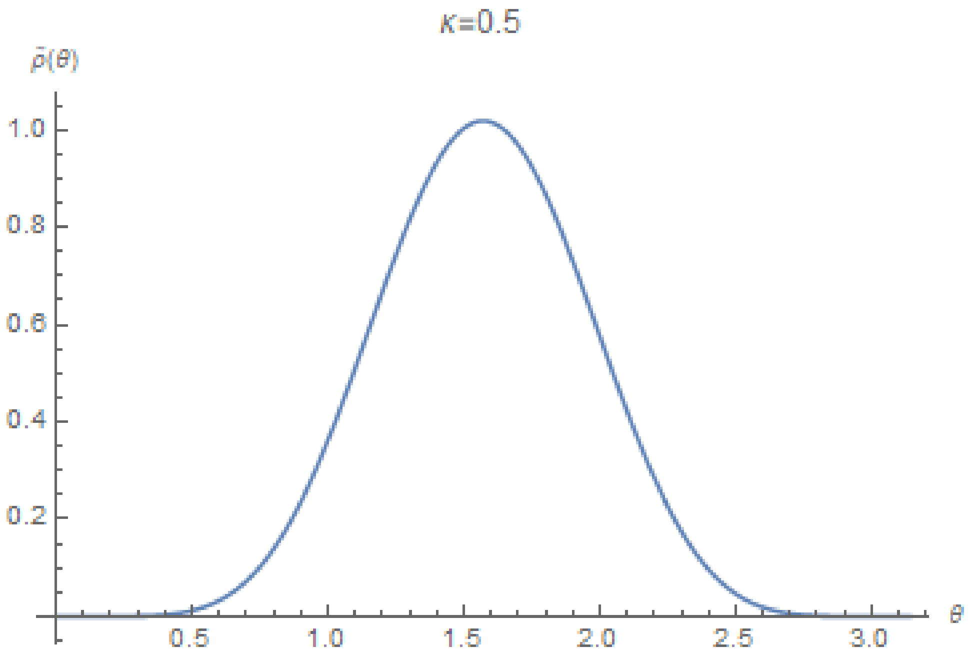
$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\,\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta$$



$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

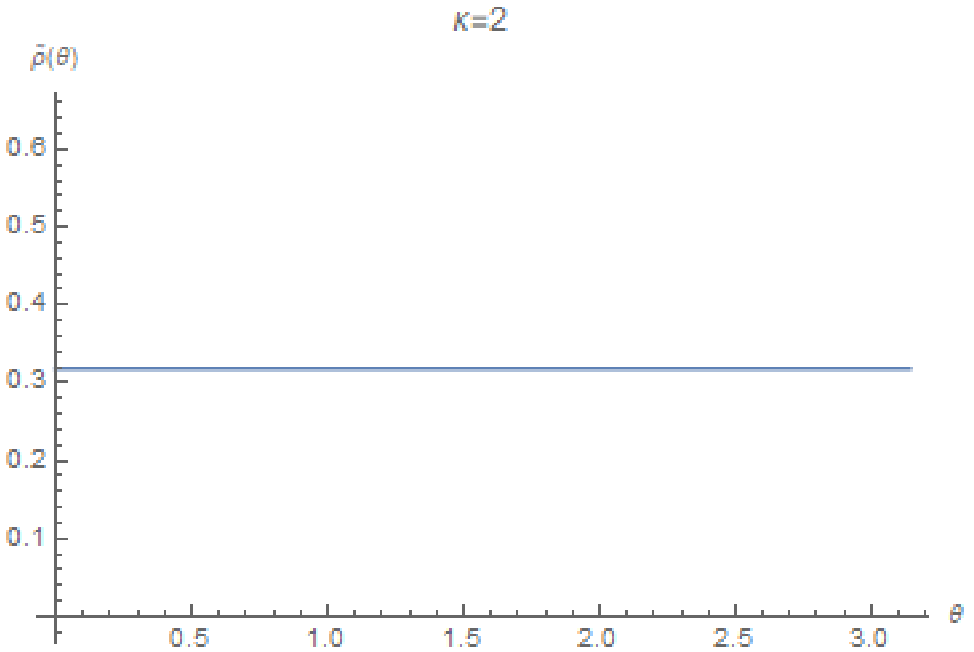
$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,d\theta\right)^{-1}.$$



- $0 < \kappa < 2$
  - $\theta = \frac{\pi}{2}$にピークがある.

$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

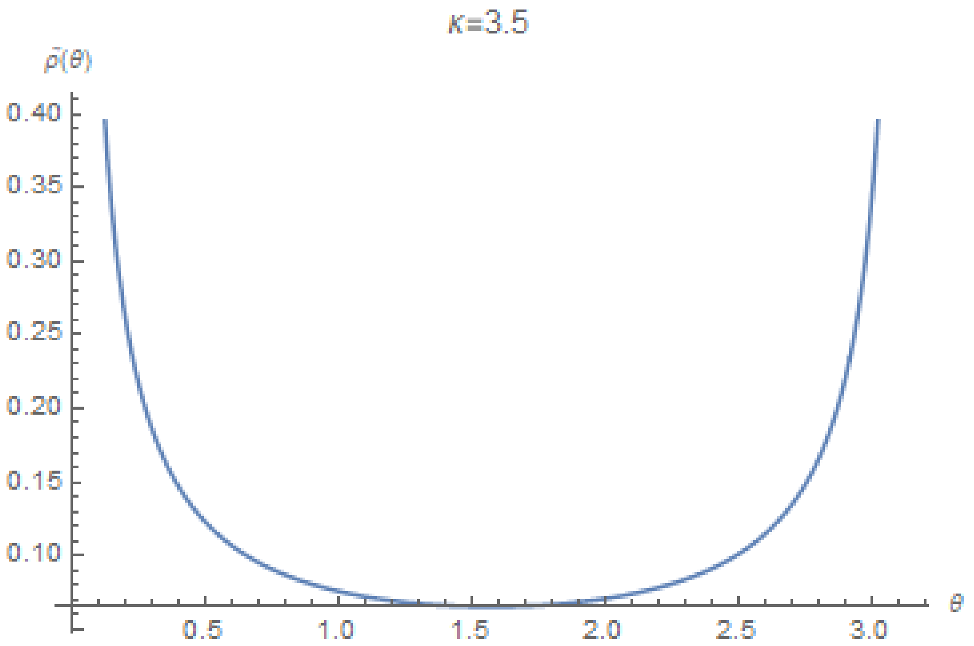
$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\,\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\, d\theta\right)^{-1}.$$



- $\kappa = 2$
  - θについて一様な分布.

$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\, d\theta\right)^{-1}.$$



- $2 < \kappa < 4$
  - $\theta = 0, \pi$で発散するが，$\tilde{C}$は有限.

$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2} \theta \,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2} \theta \, d\theta \right)^{-1} .$$

- $\kappa \geq 4$
    - $\theta = 0, \pi$で発散し，$\tilde{C}$の積分も発散する.
    - 規格化不可能.

$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の$\kappa$依存性

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta) = \tilde{C}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,,$$
$$\tilde{C} = \left(\int_0^{\pi}\sin^{\frac{4}{\kappa}-2}\theta\,d\theta\right)^{-1}.$$

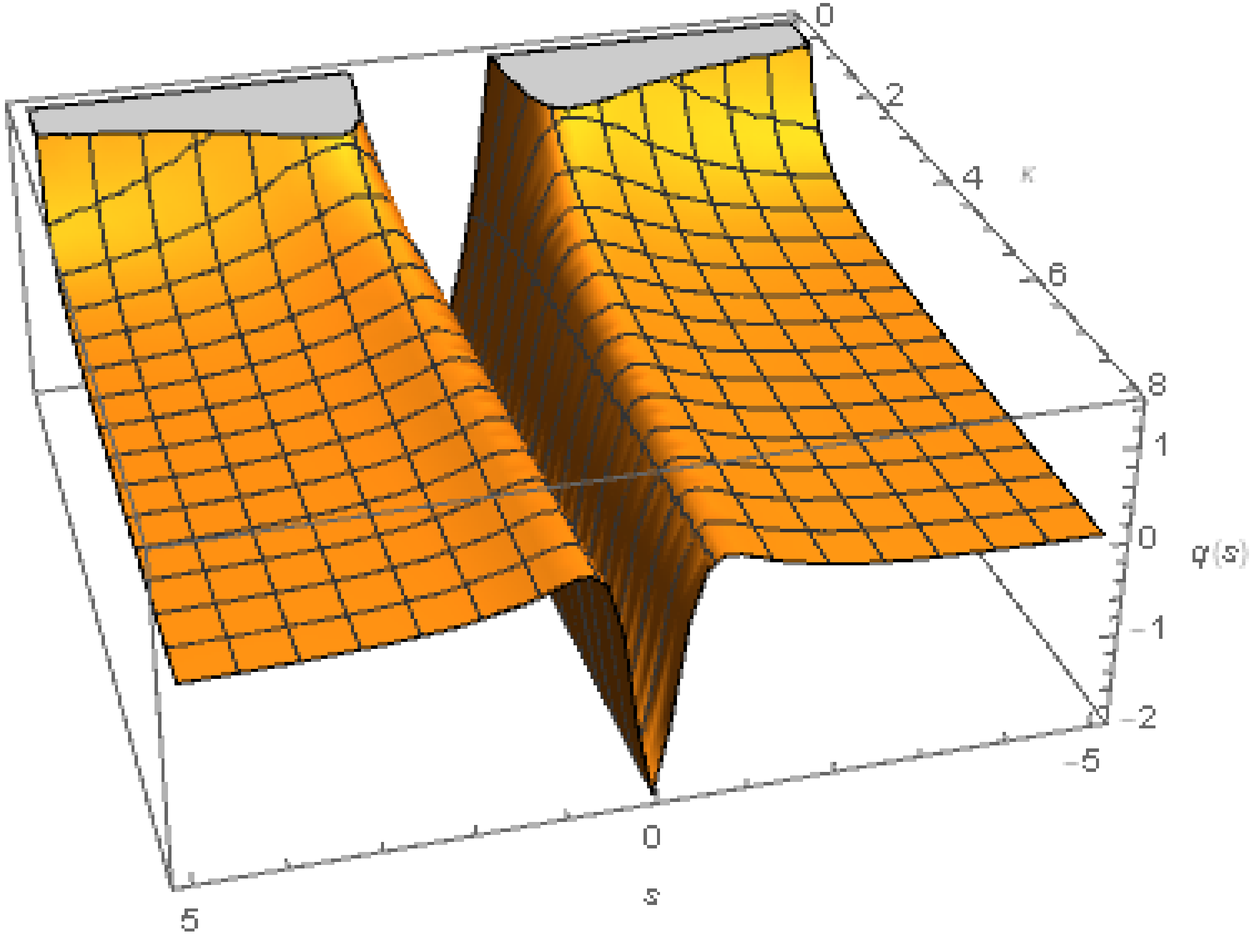
- $\kappa = 2$で，$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の空間依存性に変化があった.
- $\kappa = 4$で，$\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の可積分性に変化があった.

- 先行研究の結果では定常密度関数は$\kappa = 4,\,8$で相転移を起こしたが，
  $\tilde{\rho}_{\mathrm{Sch}}(\theta)$の挙動に変化が起きるのは$\kappa = 2,\,4$の時であり，
  それぞれ$\frac{1}{2}$倍された値となっている.

ポテンシャル$q(s)$のκ依存性

変数sの関数$q(s)$を次の様に定義する.

$$q(s) = \frac{(16+4\kappa)s^2 - 8}{(2+\kappa s^2)^2}.$$



最大値:

$$\frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)}$$

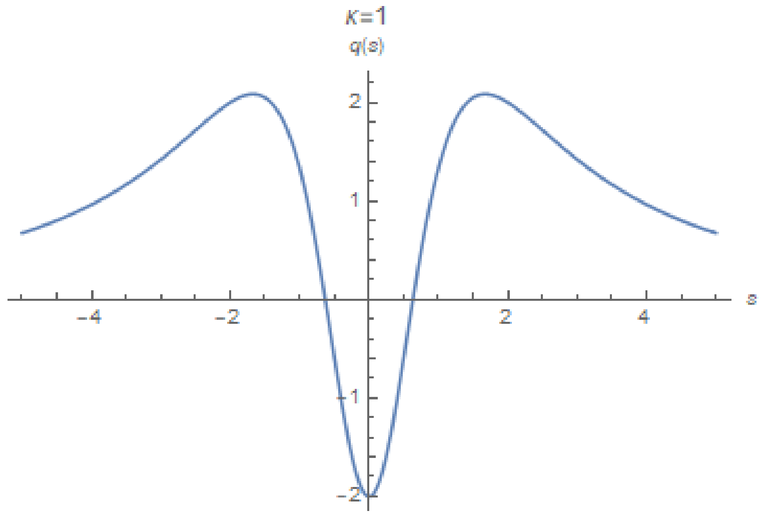
$$\left(s = \pm\sqrt{\frac{2(4+3\kappa)}{\kappa(4+\kappa)}}\right)$$

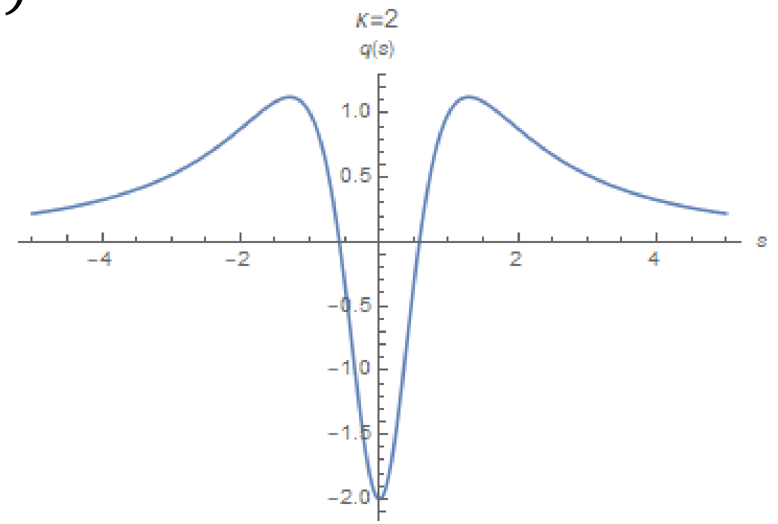
最小値:

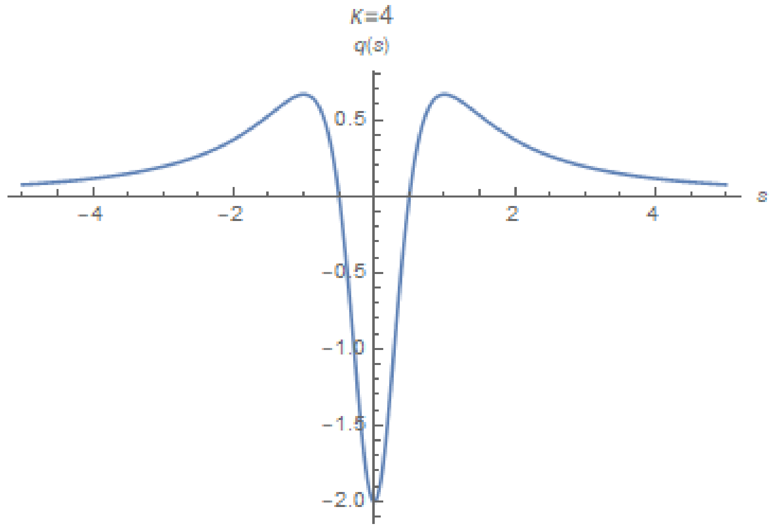
$$-2 \ \ (s=0)$$

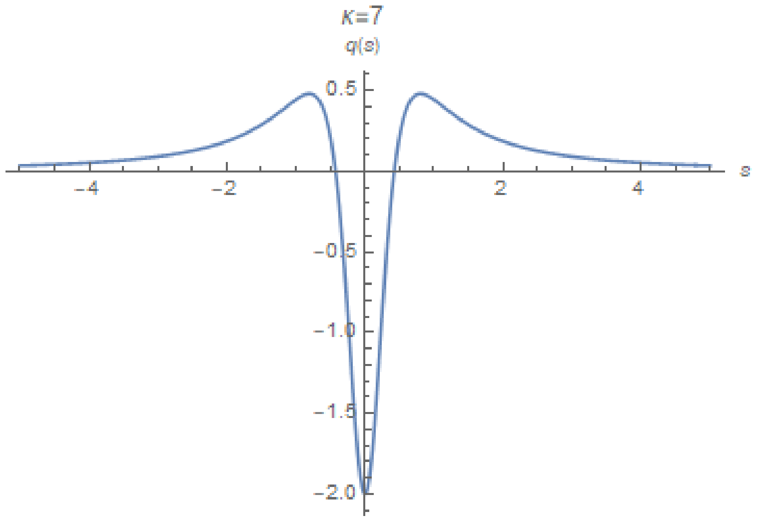
ポテンシャル$q(s)$のκ依存性

$$q(s) = \frac{(16+4\kappa)s^2 - 8}{(2+\kappa s^2)^2}$$









ポテンシャル$q(s)$に対する変数変換

ポテンシャル$q(s)$に対して，

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}\tan\theta}, \qquad \tilde{q}(\theta) = q\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}\tan\theta}\right)$$

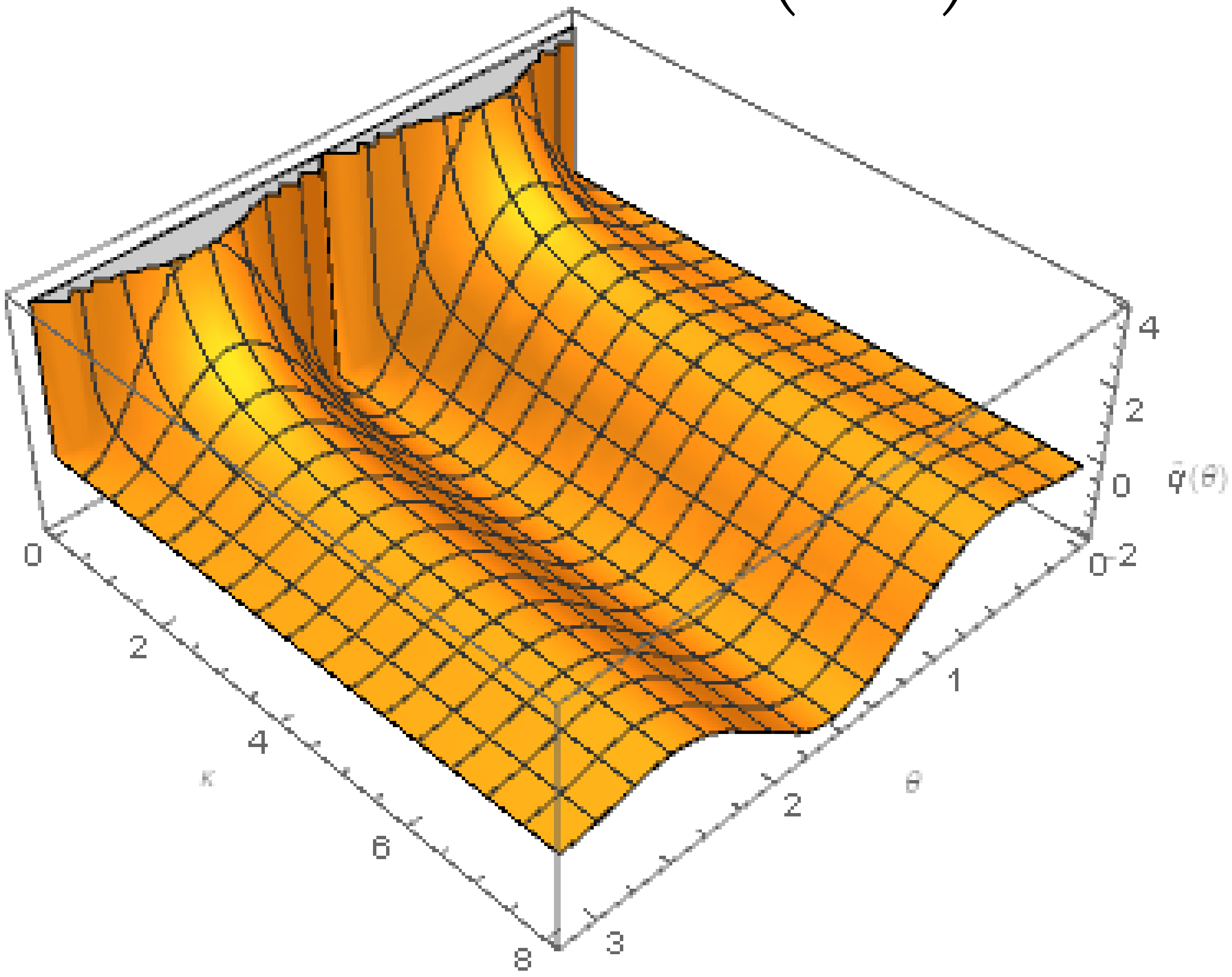
として，$s \to \theta$の変数変換を行う．すると，

$$\boxed{\tilde{q}(\theta) = \left(\frac{8}{\kappa} + 2\right)\sin^2\theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4\right)\sin^4\theta}$$

を得る．

$\tilde{q}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{q}(\theta) = \left(\frac{8}{\kappa} + 2\right)\sin^2\theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4\right)\sin^4\theta$$



最大値:

$$\frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)}$$

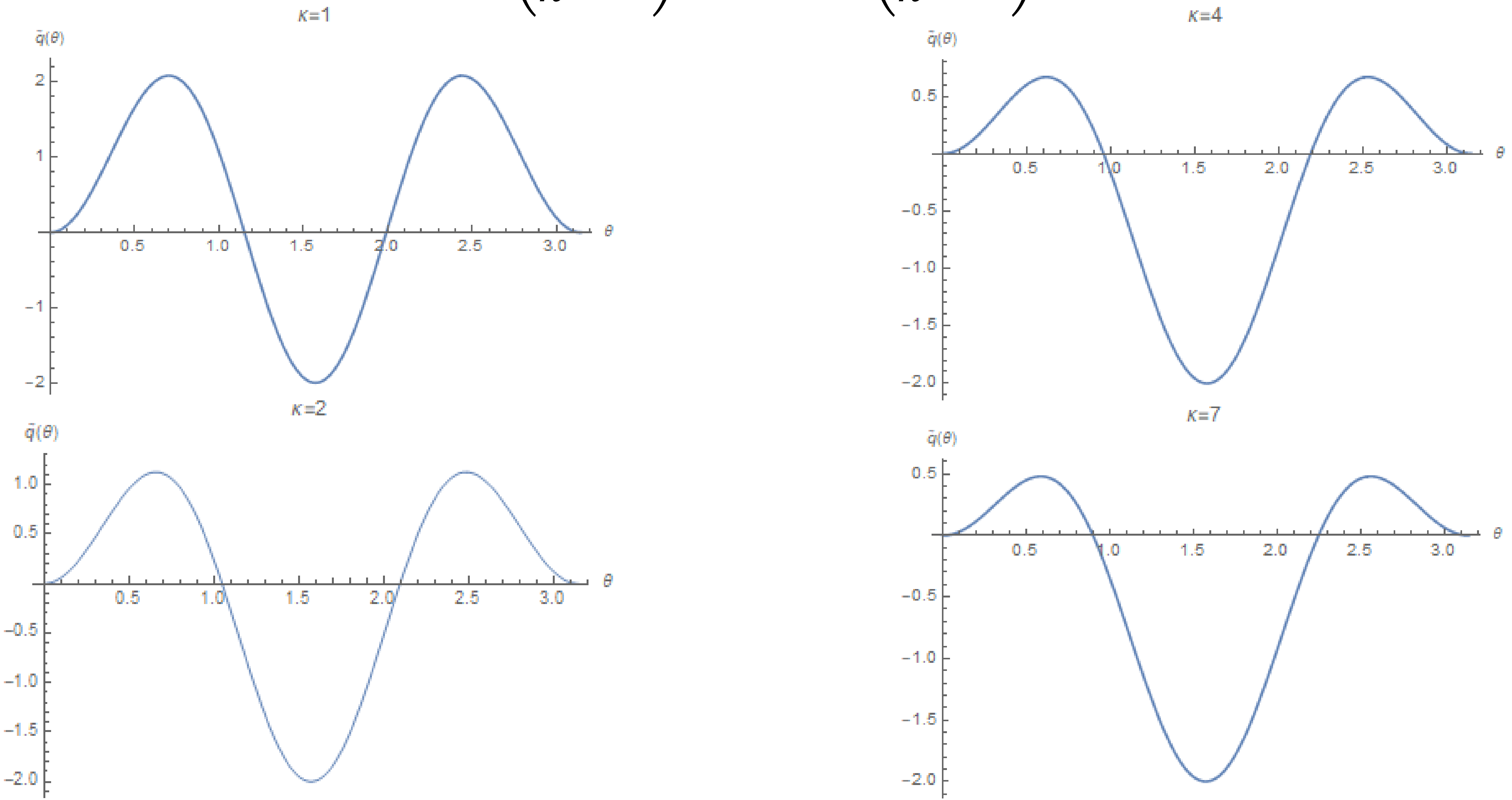
$$\left(\begin{array}{c}\theta = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{4+\kappa}{8+4\kappa}}\right), \\ \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{4+\kappa}{8+4\kappa}}\right)\end{array}\right)$$

最小値:

$$-2 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

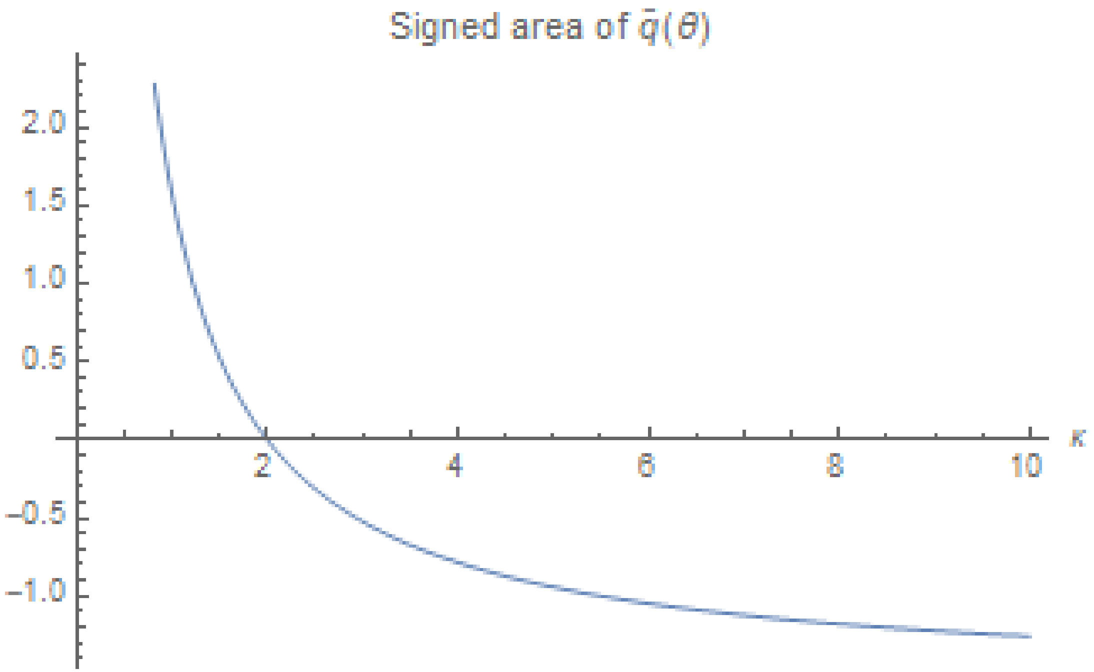
$\tilde{q}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{q}(\theta) = \left(\frac{8}{\kappa} + 2\right)\sin^2\theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4\right)\sin^4\theta$$



$\tilde{q}(\theta)$のκ依存性

$$\tilde{q}(\theta) = \left(\frac{8}{\kappa} + 2\right)\sin^2\theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4\right)\sin^4\theta$$



- $\tilde{q}(\theta)$の符号付き面積$S(\kappa)$:

$$S(\kappa) = \pi\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2}\right),\ \kappa > 0.$$

  - $0 < \kappa < 2$で正.
  - $\kappa = 2$で0.
  - $2 < \kappa$で負.

まとめ

- 先行研究の定常密度関数は$\kappa = 4, 8$の時に相転移を起こしたが,
  本研究の固有値方程式の零固有値解は$\kappa = 2, 4$の時に相転移を起こした.
- 固有値方程式のポテンシャルは1つの谷の両脇に山を持つ形をしており,
  κの値が大きくなるにつれ山の高さは低くなっていくことが分かった.
- $\kappa = 2$において固有値方程式のポテンシャルの挙動に変化があった.
- 従来知られている$\kappa = 4, 8$での相転移とは異なる, $\kappa = 2$での変化が
  確認されたこととなる.
- $\kappa = 2$においてSLE$_\kappa$はloop-erased random walk の連続極限に対応する.
- $\kappa = 2$においてポテンシャルの挙動に変化が起こったことと,
  loop-erased random walk には何らかの関連があると予想される.

参考文献

- T.J.Lyons, V.Margarint and S.Nejad : Convergence to closed-form distribution for the backward SLE$_\kappa$ at some random times and the phase transition at κ=8, arXiv:1910.05519v1 [math.PR].
- Schramm, Oded : Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J. Math. 118 (2000), 221-288, arXiv:math.PR/9904022
- 小谷眞一, 俣野博(2006)「微分方程式と固有関数展開」岩波書店.
- W. Kager and B. Nienhuis : A guide to stochastic Löwner evolution and its application. J. Stat. Phys. 115 (2004), 1149–1229, arXiv:math-ph/0312056v3
- D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, and S. Smirnov : Convergence of Ising interfaces to Schramm's SLE curves. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 352(2), (2014), 157-161, arXiv:1312.0533v2