

# 格子経路模型とランダム・ウォークの 三角関数拡張および楕円関数拡張

中央大学大学院理工学研究科 物理学専攻  
博士課程前期課程二年 香取研究室  
星 奈津子

2022年2月25日 2021年度修士論文発表会

# 目次

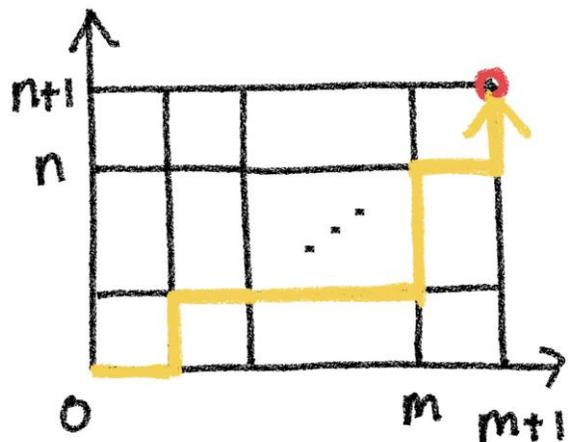
1. はじめに
  - ・ Chaundy-Bullard恒等式に対応した格子経路模型について
2. 三角関数拡張・楕円関数拡張
  - ・ 恒等式の拡張, 証明
3. 数値計算・数値実験
  - ・ 得られた模型の確率解釈
  - ・ 確率分布のパラメータ依存性
  - ・ ランダム・ウォークの再現
4. まとめ
5. 課題
6. 参考文献

# 1. はじめに

Chaundy-Bullard恒等式 [Chaundy, Bullard (1960)]

非負の整数 $m, n$ に対して次が成り立つ.

$$1 = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} x^k + x^{m+1} \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} (1-x)^k.$$



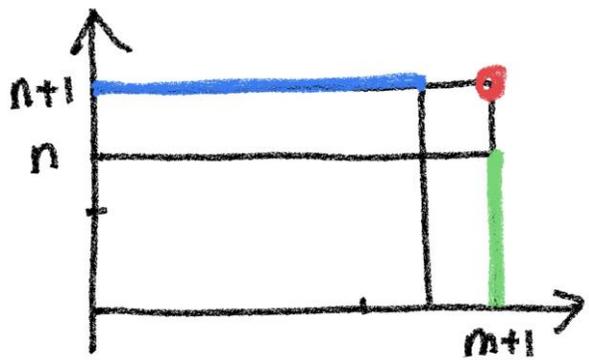
$m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  として,

$$\Lambda_{m+1, n+1} := \{(i, j) : i \in \{0, 1, \dots, m+1\}, j \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$$

の中を右か上に進む経路を考える.

$\Pi_{m+1, n+1} : (0, 0) \rightarrow (m+1, n+1)$  の経路の集合.

経路  $\pi$  はステップ  $s := \begin{cases} (i, j) \rightarrow (i+1, j) & : s_{\rightarrow} \\ (i, j) \rightarrow (i, j+1) & : s_{\uparrow} \end{cases}$  の集合. 各ステップに重み  $w(s)$  を課す.



$$w(s_{\rightarrow}) := \begin{cases} h(i, j), & 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ 1, & 0 \leq i \leq m, j = n + 1 \end{cases}$$

$$w(s_{\uparrow}) := \begin{cases} 1 - h(i, j), & 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ 1, & i = m + 1, 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

経路の重み  $w(\pi) := \prod_{s \in \pi} w(s)$  を考える.

$\pi_{\tau}$  :  $\tau$  ステップ目までの経路,

$s_{\tau}(\pi_{\tau})$  :  $\pi_{\tau}$  の  $\tau$  ステップ目 とすると,

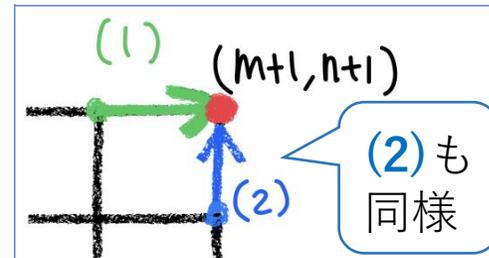
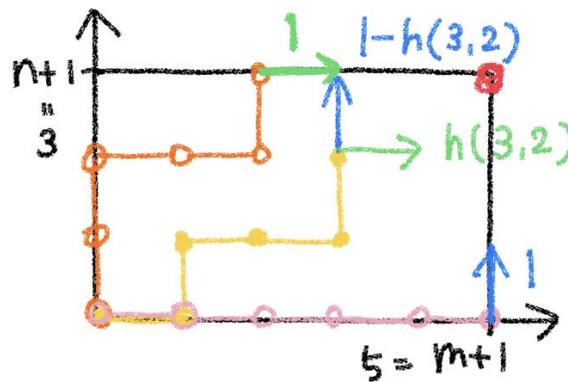
$$\sum_{\pi_{\tau} : \pi_{\tau-1}} w(s_{\tau}(\pi_{\tau})) = 1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{\pi_{\tau}} w(\pi_{\tau}) &= \sum_{\pi_{\tau-1}} \left( w(\pi_{\tau-1}) \sum_{\pi_{\tau} : \pi_{\tau-1}} w(s_{\tau}(\pi_{\tau})) \right) \\ &= \sum_{\pi_{\tau-1}} w(\pi_{\tau-1}) = \dots = 1 \end{aligned}$$

より

$$\sum_{\pi \in \Pi_{m+1, n+1}} w(\pi) = 1.$$

例  $m=4, n=2, \tau=5$



[Koornwinder, Schlosser (2008)]  
にて紹介された証明

$$w(s_{\rightarrow}) := \begin{cases} x, & \text{場合分けは同様} \\ 1, & \end{cases}$$

$$w(s_{\uparrow}) := \begin{cases} 1 - x, \\ 1 \end{cases}$$

図の(1)を通る経路は,

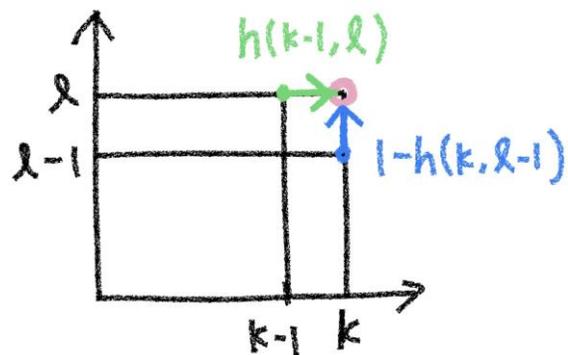
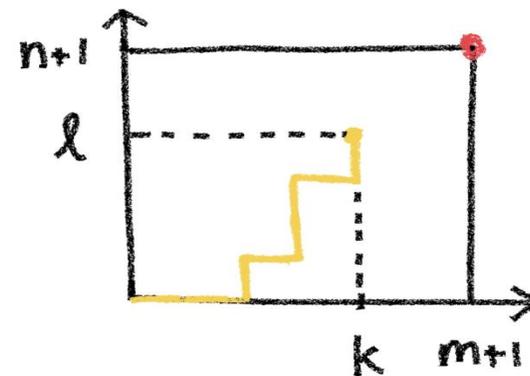
上に  $n + 1$  歩 :  $(1 - x)^{n+1}$   
右に  $k \in \{0, \dots, m\}$  歩 :  $x^k$   
どこで右へ進むか :  $\binom{n+k}{k}$

(1)を通る経路の重みの和は

$$(1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} x^k.$$

$k + l$  ステップで点  $(k, l)$  に到達するすべての経路の重みの和を

$$A(k, l) := \begin{cases} \sum_{\pi: (0,0) \rightarrow (k,l)} w(\pi), & (k, l) \in \Lambda_{m,n} \setminus \{(0,0)\}, \\ 1, & (k, l) = (0,0) \end{cases} \quad \text{と書くことにする.}$$

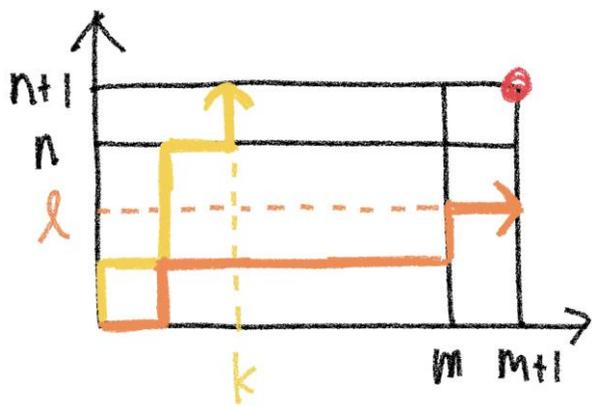


$$A(k, l) = \underline{h(k-1, l)A(k-1, l)} + \underline{(1-h(k, l-1))A(k, l-1)}.$$

同様に、点  $(m+1, n+1)$  までの経路を2種類に分けて

$$\begin{aligned} A(m+1, n+1) &= 1 \times A(m, n+1) + 1 \times A(m+1, n) \\ &= \sum_{k=0}^m (1-h(k, n))A(k, n) + \sum_{l=0}^n h(m, l)A(m, l) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$1 = \sum_{k=0}^m (1-h(k, n))A(k, n) + \sum_{l=0}^n h(m, l)A(m, l) \quad \dots \textcircled{1}$$



証明したい恒等式：  $1 = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} x^k + x^{m+1} \sum_{l=0}^n \binom{m+l}{l} (1-x)^l. \dots \textcircled{2}$

## 2. 三角関数拡張・楕円関数拡張

$q$ -Pochhammer記号 パラメータ  $q \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$  (基底とよぶ)を導入して,

$$x \in \mathbb{C} \text{ に対して } (x; q)_{\infty} := \prod_{\ell=0}^{\infty} (1 - xq^{\ell}),$$

$$(x; q)_k := \frac{(x; q)_{\infty}}{(xq^k; q)_{\infty}}, \quad k \text{ が自然数のときは } \prod_{\ell=0}^{k-1} (1 - xq^{\ell}).$$

変形 Jacobi テータ関数  $p \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |p| < 1$  (ノームとよぶ),  $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  に対して

$$\theta(x; p) := \left(x, \frac{p}{x}; p\right)_{\infty} = (x; p)_{\infty} \left(\frac{p}{x}; p\right)_{\infty} = \prod_{\ell=0}^{\infty} (1 - xp^{\ell}) \left(1 - \frac{p^{\ell+1}}{x}\right) \xrightarrow{p \rightarrow 0} 1 - x.$$

楕円関数拡張された階乗 (あるいは  $(q, p)$ -拡張された階乗)

$$(x; q, p)_k = \prod_{\ell=0}^{k-1} \theta(xq^{\ell}; p), \quad k \in \{1, 2, \dots\} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \prod_{\ell=0}^{k-1} (1 - xq^{\ell}) = (x; q)_k, \quad k \in \{1, 2, \dots\}.$$

$q$ -拡張 基底  $q \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$  を導入

$$1 = (x; q)_{n+1} \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k + x^{m+1} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k (x; q)_k.$$

ただし  $\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_{n+k}}{(q; q)_k (q; q)_n} : q\text{-二項係数}$

第1  $(a, b; q)$ -拡張 パラメータ  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  を導入

$$1 = \frac{(bx; q)_{n+1}}{(b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(q^{n+1}, ax; q)_k}{(q, aq/b; q)_k} q^k + \frac{(ax; q)_{m+1}}{(a/b; q)_{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{m+1}, bx; q)_k}{(q, bq/a; q)_k} q^k.$$

第2  $(a, b; q)$ -拡張

$$1 = \frac{(bx, b/x; q)_{n+1}}{(ab, b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(q^{n+1}, ax, a/x; q)_k}{(q, aq/b, abq^{1+n}; q)_k} q^k + \frac{(ax, a/x; q)_{m+1}}{(ab, a/b; q)_{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{m+1}, bx, b/x; q)_k}{(q, bq/a, abq^{1+m}; q)_k} q^k.$$

$(a, b, c; q)$ -拡張 パラメータ  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  を導入

$$1 = \frac{(ac, c/a, bx, b/x; q)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(1 - acq^{n+2k})(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q)_k}{(1 - acq^n)(q, aq/b, abq^{1+n}, ac, cq^{n+1}/x, cxq^{n+1}; q)_k} q^k$$

$$+ \frac{(bc, c/b, ax, a/x; q)_{m+1}}{(ab, a/b, cx, c/x; q)_{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(1 - bcq^{m+2k})(bcq^m, acq^m, c/a, q^{m+1}, bx, b/x; q)_k}{(1 - bcq^m)(q, bq/a, abq^{1+m}, bc, cq^{m+1}/x, cxq^{m+1}; q)_k} q^k.$$

楕円関数拡張  $\rho \in \mathbb{C}, 0 < |\rho| < 1$  を導入

$$1 = \frac{(ac, c/a, bx, b/x; q, \rho)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q, \rho)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{\theta(acq^{n+2k}; \rho)(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q, \rho)_k}{\theta(acq^n; \rho)(q, aq/b, abq^{1+n}, ac, cq^{n+1}/x, cxq^{n+1}; q, \rho)_k} q^k$$

$$+ \frac{(bc, c/b, ax, a/x; q, \rho)_{m+1}}{(ab, a/b, cx, c/x; q, \rho)_{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{\theta(bcq^{m+2k}; \rho)(bcq^m, acq^m, c/a, q^{m+1}, bx, b/x; q, \rho)_k}{\theta(bcq^m; \rho)(q, bq/a, abq^{1+m}, bc, cq^{m+1}/x, cxq^{m+1}; q, \rho)_k} q^k.$$

$q$ -拡張

$$h(i, j) = xq^j, \quad A(k, \ell) = \left[ \begin{matrix} k + \ell \\ k \end{matrix} \right]_q x^k (x; q)_\ell.$$

第1  $(a, b; q)$ -拡張

$$\begin{aligned} h(i, j) &= \frac{1 - axq^i}{1 - (a/b)q^{i-j}}, \quad 1 - h(i, j) = \frac{1 - bxq^j}{1 - (b/a)q^{j-i}}, \quad A(k, \ell) = \left(1 - \frac{a}{b}q^{k-\ell}\right) \frac{(ax; q)_k (q^{k+1}; q)_\ell (bx; q)_\ell}{(a/b; q)_{k+1} (q; q)_\ell (q(b/a); q)_\ell} q^\ell \\ &= \left(1 - \frac{b}{a}q^{\ell-k}\right) \frac{(bx; q)_\ell (q^{\ell+1}; q)_k (ax; q)_k}{(b/a; q)_{\ell+1} (q; q)_k (q(a/b); q)_k} q^k. \end{aligned}$$

第2  $(a, b; q)$ -拡張

$$h(i, j) = \frac{(1 - axq^i)(1 - (a/x)q^i)}{(1 - abq^{i+j})(1 - (a/b)q^{i-j})}, \quad 1 - h(i, j) = \frac{(1 - bxq^j)(1 - (b/x)q^j)}{(1 - abq^{i+j})(1 - (b/a)q^{j-i})},$$

$$\begin{aligned} A(k, \ell) &= \left(1 - \frac{a}{b}q^{k-\ell}\right) \frac{(ax, a/x; q)_k (q^{k+1}; q)_\ell (bx, b/x; q)_\ell}{(a/b; q)_{k+1} (q; q)_\ell (q(b/a); q)_\ell (ab; q)_{k+\ell}} q^\ell \\ &= \left(1 - \frac{b}{a}q^{\ell-k}\right) \frac{(bx, b/x; q)_\ell (q^{\ell+1}; q)_k (ax, a/x; q)_k}{(b/a; q)_{\ell+1} (q; q)_k (q(a/b); q)_k (ab; q)_{\ell+k}} q^k. \end{aligned}$$

$(a, b, c; q)$ -拡張

$$h(i, j) = \frac{(1 - bcq^{i+2j})(1 - (c/b)q^i)(1 - axq^i)(1 - (a/x)q^i)}{(1 - abq^{i+j})(1 - (a/b)q^{i-j})(1 - cxq^{i+j})(1 - (c/x)q^{i+j})},$$

$$1 - h(i, j) = \frac{(1 - acq^{2i+j})(1 - (c/a)q^j)(1 - bxq^j)(1 - (b/x)q^j)}{(1 - abq^{i+j})(1 - (b/a)q^{j-i})(1 - cxq^{i+j})(1 - (c/x)q^{i+j})},$$

$$\begin{aligned} A(k, \ell) &= \left(1 - \frac{a}{b}q^{k-\ell}\right) \frac{(bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q)_k (q^{k+1}; q)_\ell (acq^k, c/a, bx, b/x; q)_\ell}{(a/b; q)_{k+1} (q; q)_\ell (q(b/a); q)_\ell (ab, cx, c/x; q)_{k+\ell}} q^\ell \\ &= \left(1 - \frac{b}{a}q^{\ell-k}\right) \frac{(acq^k, c/a, bx, b/x; q)_\ell (q^{\ell+1}; q)_k (bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q)_k}{(b/a; q)_{\ell+1} (q; q)_k (q(a/b); q)_k (ab, cx, c/x; q)_{\ell+k}} q^k. \end{aligned}$$

$$h(i, j) = \frac{\theta(bcq^{i+2j}, (c/b)q^i, axq^i, (a/x)q^i; p)}{\theta(abq^{i+j}, (a/b)q^{i-j}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)},$$

$$1 - h(i, j) = \frac{\theta(acq^{2i+j}, (c/a)q^j, bxq^j, (b/x)q^j; p)}{\theta(abq^{i+j}, (b/a)q^{j-i}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)},$$

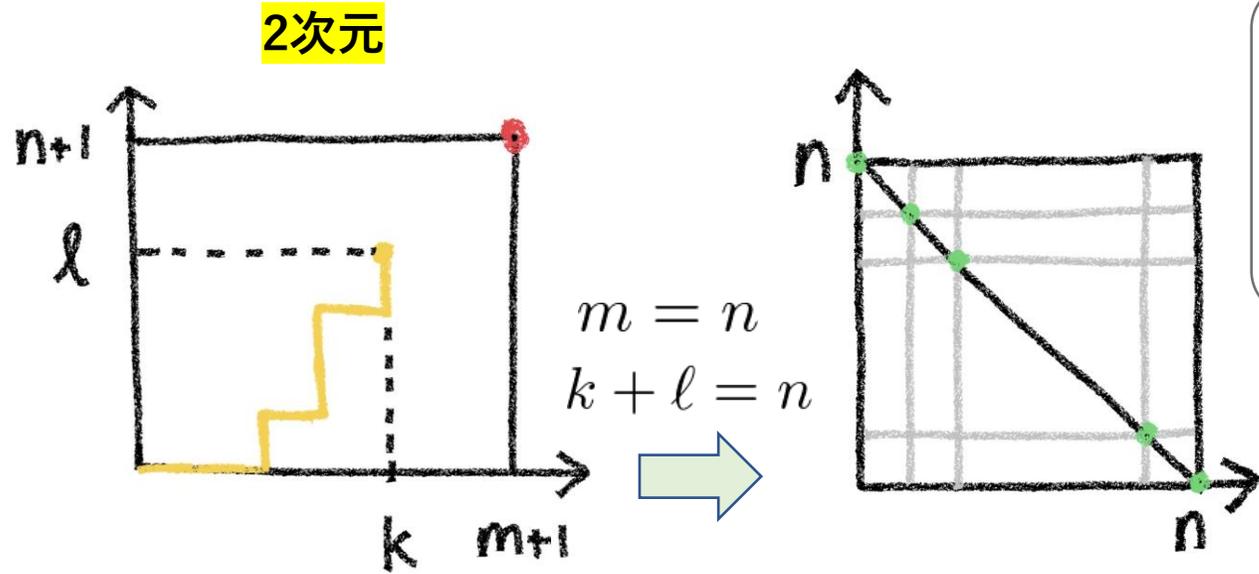
$$\begin{aligned} A(k, \ell) &= \theta\left(\frac{a}{b}q^{k-\ell}; p\right) \frac{(bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q, p)_k (q^{k+1}, acq^k, c/a, bx, b/x; q, p)_\ell}{(a/b; q, p)_{k+1} (q, q(b/a); q, p)_\ell (ab, cx, c/x; q, p)_{k+\ell}} q^\ell, \\ &= \theta\left(\frac{b}{a}q^{\ell-k}; p\right) \frac{(acq^k, c/a, bx, b/x; q, p)_\ell (q^{\ell+1}, bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q, p)_k}{(b/a; q, p)_{\ell+1} (q, q(a/b); q, p)_k (ab, cx, c/x; q, p)_{\ell+k}} q^k. \end{aligned}$$

テータ関数の性質

反転公式	$\theta\left(\frac{1}{z}; p\right) = -\frac{1}{z}\theta(z; p)$	⇒	周期性 $\theta\left(\frac{p}{z}; p\right) = \theta(z; p)$
擬周期性	$\theta(pz; p) = -\frac{1}{z}\theta(z; p)$		

Riemann-Weierstrassの加法定理  $\theta\left(xy, \frac{x}{y}, uv, \frac{u}{v}; p\right) - \theta\left(xv, \frac{x}{v}, uy, \frac{u}{y}; p\right) = \frac{u}{y}\theta\left(yv, \frac{y}{v}, xu, \frac{x}{u}; p\right)$  を用いた.

### 3. 数値計算・数値実験

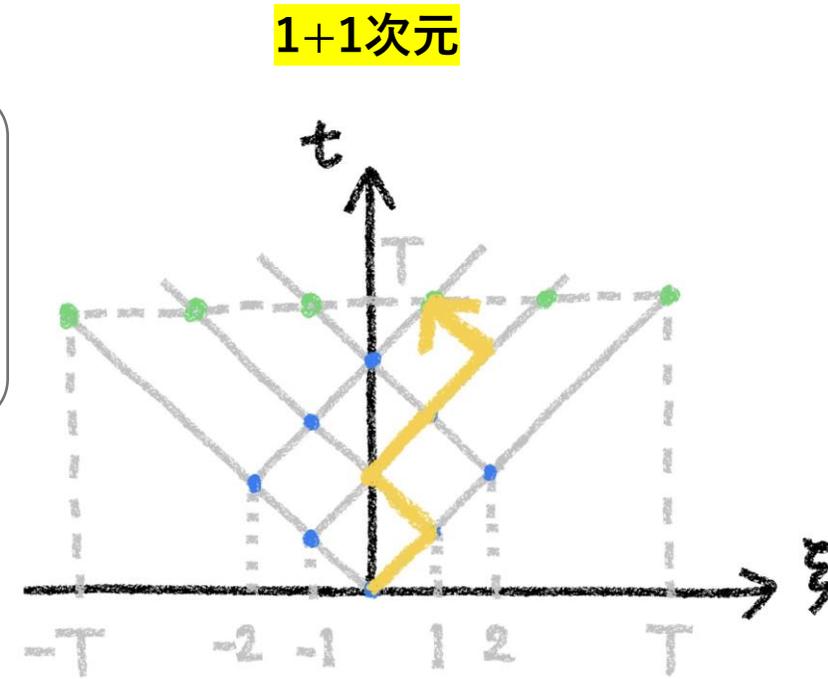


変数変換

$$i = \frac{t + \xi}{2}$$

$$j = \frac{t - \xi}{2}$$

$n = T$



重み付き格子経路模型

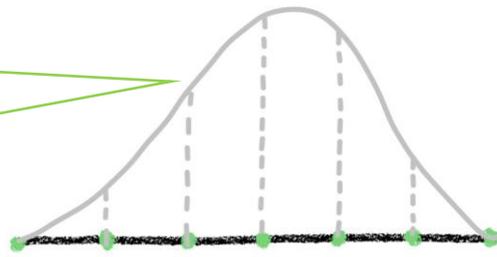
$$h(i, j) \in \mathbb{C}$$

$n$ ステップ進んだとき、  
斜めの線上の格子点にいる

ランダムウォークとみなせる

$$h(i, j) \in \mathbb{R}, 0 < h(i, j) < 1$$

$h(i, j)$ が確率なら、 $A(k, l)$ は  
 $k + l$ ステップ後に  
点 $(k, l)$ にいる確率



★  $h(i, j) \in \mathbb{R}, 0 < h(i, j) < 1$  とするために各パラメータに課す十分条件を定めた

$q$ -拡張  $0 < q < 1, 0 < x < 1$

第1  $(a, b; q)$ -拡張 (1)  $a > 0, b < 0, \frac{1}{b} < x < \frac{1}{a},$

(2) (1)で  $a \leftrightarrow b$  としたもの.

第2  $(a, b; q)$ -拡張 (1)  $0 < a < 1, b < 0, a < x < \frac{1}{a},$

(2)  $0 < a, -1 < b < 0, \frac{1}{b} < x < b,$

(3) (1), (2)で  $a \leftrightarrow b$  としたもの.

$(a, b, c; q)$ -拡張 (1)  $0 < c < a < 1, b < 0, a < x < \frac{1}{a},$

(2)  $0 < a < 1, \max \left\{ b, \frac{1}{b} \right\} < c < 0, a < x < \frac{1}{a},$

(3)  $0 < c < \min \left\{ a, \frac{1}{a} \right\}, -1 < b < 0, \frac{1}{b} < x < b,$

(4)  $0 < a, -1 < b < c < 0, \frac{1}{b} < x < b,$

(5) (1)~(4)でそれぞれ  $a \leftrightarrow b$  としたもの.

楕円関数拡張  $0 \leq p < x < 1$  のとき  $\theta(x; p) > 0$ ,  $1/\theta(x; p) > 0$  となることから

- (1)  $0 < c < a < 1$ ,  $b < 0$ ,  $a < x < \frac{1}{a}$ ,  $p < acq^{3T}$ ,
- (2)  $0 < a < 1$ ,  $\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} < c < 0$ ,  $a < x < \frac{1}{a}$ ,  $p < \min\left\{bcq^{3T}, \frac{c}{b}q^T, axq^T, \frac{a}{x}q^T\right\}$ ,
- (3)  $0 < c < \min\left\{a, \frac{1}{a}\right\}$ ,  $-1 < b < 0$ ,  $\frac{1}{b} < x < b$ ,  $p < \min\left\{acq^{3T}, \frac{c}{a}q^T, bxq^T, \frac{b}{x}q^T\right\}$ ,
- (4)  $0 < a$ ,  $-1 < b < c < 0$ ,  $\frac{1}{b} < x < b$ ,  $p < bcq^{3T}$ ,
- (5) (1)~(4)でそれぞれ  $a \leftrightarrow b$  としたもの.

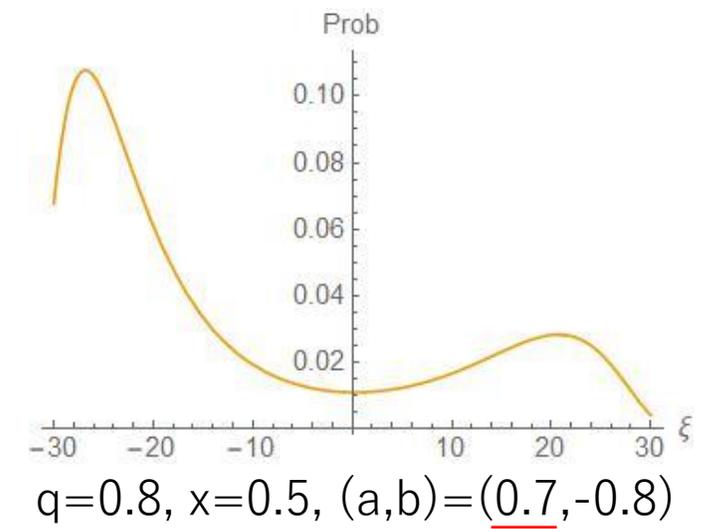
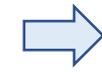
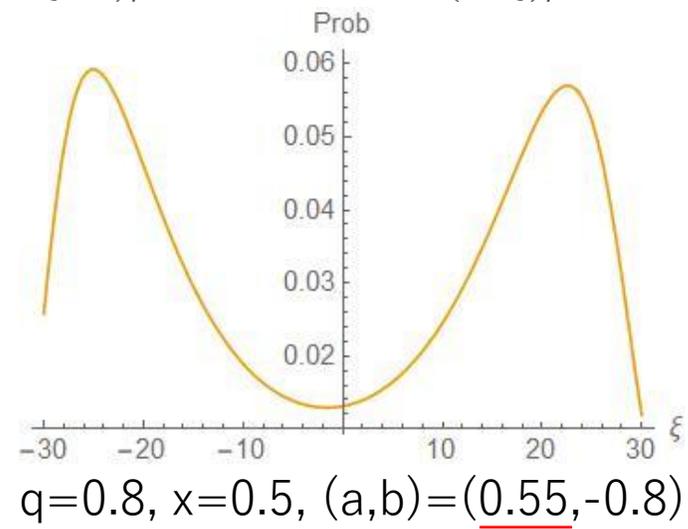
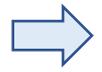
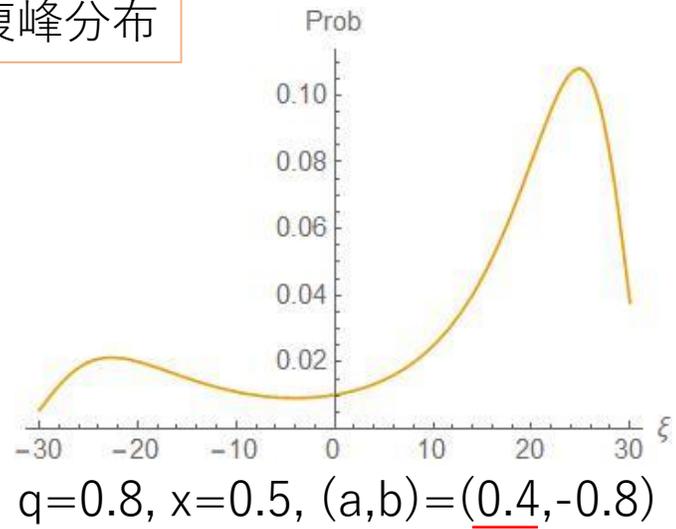
以上の条件(1)をそれぞれ満たすようにパラメータの値を決め,  $A(k, \ell)$ を変数変換したものに代入して分布をプロットしていく.

# 第1 $(a,b;q)$ -拡張 の分布

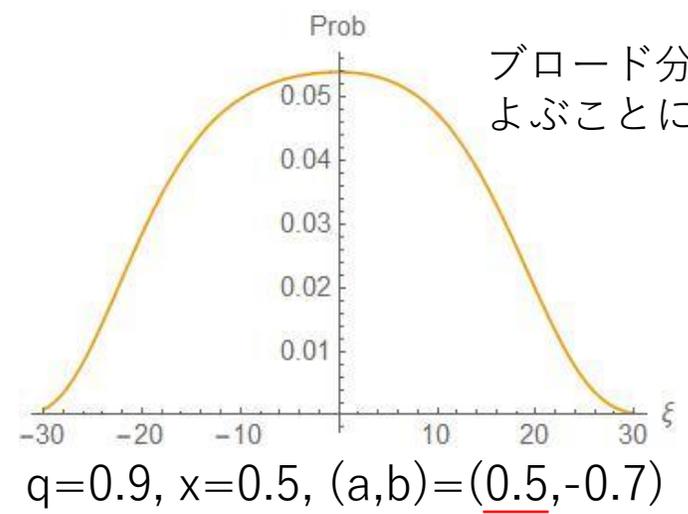
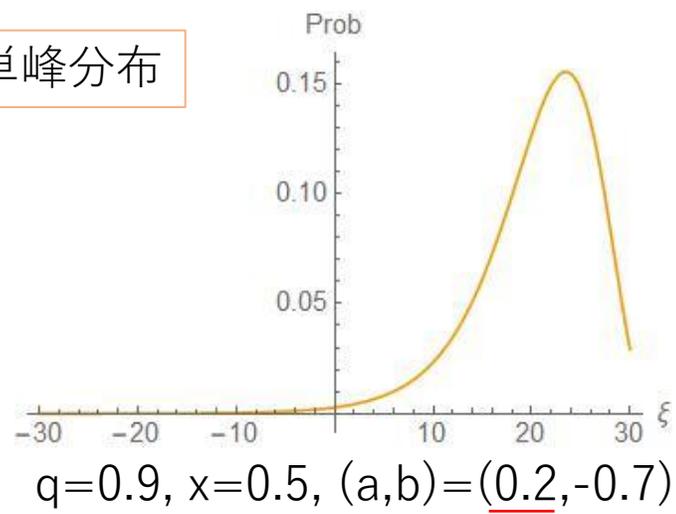
$$a > 0, b < 0, \frac{1}{b} < x < \frac{1}{a}$$

$$\left(1 - \frac{a}{b}q^\xi\right) \frac{(ax; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, bx; q)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2}}$$

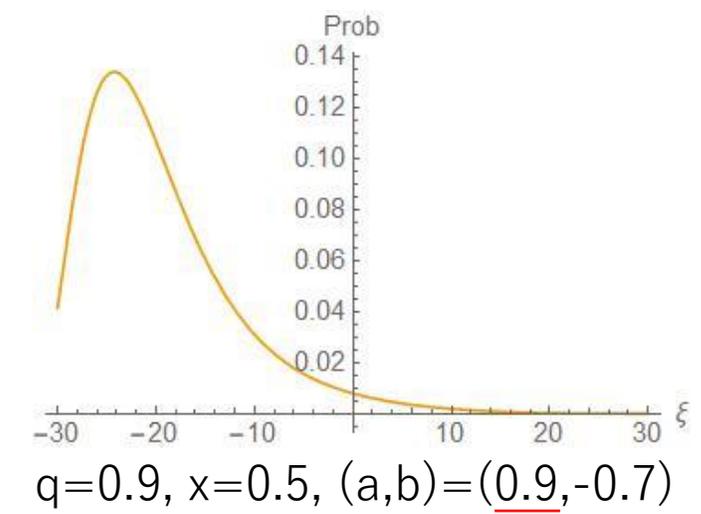
複峰分布



単峰分布

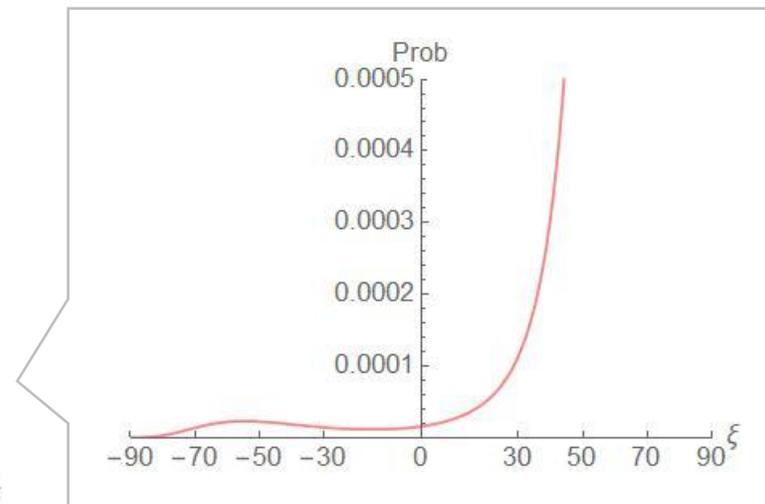
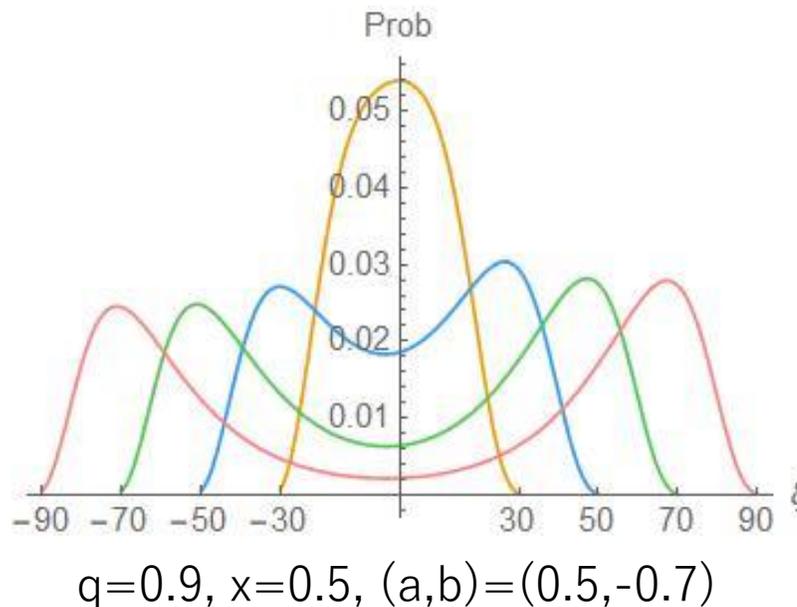
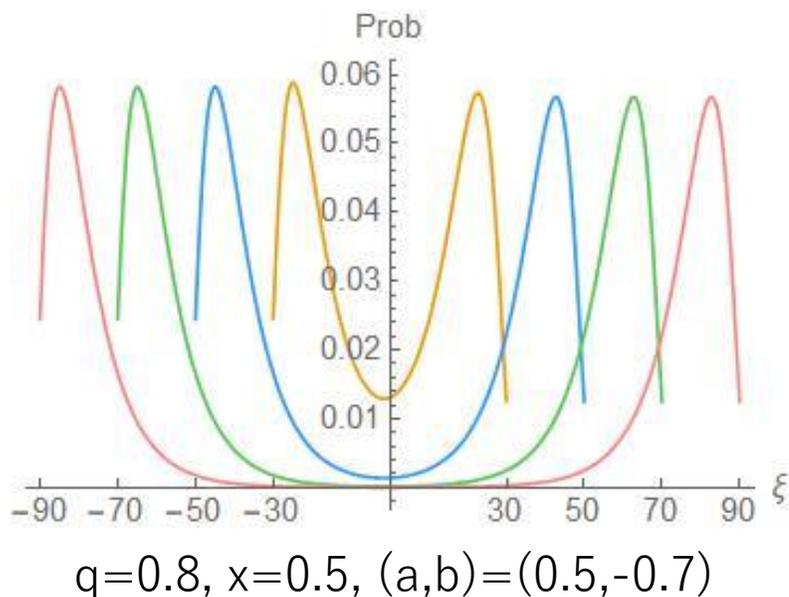
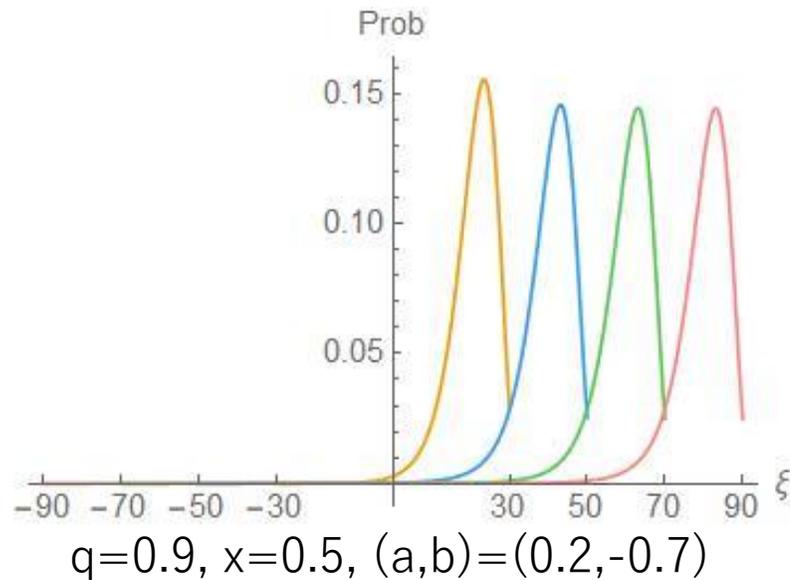
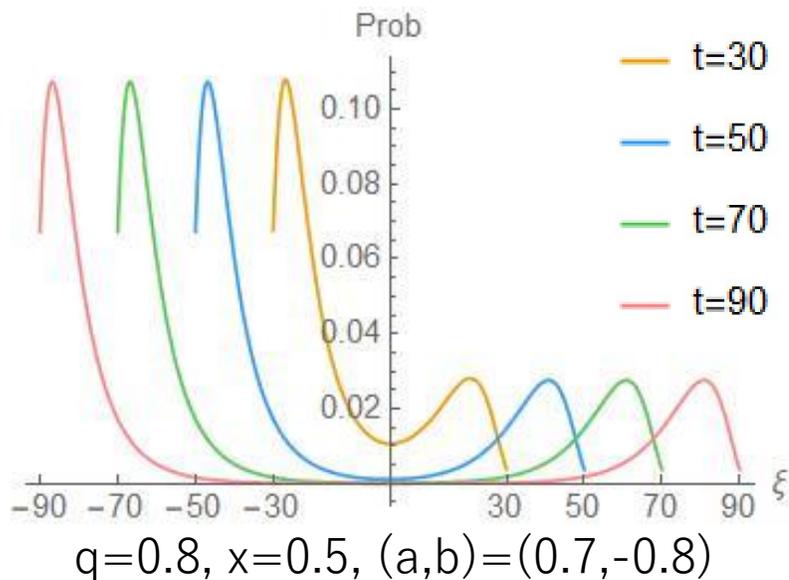


ブロード分布とよぶことにする



第1  $(a,b;q)$ -拡張の分布

$$\left(1 - \frac{a}{b}q^\xi\right) \frac{(ax; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, bx; q)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2}}, \quad a > 0, b < 0, \frac{1}{b} < x < \frac{1}{a}$$



※単峰/複峰の判断は差分の計算から行っている

- 単峰と複峰が現れる
- $a$ を大きくすると最大値が右から左へ移動する
- 時間の経過に伴って単峰が複峰になる

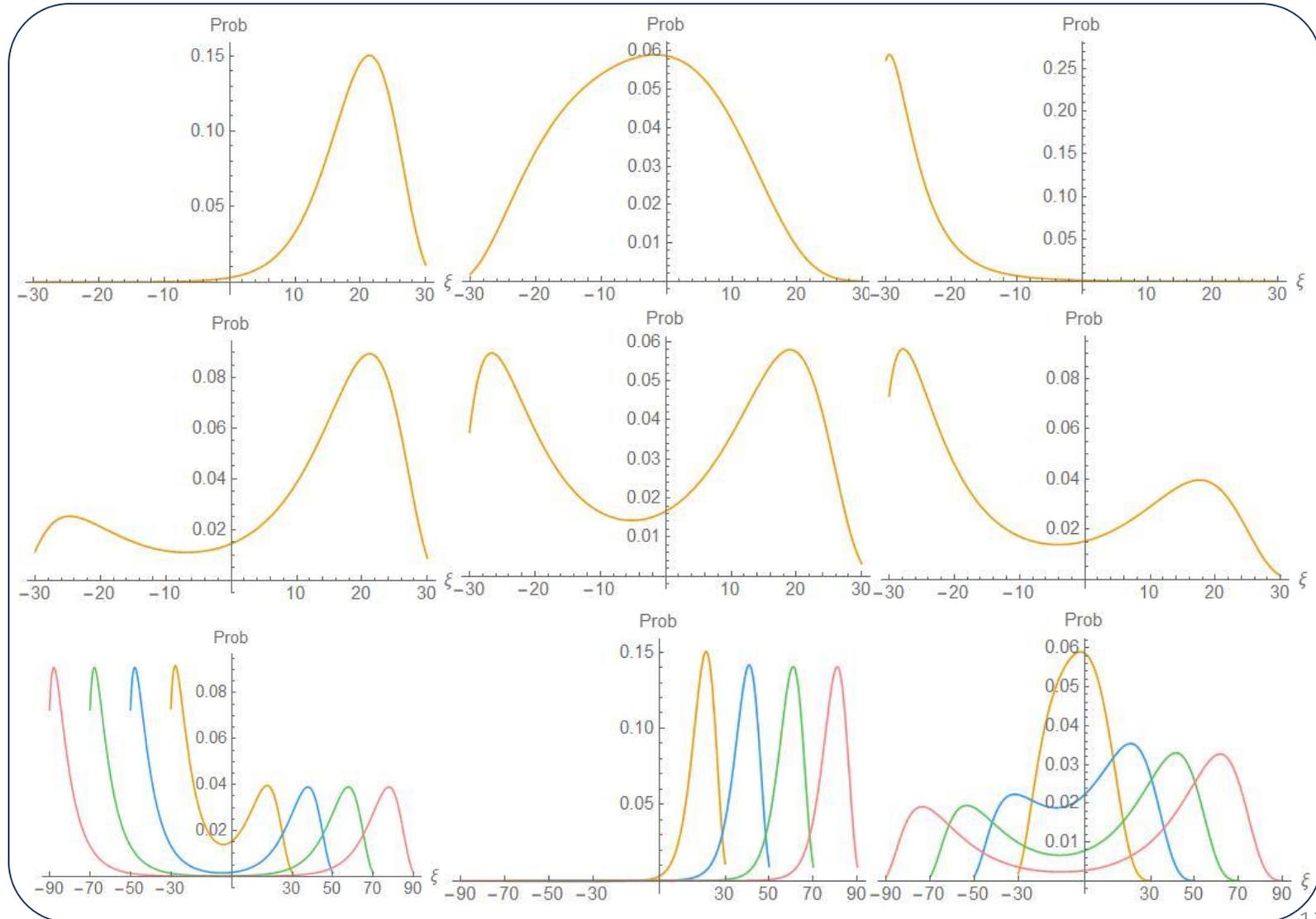
## 第2 $(a,b;q)$ -拡張 の分布

$$\left(1 - \frac{a}{b}q^\xi\right) \frac{(ax, a/x; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, bx, b/x; q)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2} (ab; q)_t}$$

$$0 < a < 1, b < 0, \underline{a < x < \frac{1}{a}}$$

- 単峰と複峰がある
- $a$ を大きくすると最大値が右から左へ移動する
- 時間経過で単峰が複峰になる

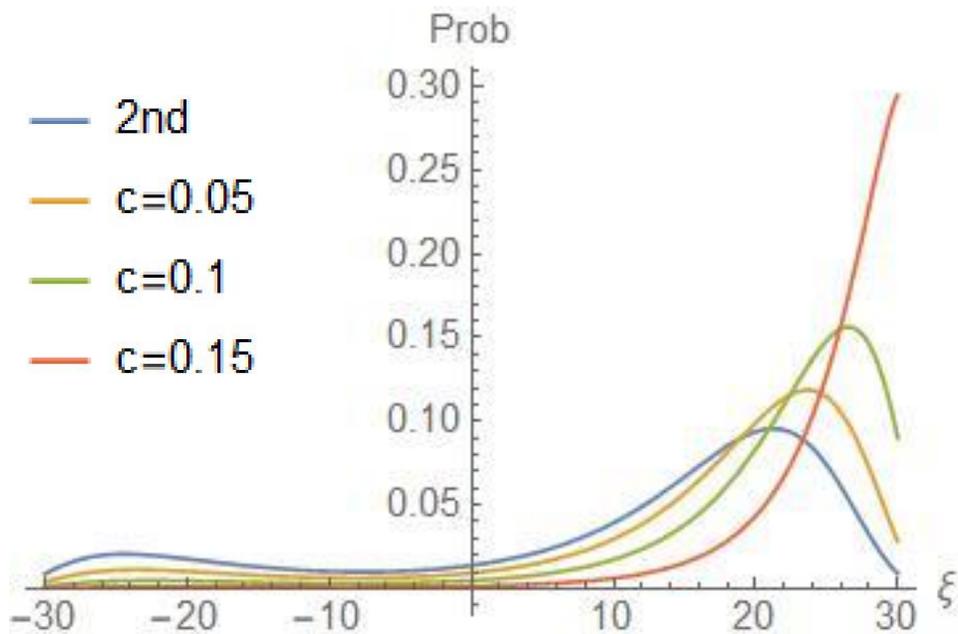
とりうる値の範囲は異なるが、**定性的には**同じ振る舞いをする



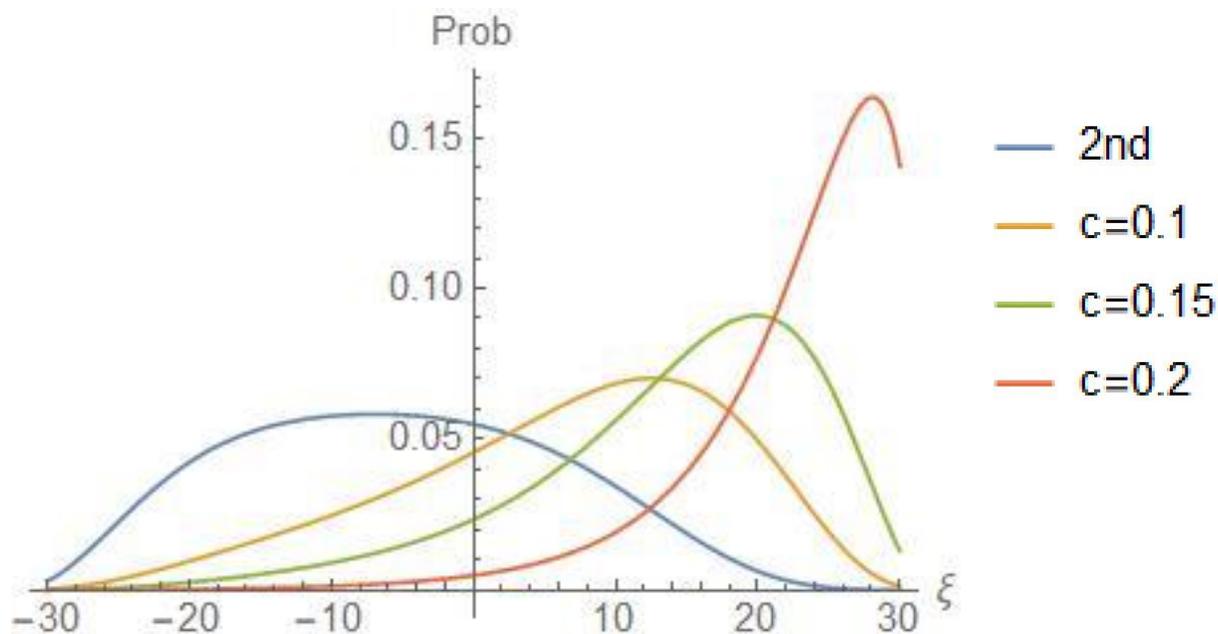
$(a,b,c;q)$ -拡張 の分布

$$0 < \underline{c} < a < 1, b < 0, a < x < \frac{1}{a}$$

$$\left(1 - \frac{a}{b}q^\xi\right) \frac{(bcq^{(t-\xi)/2}, c/b, ax, a/x; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, acq^{(t+\xi)/2}, c/a, bx, b/x; q)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2} (ab, cx, c/x; q)_t}$$



$q=0.8, x=0.5, (a,b)=(0.2,-0.9)$

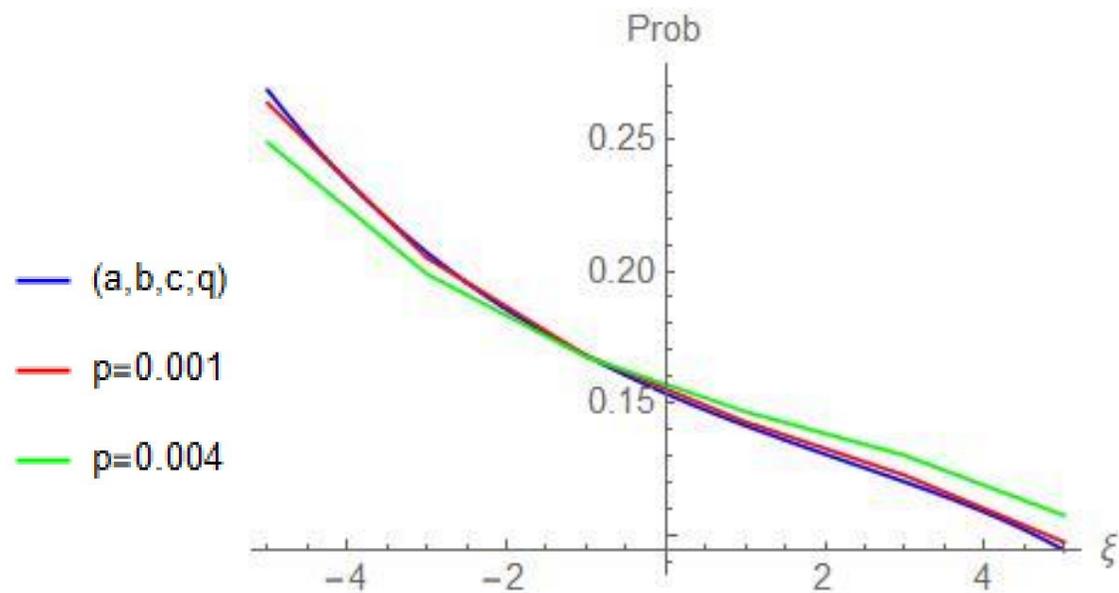


$q=0.9, x=0.5, (a,b)=(0.24,-0.7)$

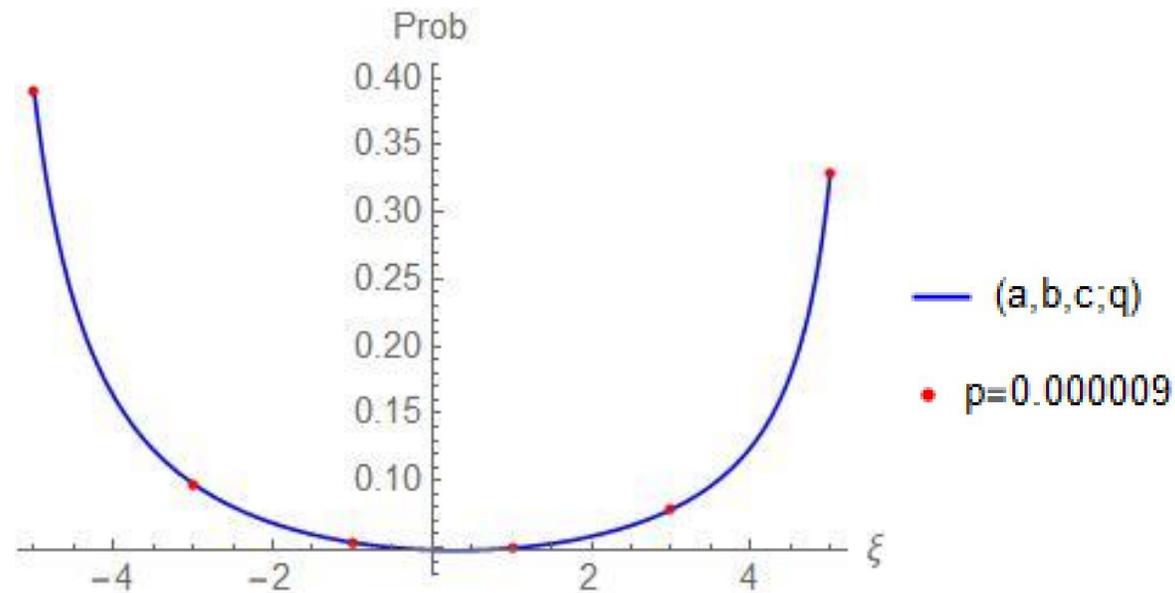
$$T = 5$$

$$0 < c < a < 1, b < 0, a < x < \frac{1}{a}, \underline{p < acq^{3T}}$$

$$\theta\left(\frac{a}{b}q^\xi; p\right) \frac{(bcq^{(t-\xi)/2}, c/b, ax, a/x; q, p)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, acq^{(t+\xi)/2}, c/a, bx, b/x; q, p)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q, p)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q, p)_{(t-\xi)/2} (ab, cx, c/x; q, p)_t}$$



$q=0.8, x=0.5, (a,b)=(0.4,-0.5), c=0.3$

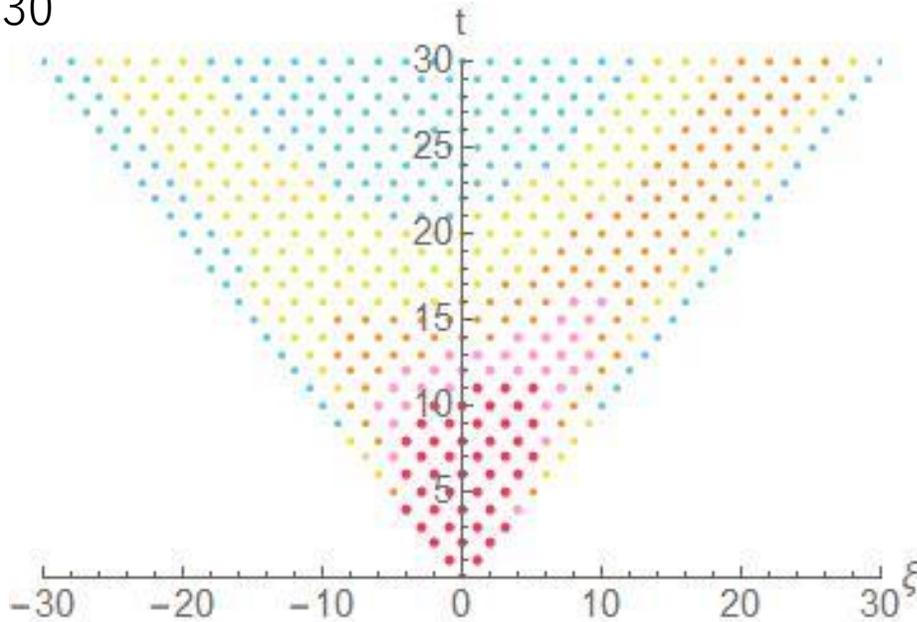


$q=0.5, x=0.8, (a,b)=(0.6,-0.5), c=0.5$

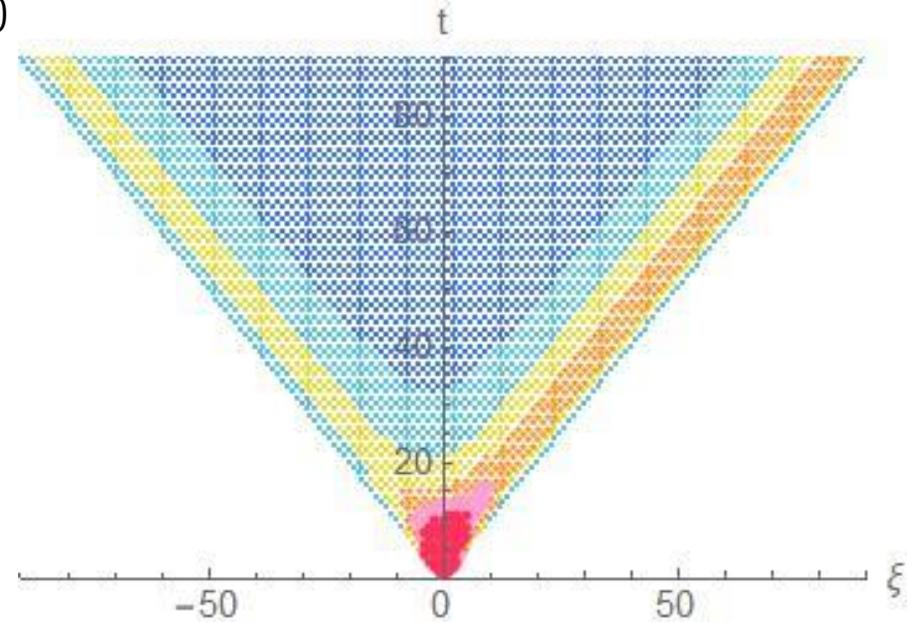
# 第1 $(a,b;q)$ -拡張 の分布を俯瞰する

$$\left(1 - \frac{a}{b}q^\xi\right) \frac{(ax; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, bx; q)_{(t-\xi)/2} q^{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2}}$$

T=30

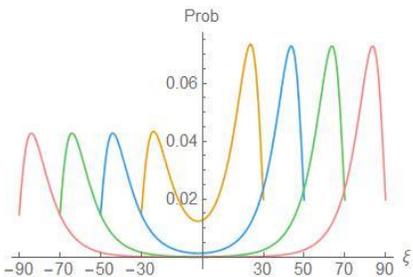


T=90

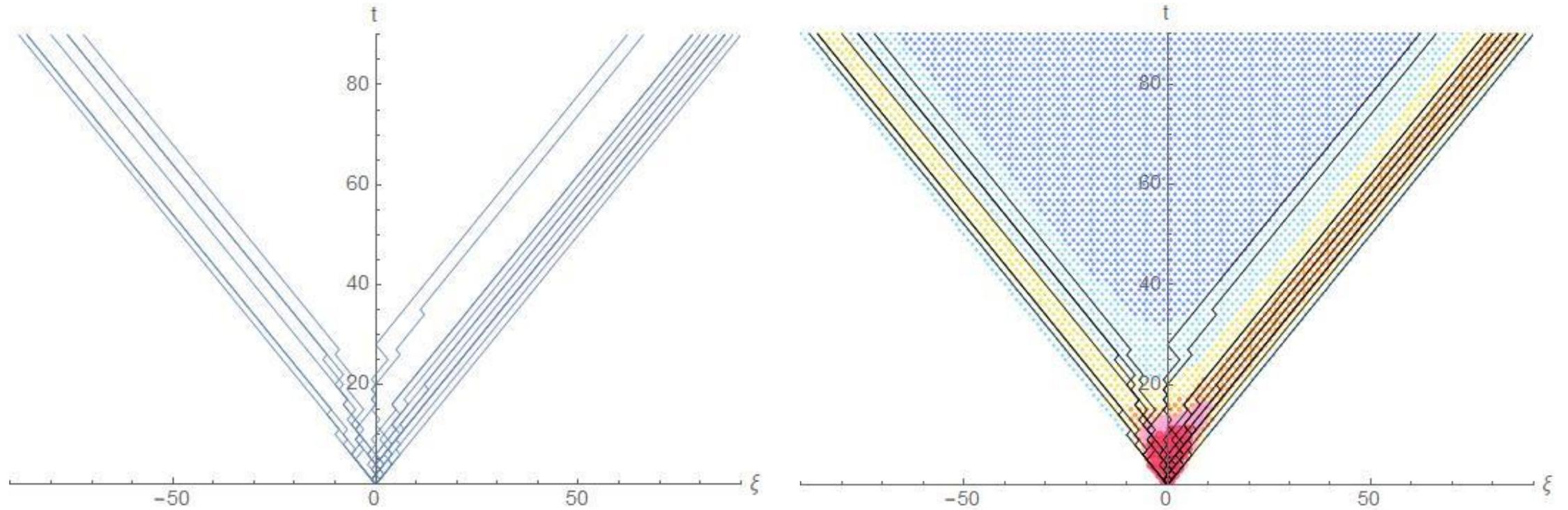


$q=0.8, x=0.5, (a,b)=(0.4,-0.6)$

$0 \leq (\text{青}) < 0.01, 0.01 \leq (\text{水色}) < 0.035, 0.035 \leq (\text{黄色}) < 0.06,$   
 $0.06 \leq (\text{橙色}) < 0.085, 0.085 \leq (\text{ピンク}) < 0.11, 0.11 \leq (\text{赤}) \leq 1.$

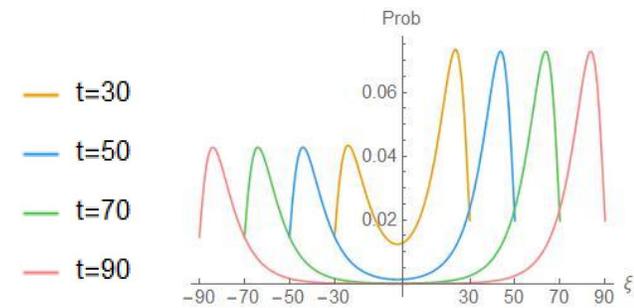


# 第1 $(a,b;q)$ -拡張ランダムウォークの計算機シミュレーション1

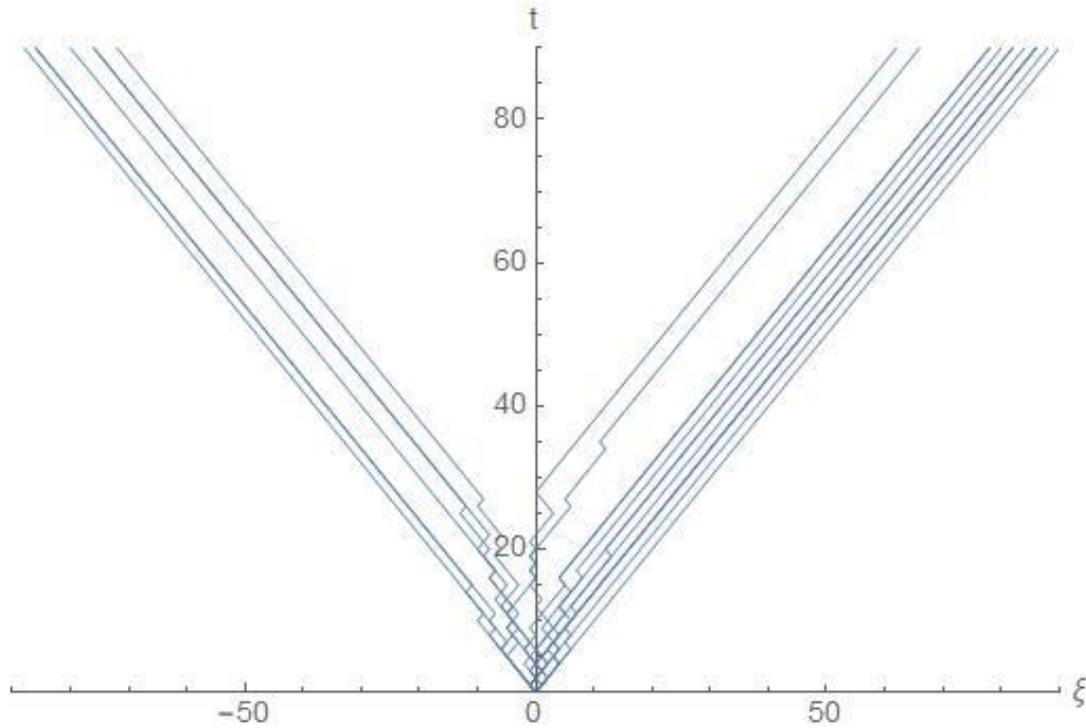


$$q=0.8, x=0.5, (a,b)=(0.4,-0.6)$$

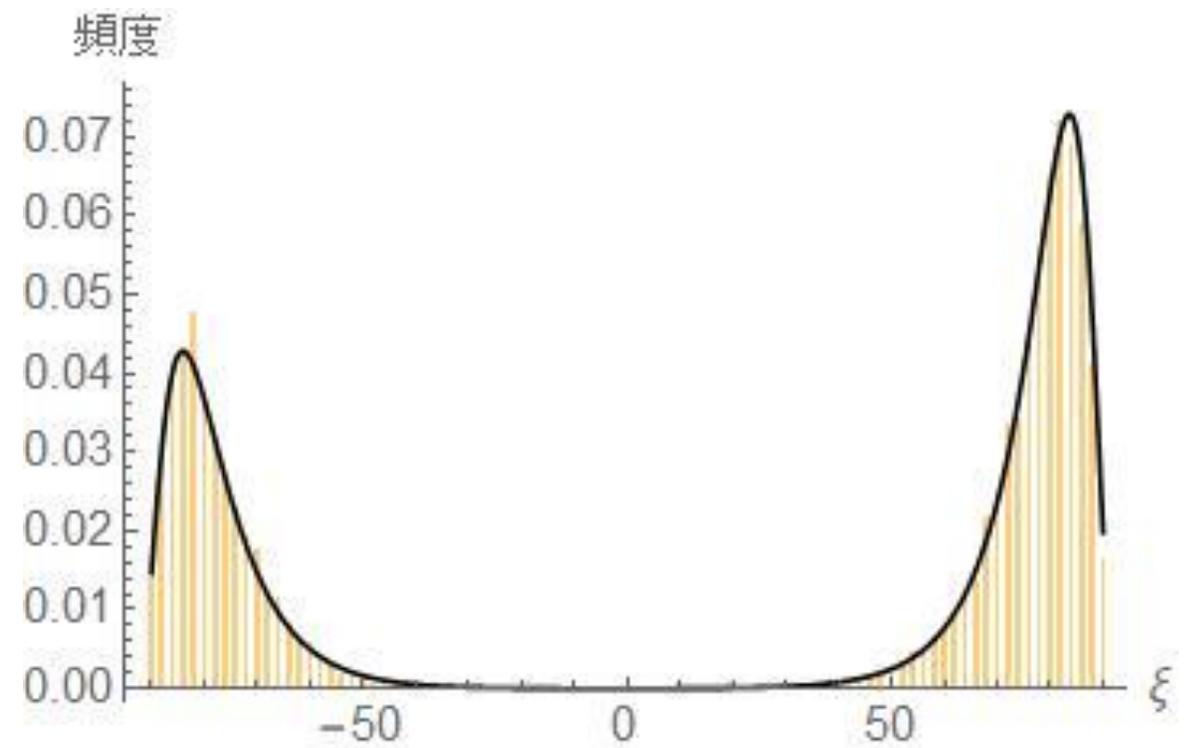
90歩の経路を20通りFortranで作成し,  
Mathematicaでプロット



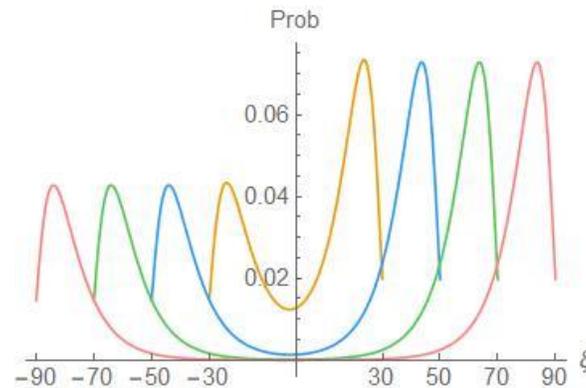
# 第1 $(a,b;q)$ -拡張ランダムウォークの計算機シミュレーション1-2



90歩の経路を20通り.

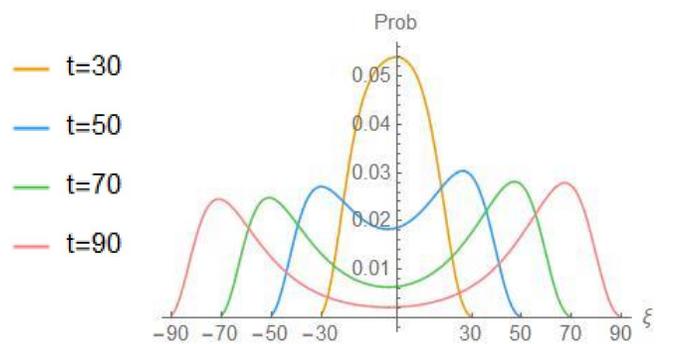
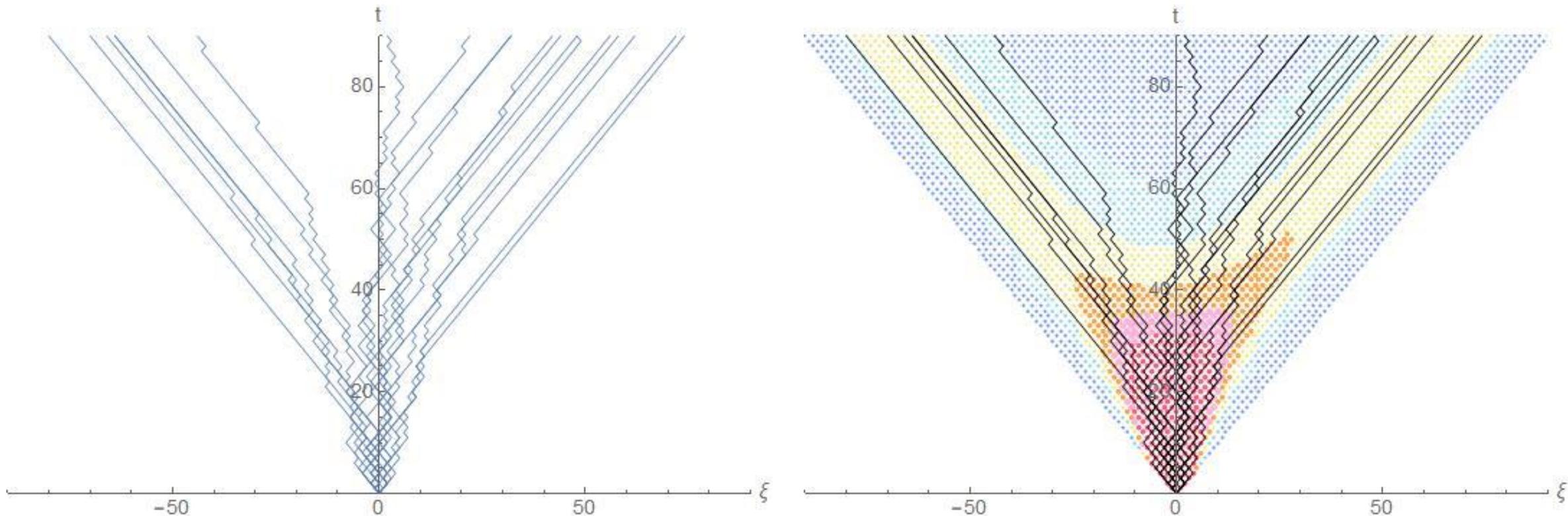


90歩の経路を**10000**通り.

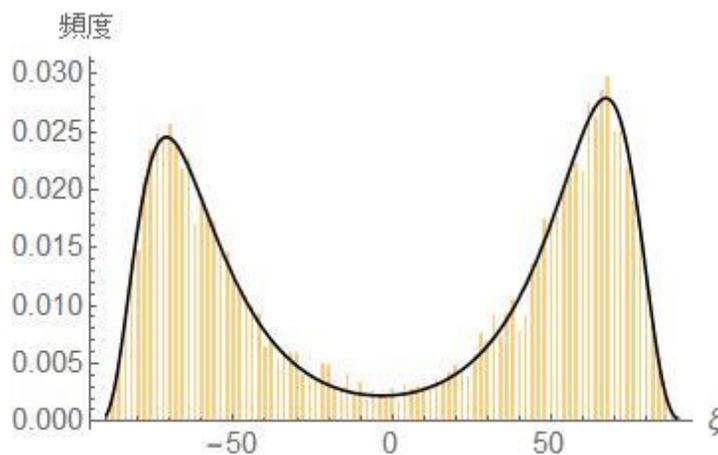


到達地点のヒストグラムは  
確率分布と一致する.

# 第1 $(a,b;q)$ -拡張ランダムウォークの計算機シミュレーション2

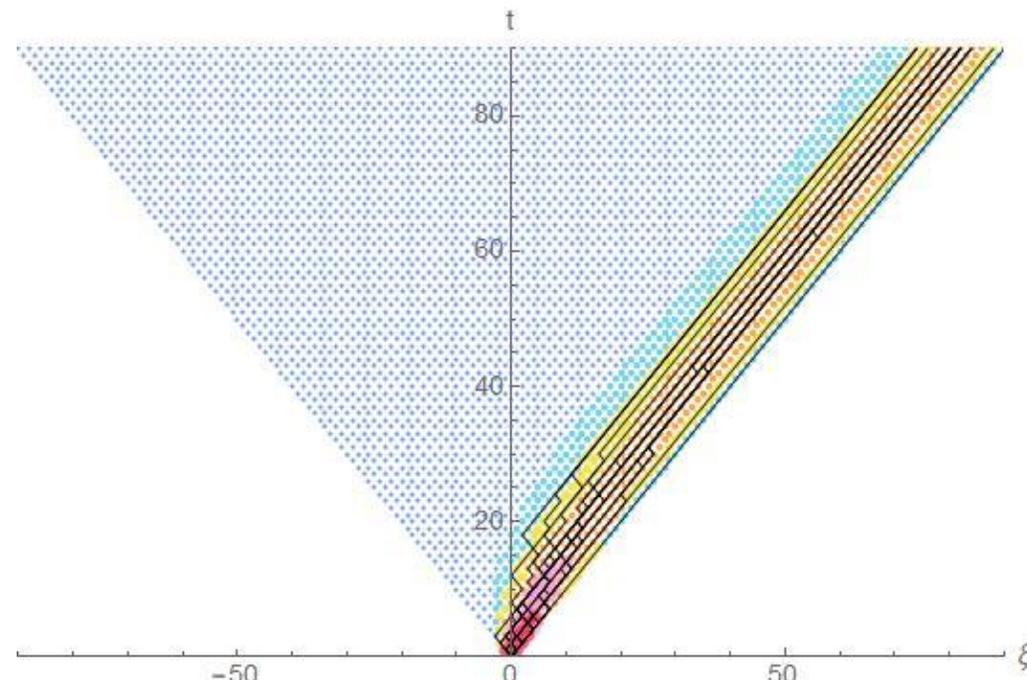
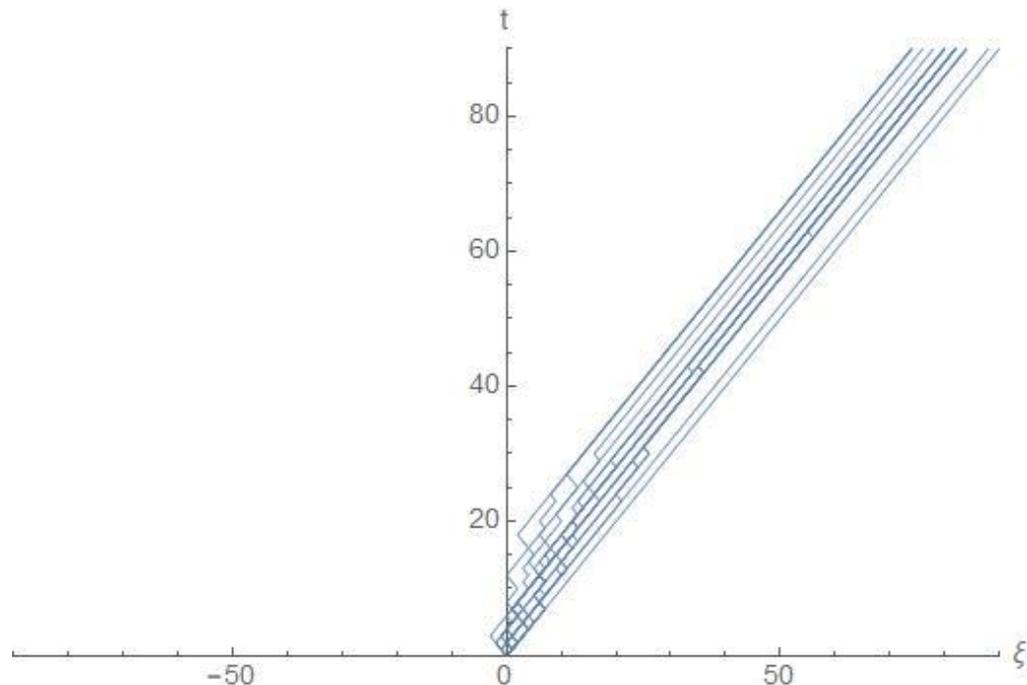


$q=0.9, x=0.5, (a,b)=(0.5,-0.7)$

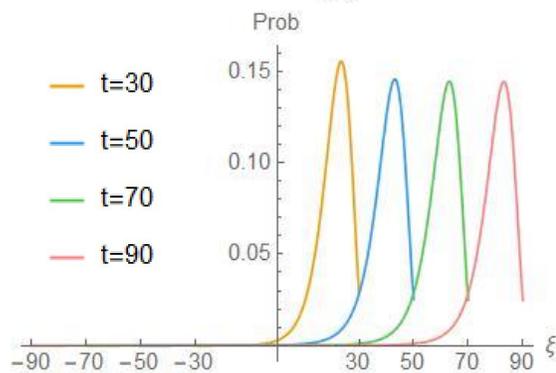


$0 \leq (\text{青}) < 0.01, 0.01 \leq (\text{水色}) < 0.02,$   
 $0.02 \leq (\text{黄色}) < 0.03, 0.03 \leq (\text{橙色}) < 0.04,$   
 $0.04 \leq (\text{ピンク}) < 0.05, 0.05 \leq (\text{赤}) \leq 1.$

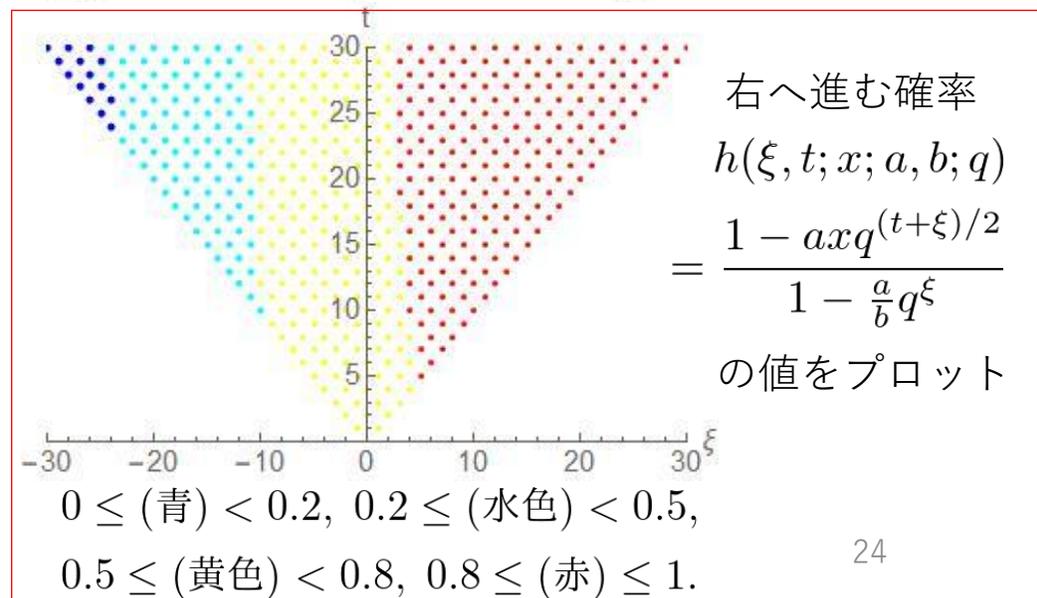
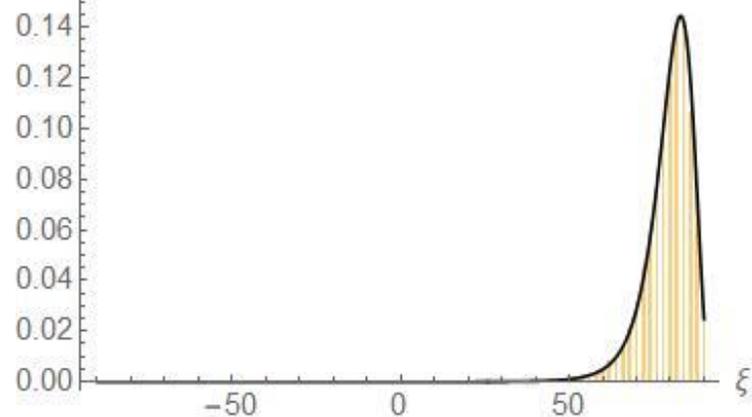
# 第1 $(a,b;q)$ -拡張ランダムウォークの計算機シミュレーション3



$q=0.9, x=0.5, (a,b)=(0.2,-0.7)$



頻度



右へ進む確率

$$h(\xi, t; x; a, b; q)$$

$$= \frac{1 - axq^{(t+\xi)/2}}{1 - \frac{a}{b}q^\xi}$$

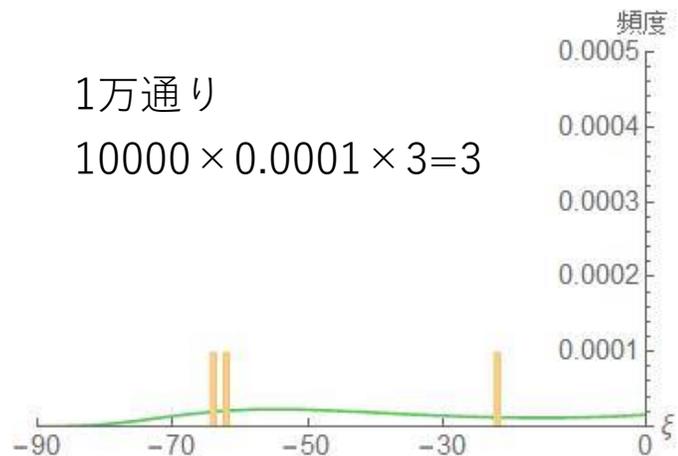
の値をプロット

$0 \leq (\text{青}) < 0.015, 0.015 \leq (\text{水色}) < 0.05,$   
 $0.05 \leq (\text{黄色}) < 0.1, 0.1 \leq (\text{橙色}) < 0.2,$   
 $0.2 \leq (\text{ピンク}) < 0.3, 0.3 \leq (\text{赤}) \leq 1.$

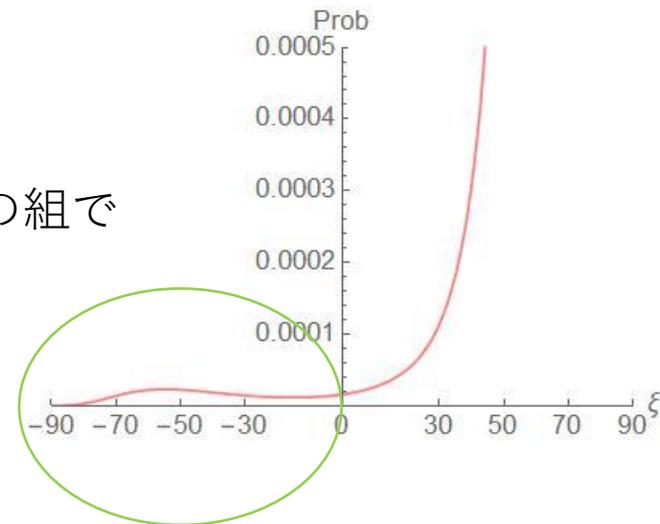
$0 \leq (\text{青}) < 0.2, 0.2 \leq (\text{水色}) < 0.5,$   
 $0.5 \leq (\text{黄色}) < 0.8, 0.8 \leq (\text{赤}) \leq 1.$

# 第1 $(a,b;q)$ -拡張ランダムウォークの計算機シミュレーション3-2

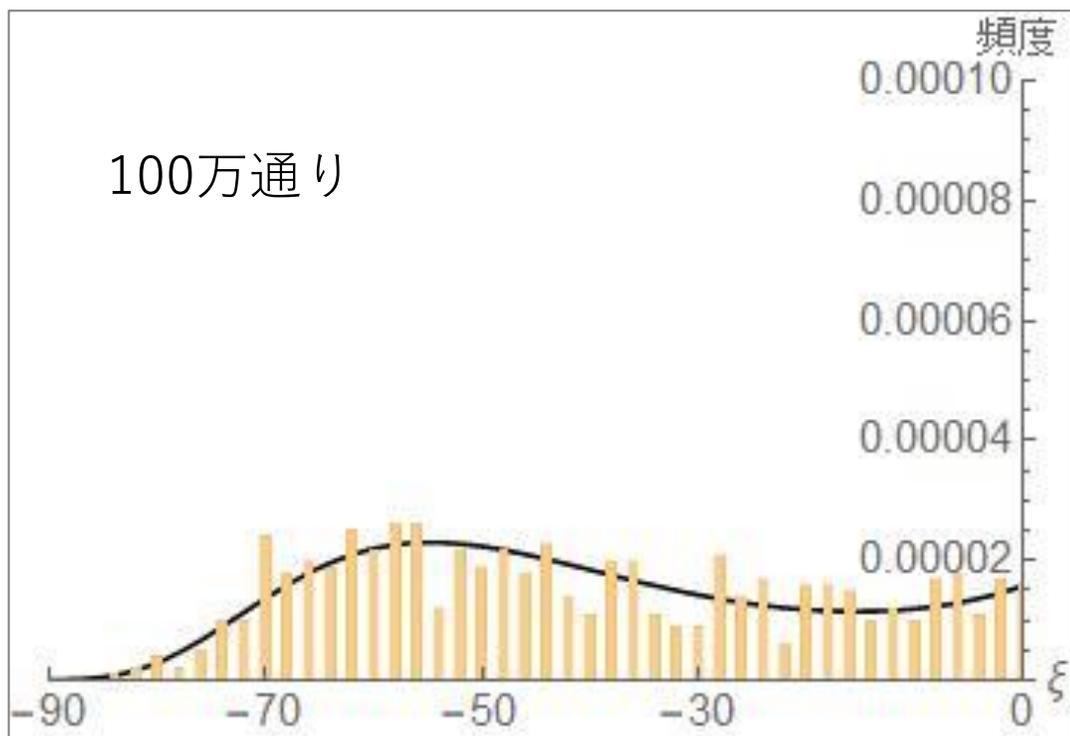
1万通り  
 $10000 \times 0.0001 \times 3 = 3$



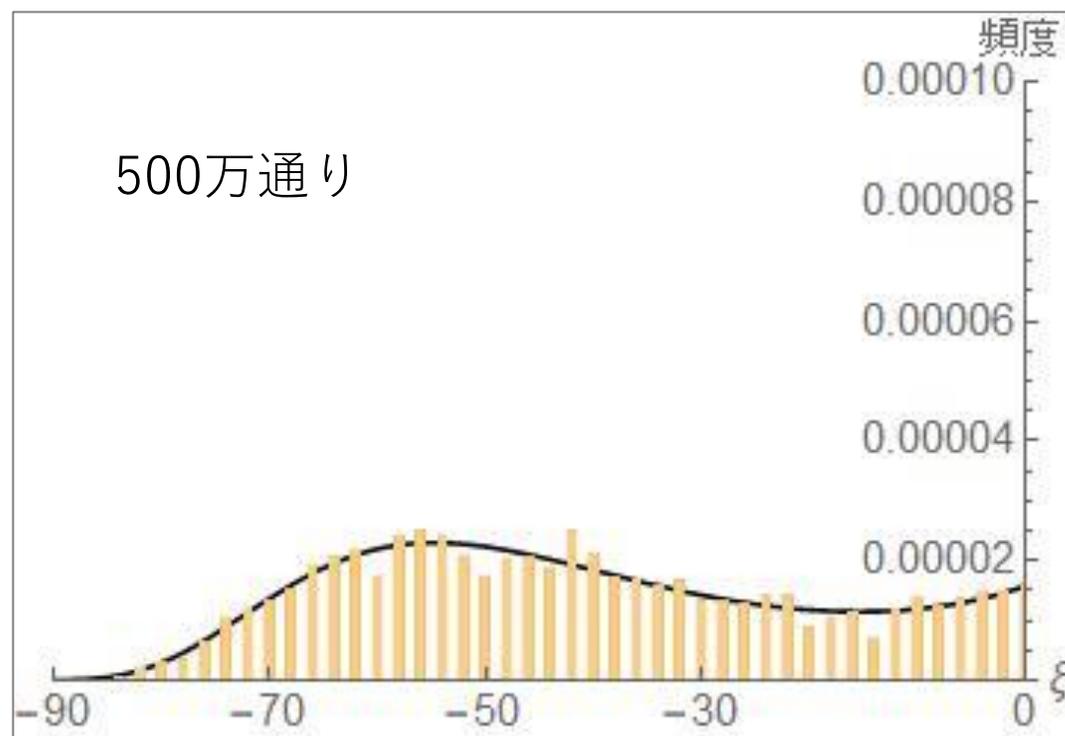
右寄りの単峰分布を作っていたパラメータの組で  
 $\xi \leq 0$ を拡大し左側の収束を見る



100万通り



500万通り



## 4. まとめ

- ・ **拡張**したChaundy-Bullard恒等式を, 重み付き格子経路法によって**証明**した
- ・ 重みを**確率解釈**するための十分条件を求め, ランダム・ウォークとしての見方を導入した
- ・ **数値計算**によって分布の特徴を知り, それらを**計算機シミュレーション**で再現した

## 5. 課題

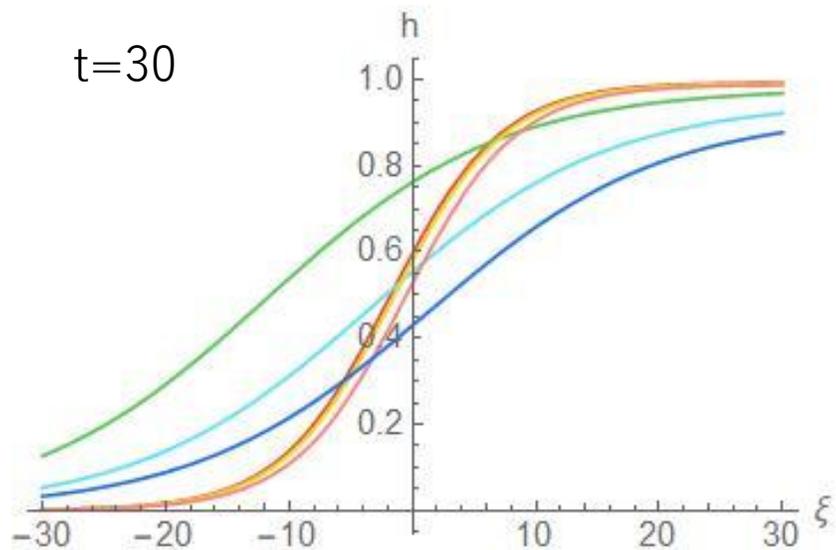
- ・ 単峰から複峰へ転移する時刻の臨界値  $t_c(a, b, c; q, p)$  が得られるか?
- ・ 時刻 $\rightarrow\infty$ の極限をとることで極限分布が導出できるか?
- ・ 空間的時間的に不均一なランダム・ウォークとしてどのような応用が期待できるか.

## 6. 参考文献

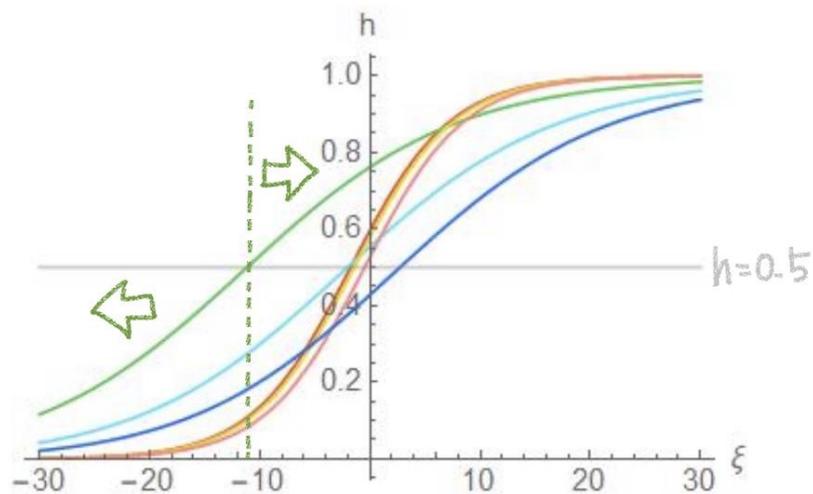
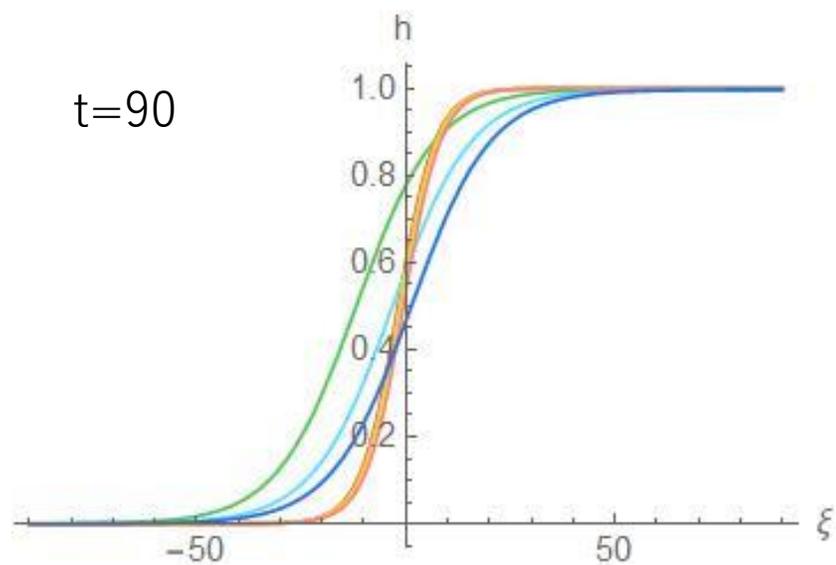
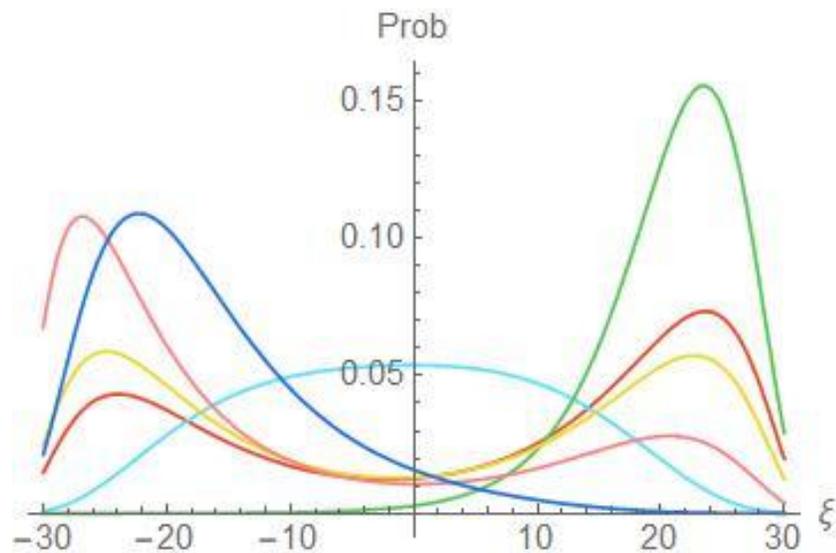
- [1] Chaundy, T. W., Bullard, J. E.: John Smith's problem. Math. Gazette **44**, 253--260 (1960)
- [2] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. I. Indag. Mathem., N.S. **19** (2), 239--261 (2008)
- [3] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. II. More history. Indag. Mathem., **24**, 174--180 (2013)
- [4] Schlosser, M. J.: Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. J. Combin. Theory Ser. A **114**, 505--521 (2007)
- [5] Hoshi, N., Katori, M., Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: Extensions of the Chaundy--Bullard identity. 投稿準備中

ご清聴ありがとうございました.

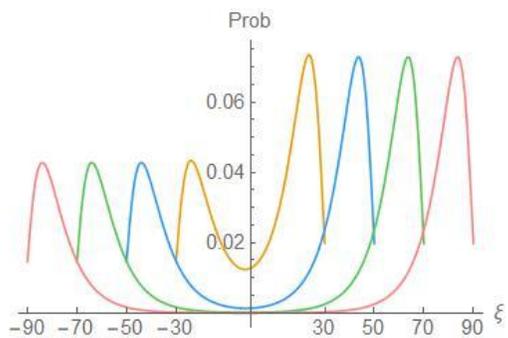
第1  $(a,b;q)$ -拡張の  $h(\xi, t; x; a, b; q) = \frac{1 - axq^{(t+\xi)/2}}{1 - \frac{a}{b}q^\xi}$  : 推移確率



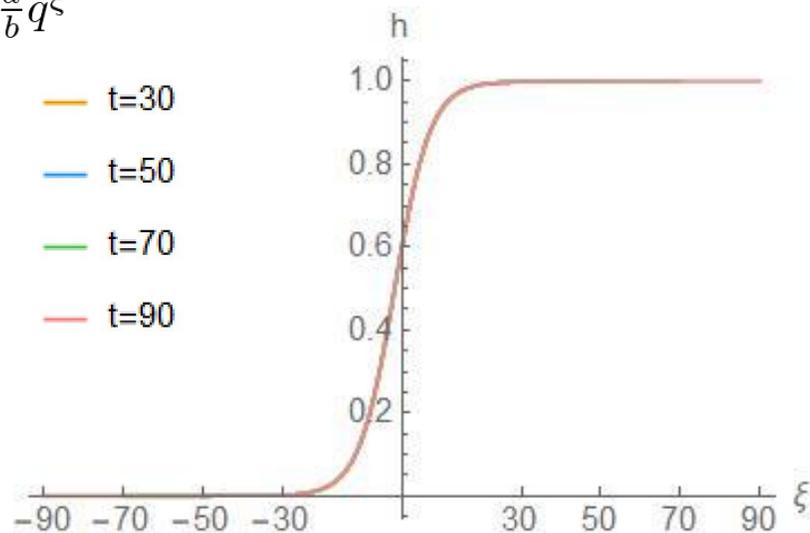
	$\xi$	$(a, b)$
右複	0.8	$(0.4, -0.6)$
broad	0.9	$(0.5, -0.7)$
右単	0.9	$(0.2, -0.7)$
対称	0.8	$(0.5, -0.7)$
左複	0.8	$(0.7, -0.8)$
左単	0.9	$(0.8, -0.7)$



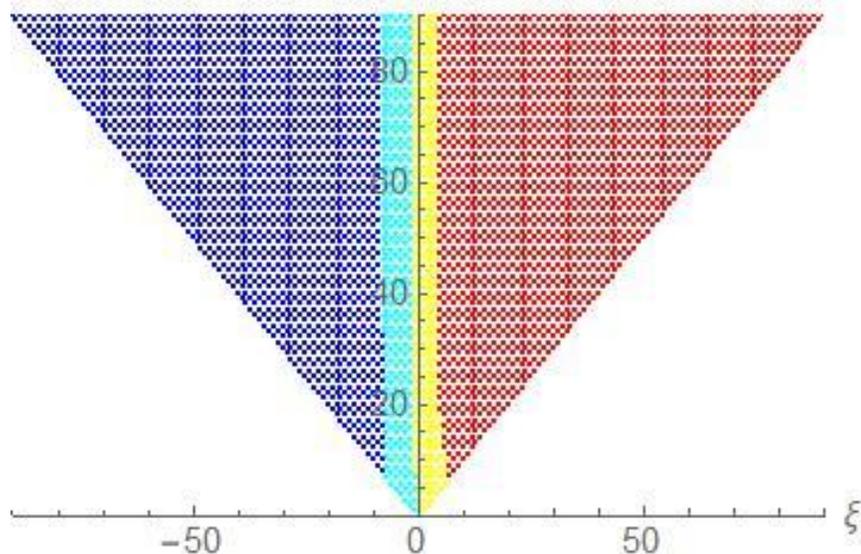
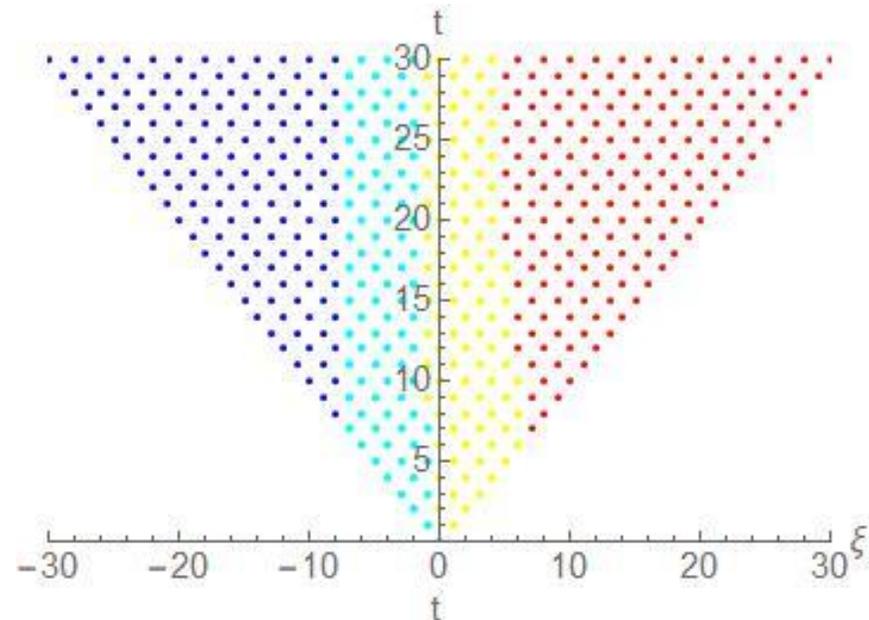
$$h(\xi, t; x; a, b; q) = \frac{1 - axq^{(t+\xi)/2}}{1 - \frac{a}{b}q^\xi}$$



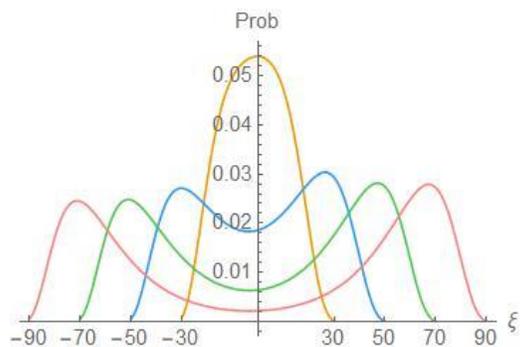
- t=30
- t=50
- t=70
- t=90



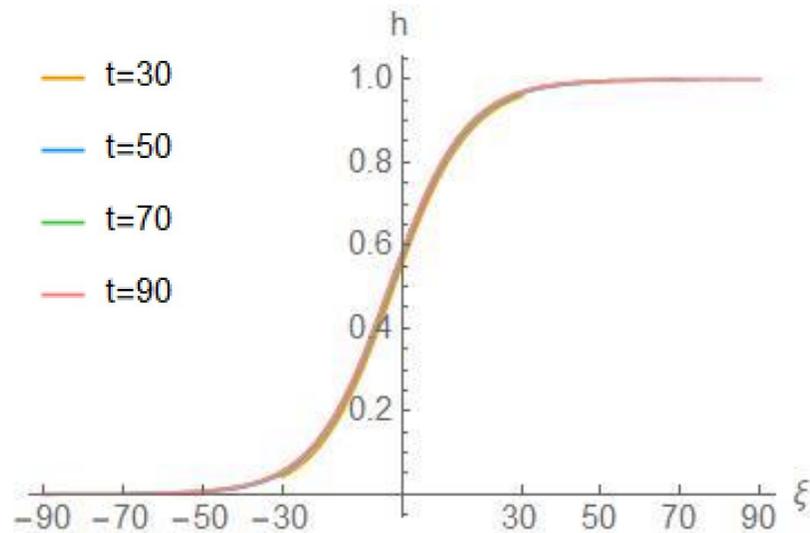
$q=0.8, x=0.5, (a,b)=(0.4,-0.6)$



$0 \leq (\text{青}) < 0.2, 0.2 \leq (\text{水色}) < 0.5,$   
 $0.5 \leq (\text{黄色}) < 0.8, 0.8 \leq (\text{赤}) \leq 1.$

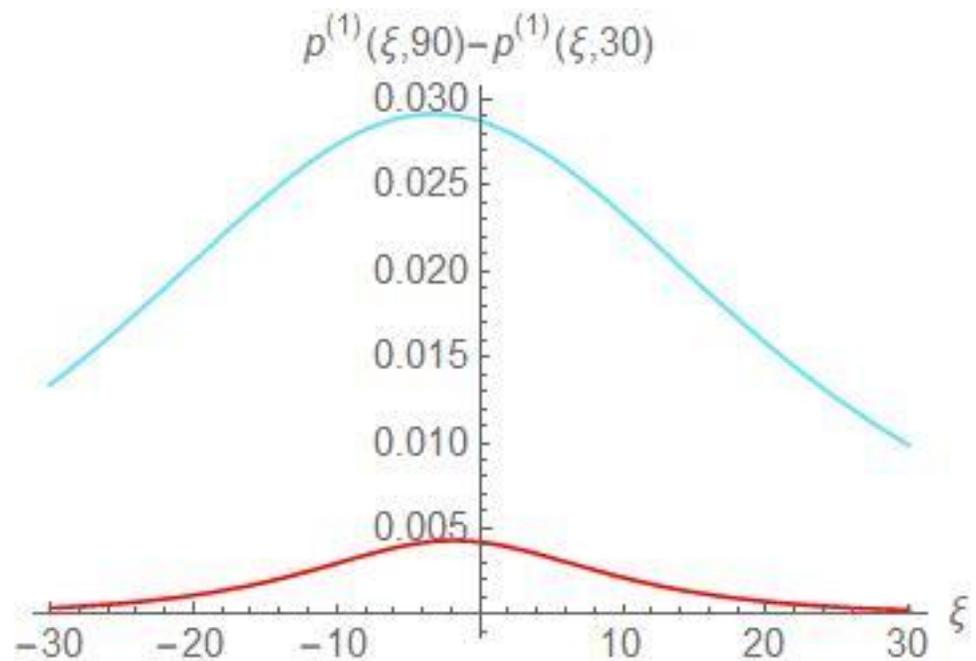
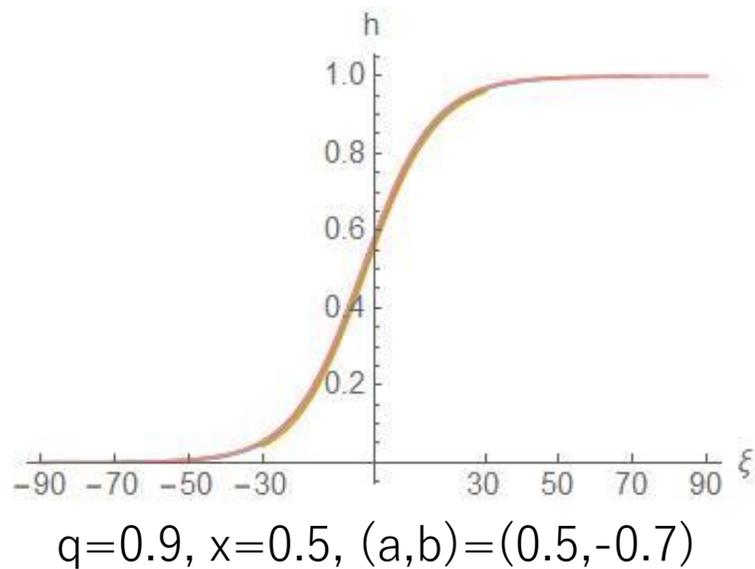
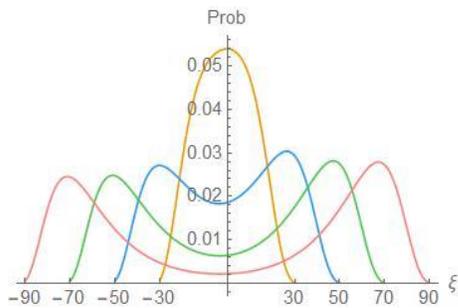
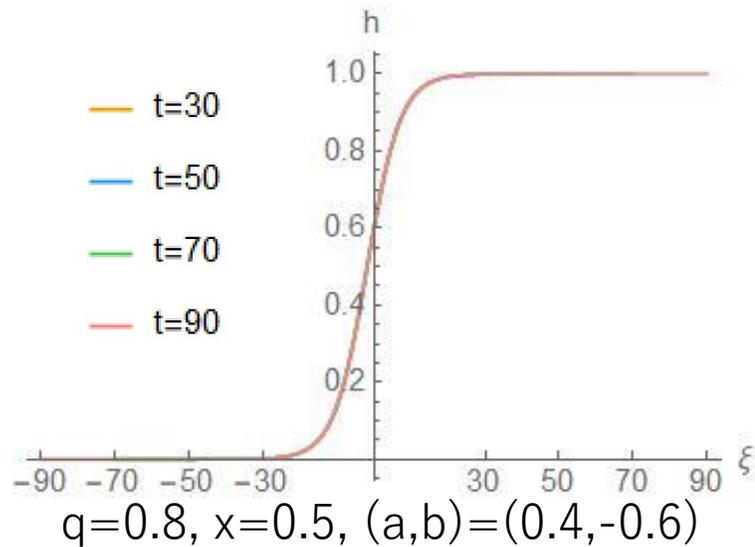
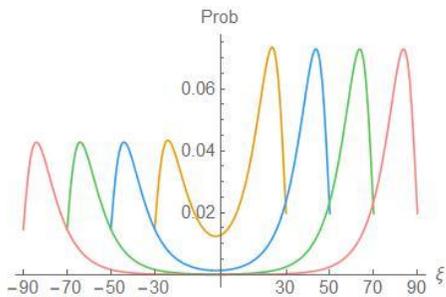


- t=30
- t=50
- t=70
- t=90



$q=0.9, x=0.5, (a,b)=(0.5,-0.7)$

$t=90$ のときと $t=30$ のときの  $h(\xi, t; x; a, b; q) = \frac{1 - axq^{(t+\xi)/2}}{1 - \frac{a}{b}q^\xi}$  の差をプロット



## $q$ -Pochhammer記号の三角関数による表記

楕円関数拡張された階乗に  $x = e^{-2i\alpha}$ ,  $q = e^{-2i\varphi}$  を代入する. ただし  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha, \varphi \in \mathbb{R}$ .

$$(x; q, p)_k \Big|_{\substack{x=e^{-2i\alpha} \\ q=e^{-2i\varphi}}} = \prod_{l=0}^{k-1} \theta(xq^l; p) \Big|_{\substack{x=e^{-2i\alpha} \\ q=e^{-2i\varphi}}} = \prod_{l=0}^{k-1} \theta(e^{-2i(\alpha+l\varphi)}; p)$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow 0} \prod_{l=0}^{k-1} 1 - e^{-2i(\alpha+l\varphi)} = \prod_{l=0}^{k-1} 2ie^{-i(\alpha+l\varphi)} \sin(\alpha + l\varphi).$$

$$\therefore \theta(x; p) := \left(x, \frac{p}{x}; p\right)_{\infty} = (x; p)_{\infty} \left(\frac{p}{x}; p\right)_{\infty} = \prod_{l=0}^{\infty} (1 - xp^l)(1 - \frac{p^{\ell+1}}{x}) \xrightarrow{p \rightarrow 0} 1 - x.$$

# 極限をとると元の恒等式に戻る

$$\lim_{p \rightarrow 0} \theta(x; p) = 1 - x, \quad \lim_{p \rightarrow 0} (x; q, p)_k = (x; q)_k \quad \text{より}$$

$$\frac{(ac, c/a, bx, b/x; q, p)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q, p)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{\theta(acq^{n+2k}; p)(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q, p)_k}{\theta(acq^n; p)(q, aq/b, abq^{n+1}, ac, cq^{n+1}/x, cxq^{n+1}; q, p)_k} q^k$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{(ac, c/a, bx, b/x; q)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(1 - acq^{n+2k})(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q)_k}{(1 - acq^n)(q, aq/b, abq^{n+1}, ac, cq^{n+1}/x, cxq^{n+1}; q)_k} q^k$$

$$\xrightarrow{c \rightarrow 0} \frac{(bx, b/x; q)_{n+1}}{(ab, b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(q^{n+1}, ax, a/x; q)_k}{(q, aq/b, abq^{n+1}; q)_k} q^k$$

$$a \rightarrow \delta a, \quad b \rightarrow \delta b, \quad x \rightarrow x/\delta$$

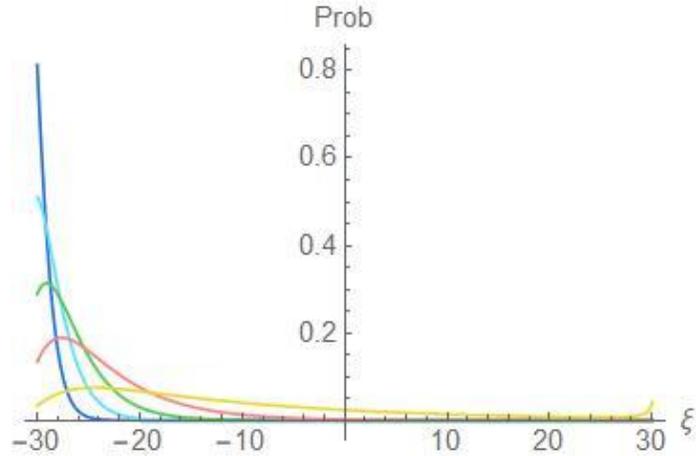
$$\frac{(bx, \delta^2 b/x; q)_{n+1}}{(\delta^2 ab, b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(q^{n+1}, ax, \delta^2 a/x; q)_k}{(q, aq/b, \delta^2 abq^{n+1}; q)_k} q^k \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{(bx; q)_{n+1}}{(b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(q^{n+1}, ax; q)_k}{(q, aq/b; q)_k} q^k$$

$$x \rightarrow x/b$$

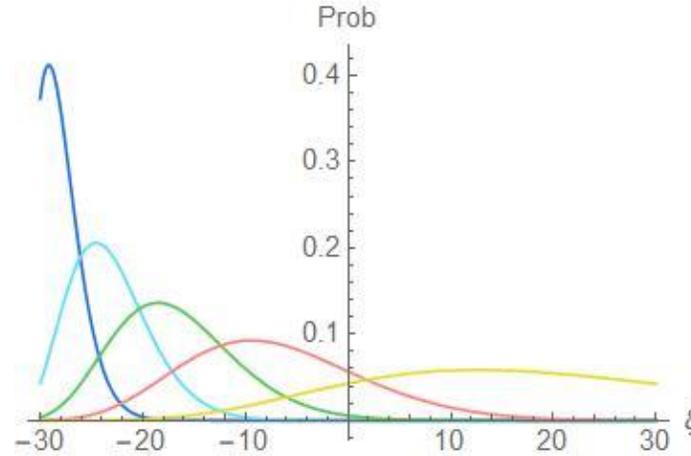
$$\frac{(x; q)_{n+1}}{(b/a; q)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \left[ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right]_q \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{(xq^\ell - b/a)}{(q^{\ell+1} - b/a)} q^k \xrightarrow{b \rightarrow 0} (x; q)_{n+1} \sum_{k=0}^m \left[ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right]_q x^k \xrightarrow{q \rightarrow 1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} x^k$$

# q-拡張の分布と元の分布

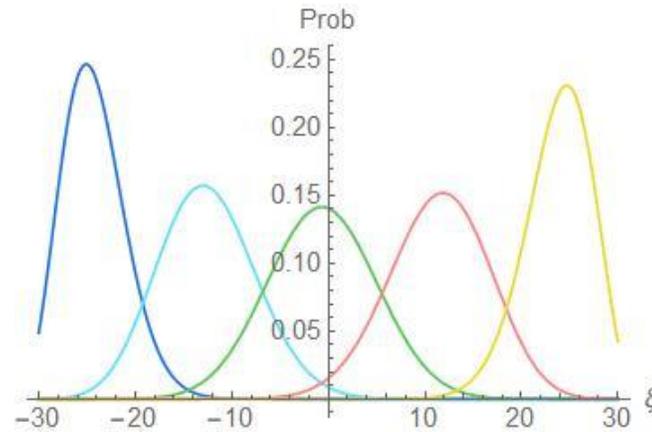
右に進む確率： $xq^{(t-\xi)/2}$



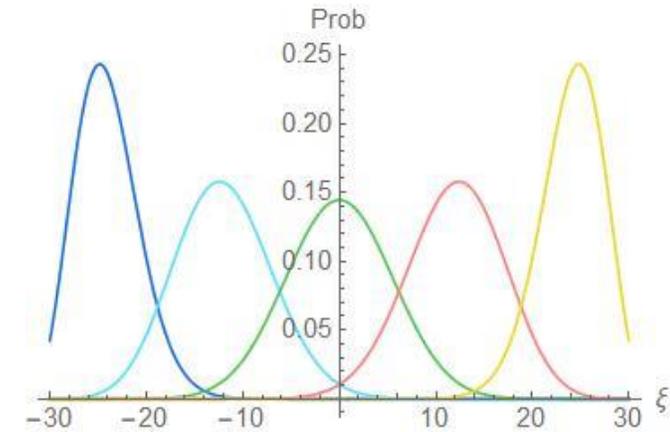
q=0.5, x=0.1(青), 0.3(水色), 0.5(緑),  
0.7(桃), 0.9(黄)



q=0.9, x=0.1(青), 0.3(水色), 0.5(緑),  
0.7(桃), 0.9(黄)



q=0.997, x=0.1(青), 0.3(水色), 0.5(緑),  
0.7(桃), 0.9(黄)



元の分布, x=0.1(青), 0.3(水色), 0.5(緑),  
0.7(桃), 0.9(黄)