

# ランダムな点過程上の 連続パーコレーションと 感染症ダイナミクス

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻修士2年香取研究室  
赤池誠

2023年2月22日 2022年度修士論文発表会

# 目次

---

## 1. Introduction

- 先行研究
- 研究の概要・目的

## 2. $\kappa = 1.3$ でのSIRモデル感染シミュレーション

## 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

## 4. まとめ

# 目次

---

## 1. Introduction

- 先行研究
- 研究の概要・目的

## 2. $\kappa = 1.3$ でのSIRモデル感染シミュレーション

## 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

## 4. まとめ

# 1-1. ポアソン点過程とジニブル点過程

・ポアソン点過程(PPP):  $\Xi^{PPP}$

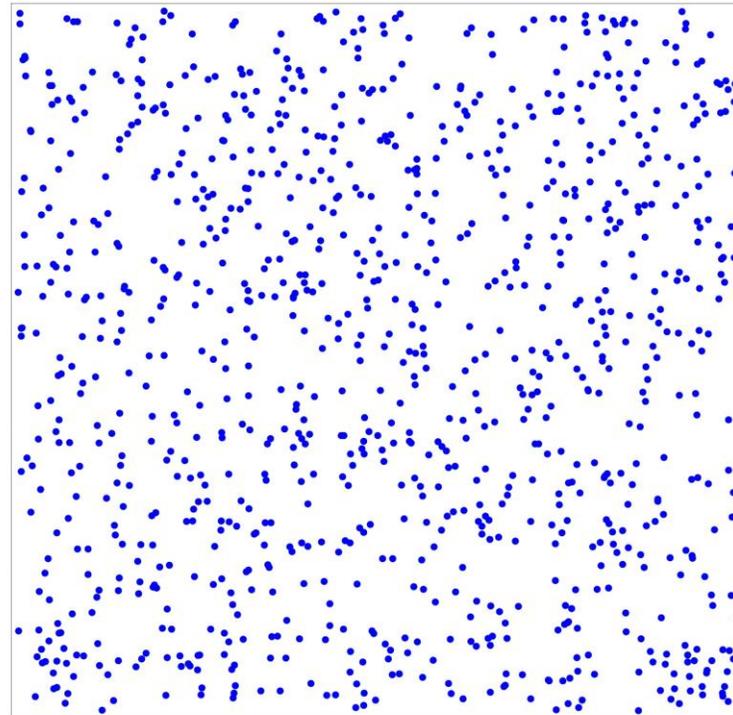
→点同士に相関がないので疎密のある点過程

→ソーシャルディスタンスがない集団

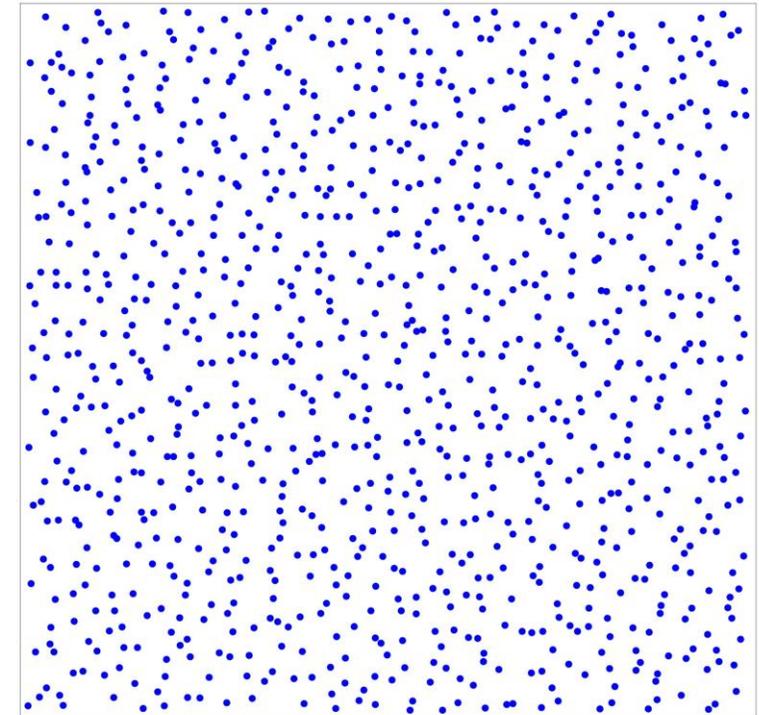
・ジニブル点過程(GPP):  $\Xi^{GPP}$

→点同士に反発の相関があるので疎密のない点過程

→ソーシャルディスタンスがある集団



(a)PPP



(b)GPP

図1-1.  $[0,1]^2$  上のあるPPPとGPP(1000点)

# 1-2. 連続パーコレーション・モデル

連続パーコレーション・モデルを考える

$[0,1]^2$  上の点の個数:  $N$

密度:  $\rho (= N)$

円の面積:  $a$

半径:  $r$

①それぞれの点を中心に,  
半径 $r$ の円を描く。

②円が重なったら,  
点と点を結ぶ。

**充填率:  $\kappa = \rho a = \rho \pi r^2$**

$$\text{半径 } r = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho \pi}}$$

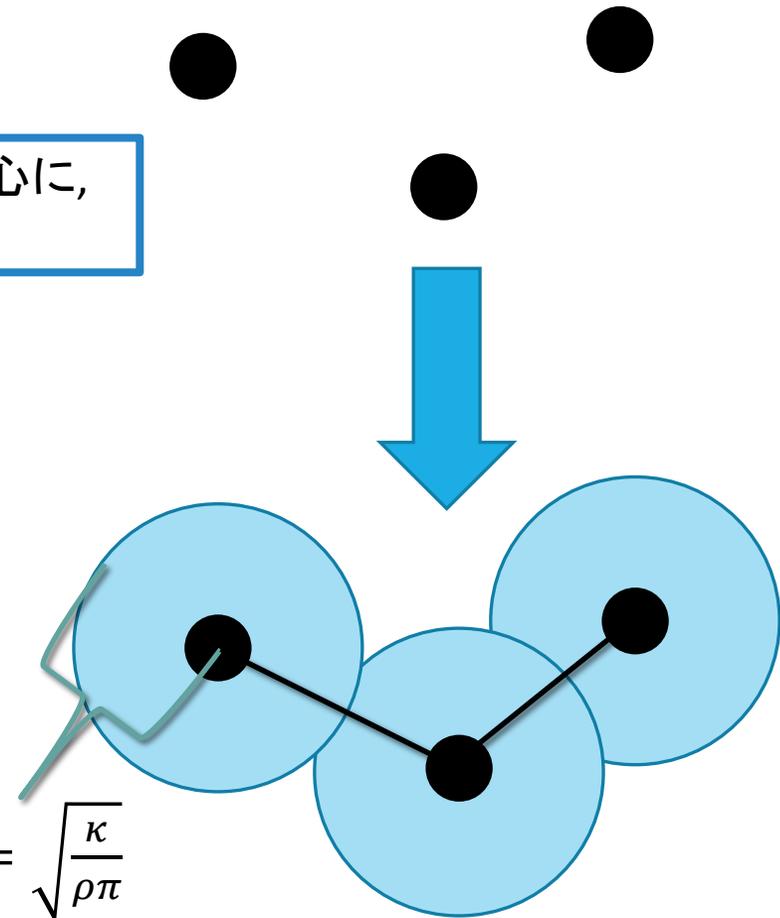


図1-2. 連続パーコレーション・モデル

# 1-3. 最大パーコレーション・クラスター

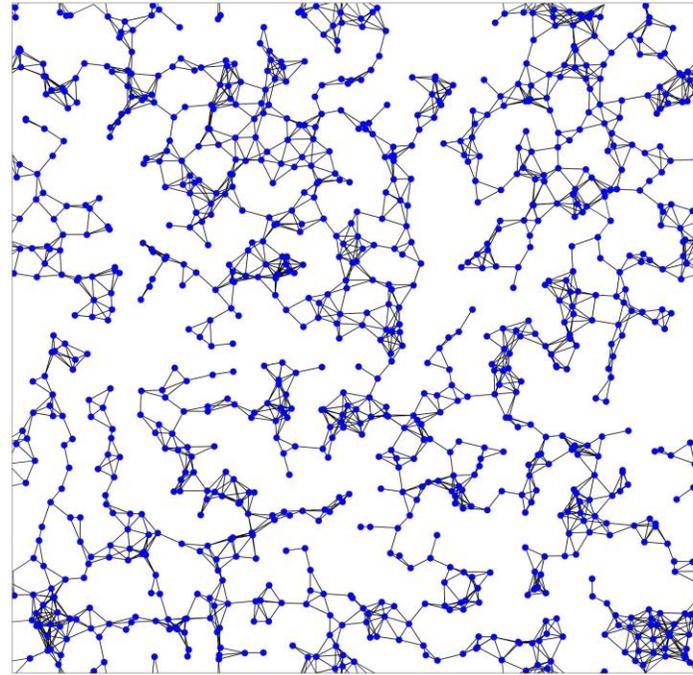
$\Xi_N^\#$ :  $N$  点のPPPとGPP( $\# = \text{PPP}$ またはGPP)

周期的境界条件を課す.

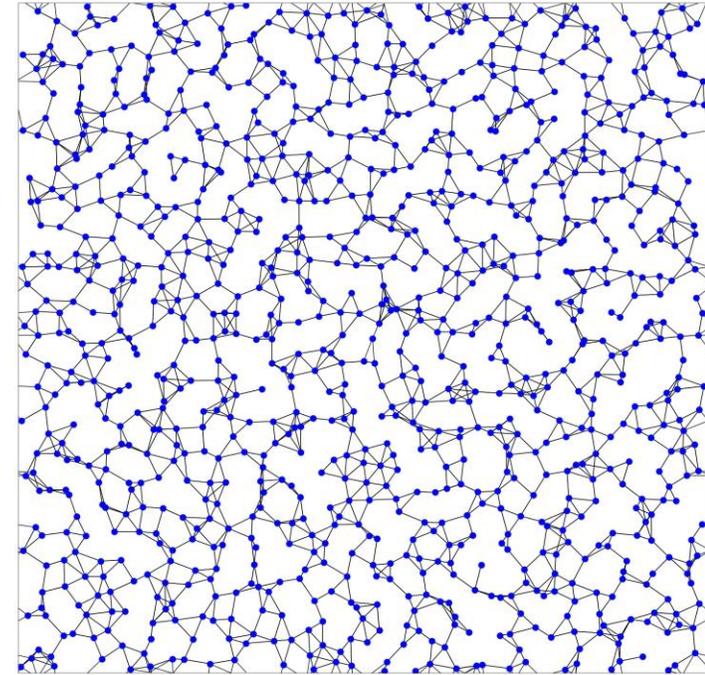
・最大パーコレーション・クラスター:  $G_N^\#$

$\Xi_N^\#$  上で連続パーコレーション・モデルを定義し, 複数あるクラスターの中で最大となるクラスター.

→  $G_N^\#$  上でSIRモデル感染シミュレーションを行う.



(a)PPP



(b)GPP

図1-3. PPPとGPPの $\kappa = 1.3$ での最大パーコレーション・クラスター $G_{1000}^\#$

# 1-4. SIRモデル感染シミュレーション



グラフ:  $x \in \mathcal{G}$

状態:  $\eta = (\eta(x))_{x \in \mathcal{G}} \in \{S, I, R\}$

未感染者  $s$  が感染者  $i$  と繋がっている数:  $n$

感染率:  $\lambda$ , 回復率:  $\mu (= 1)$

連続時間のマルコフ過程の確率:  $P^\eta$

$$P^\eta(\eta_t(x) = I, \eta(x) = S) = \lambda n t + o(t),$$

$$P^\eta(\eta_t(x) = R, \eta(x) = I) = \mu t + o(t), \text{ as } t \rightarrow 0.$$

連続時間のマルコフ過程を Gillespie アルゴリズム [3] を使用して, SIRモデル感染シミュレーションを行った.

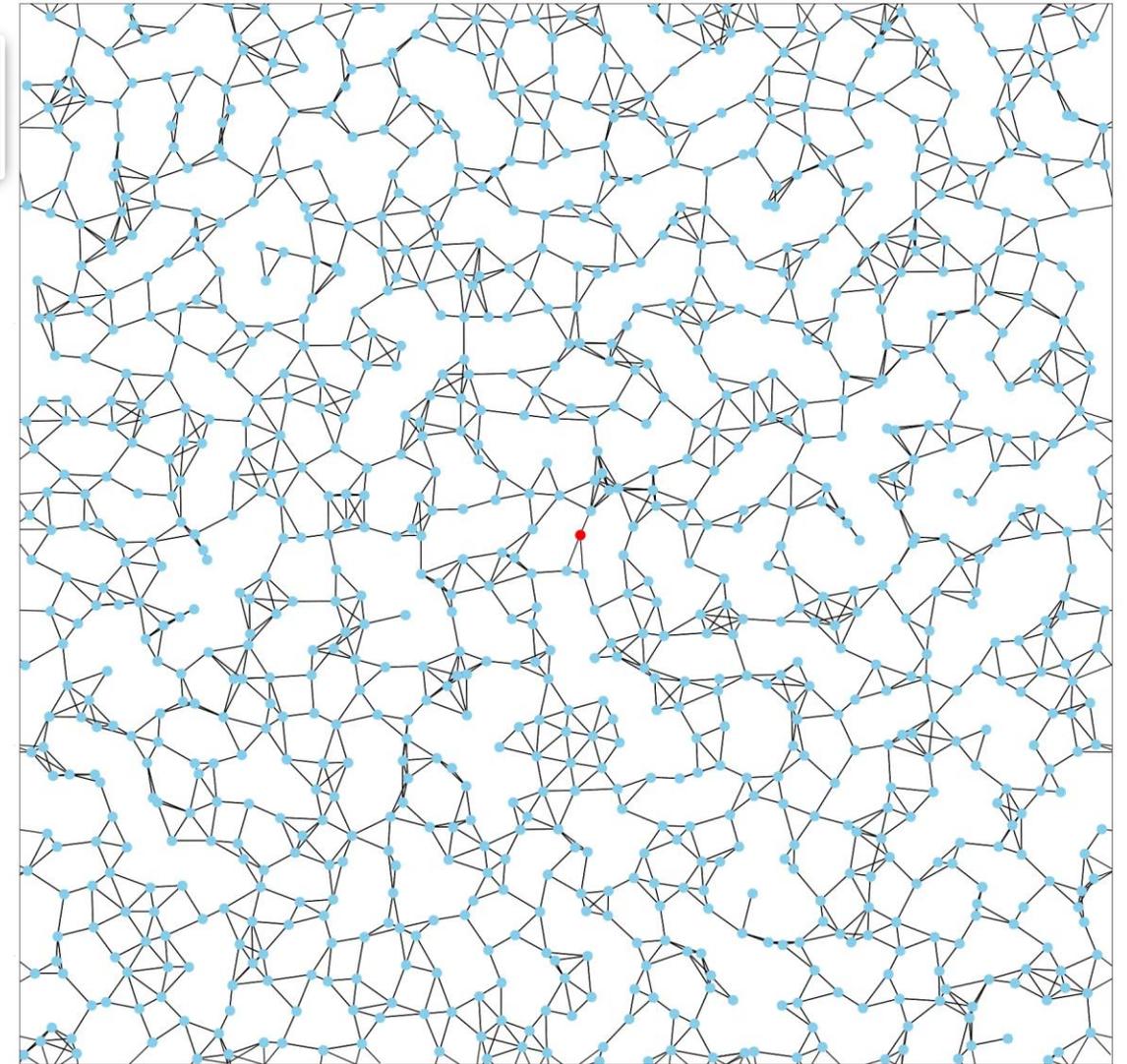


図1-4. 図1-3bの  $G_{1000}^{GPP}$  の上での SIRモデル感染シミュレーション. 感染率  $\lambda=2.0$  としている.

# 1-5. 累計感染者数

$G_N^\#$ : 最大クラスター(# = PPPまたはGPP)

・ 累計感染者数  $\mathcal{N}_I$

$G_N^\#$  から一個感染者を選び, 感染者がいなくなるまで SIRモデル感染シミュレーションしたときの治癒者の総数.

・ 100回平均の累計感染者数  $\langle \mathcal{N}_I \rangle$

同じ  $G_N^\#$  上で SIRモデル感染シミュレーションを行い, 累計感染者数  $\mathcal{N}_I$  の100回の平均の累計感染者数.

・ 平均の累計感染者数  $[\langle \mathcal{N}_I \rangle]$

$G_N^\#$  を10個用意したときの10個の  $\langle \mathcal{N}_I \rangle$  の平均.

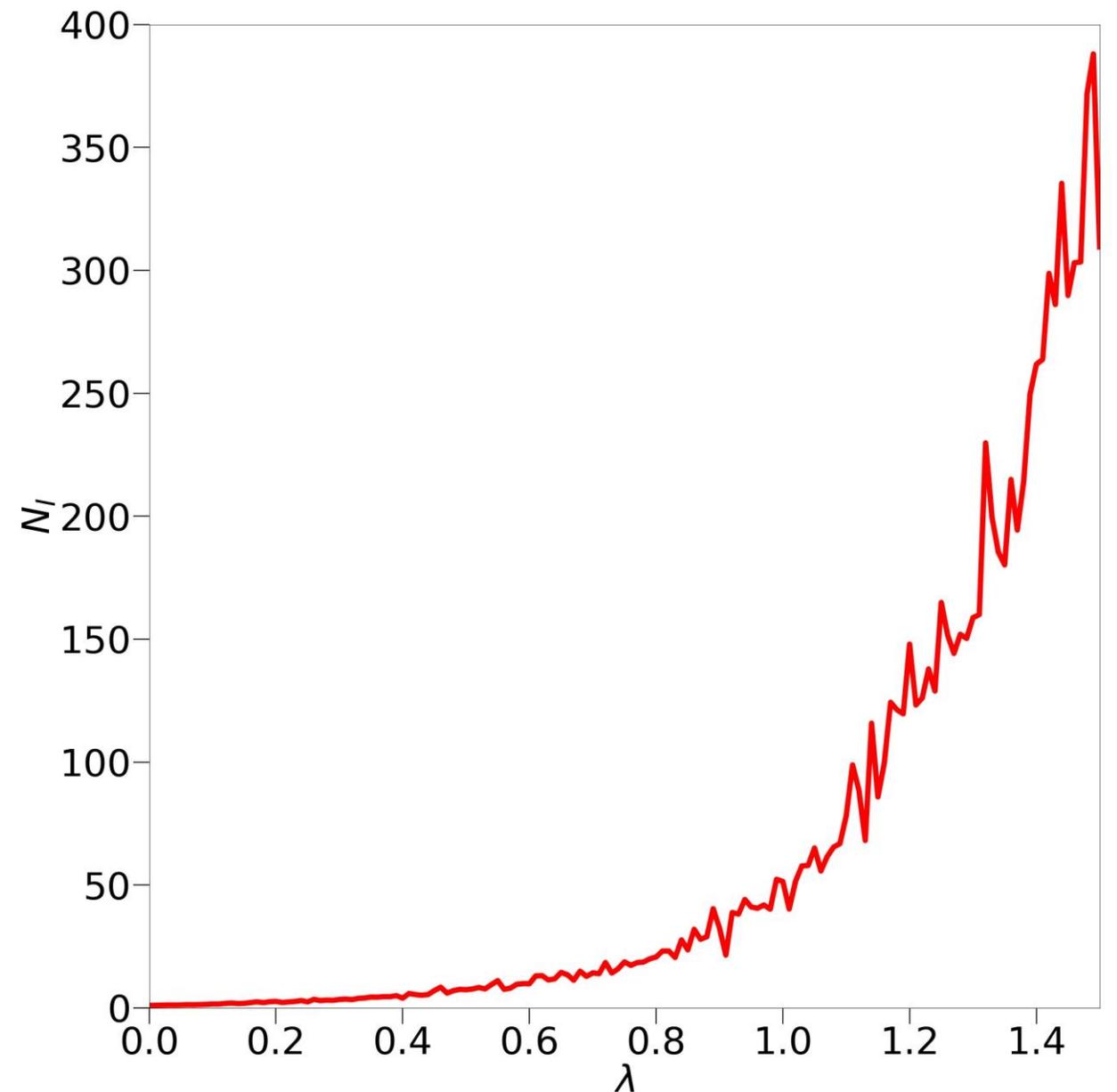


図1-5. 感染率 $\lambda$ , 100回平均の累計感染者数 $\langle \mathcal{N}_I^{GPP} \rangle$ の関係

# 1-6. PPPとGPPでの感染における逆転現象

ある感染率 $\lambda_*$ 存在して、 $0 < \lambda < \lambda_*$ のとき

$$[\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle] > [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle],$$

$\lambda > \lambda_*$ のとき

$$[\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle] < [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle].$$

→ **感染における逆転現象**である。

本研究では、感染が始まる点(始点)の次数に着目し、感染における逆転現象の研究を行った。

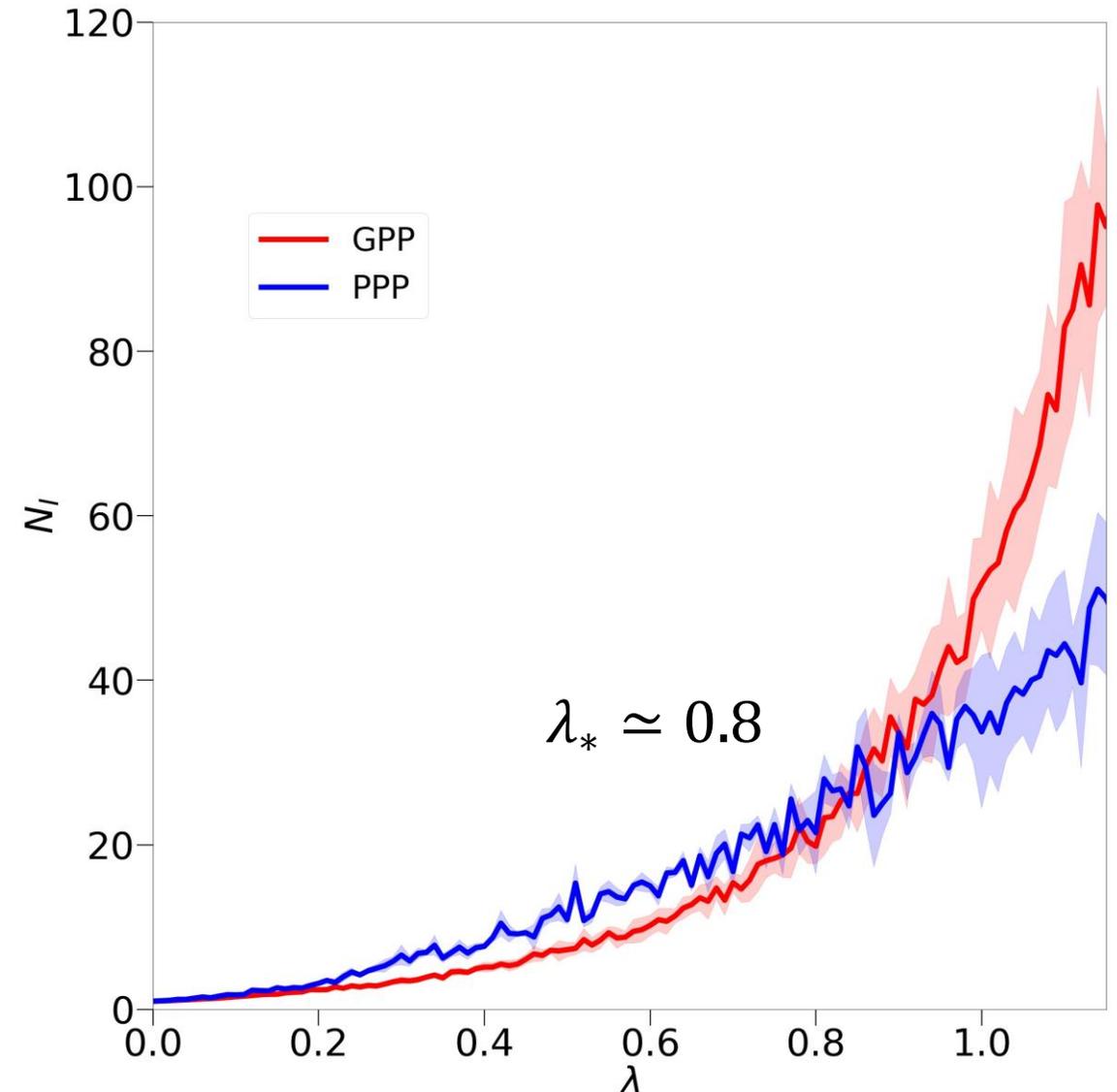
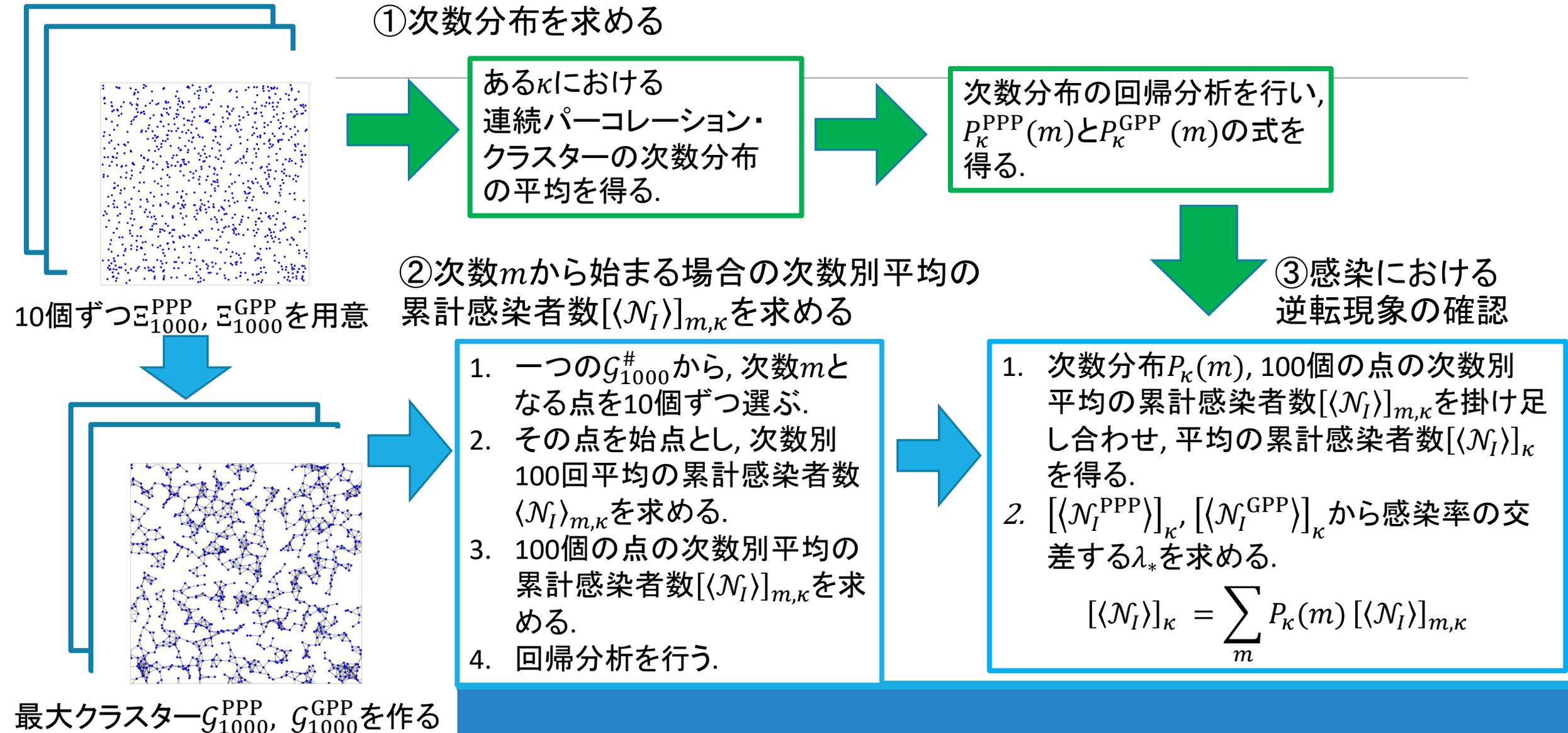


図1-6.  $\kappa = 1.3$ において感染の始まる点を毎回ランダムに選んだときの逆転現象. 10個の $G_{1000}^{\text{PPP}}$ ,  $G_{1000}^{\text{GPP}}$ を用意し, 10個の平均の累計感染者数 $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle] (\lambda)$ ,  $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle] (\lambda)$ と標準偏差のグラフ

# 1-7. 本研究の概要・目的



# 目次

---

## 1. Introduction

- 先行研究
- 研究の概要・目的

## 2. $\kappa = 1.3$ でのSIRモデル感染シミュレーション

## 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

## 4. まとめ

## 2-1. PPPの連続パーコレーション・クラスターの次数分布

PPPの次数分布を $P_{1.3}^{\text{PPP}}(m)$ とする.

PPPの次数分布はポアソン分布

$$P_{1.3}^{\text{PPP}}(m) = e^{-5.2} \frac{(5.2)^m}{m!}$$

にフィッティングした. ただし, 5.2は平均次数である.

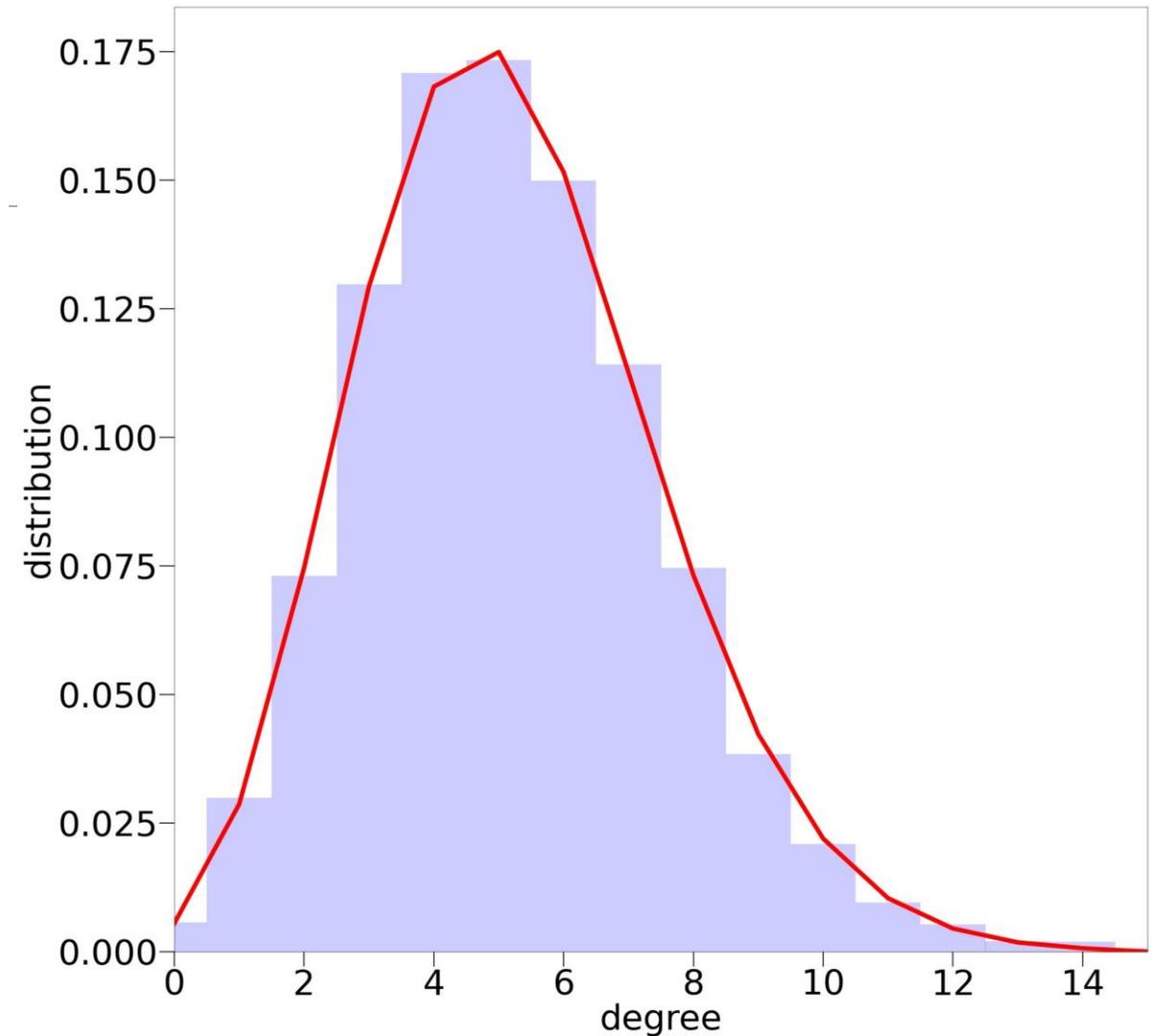


図2-1.  $\kappa = 1.3$ のPPPの次数分布. 10個の $\Xi_{1000}^{\text{PPP}}$ における連続パーコレーション・クラスターの次数分布の平均(青)と, フィッティングしたグラフ(赤).

## 2-2. GPPの連続パーコレーション・クラスターの次数分布

GPPの次数分布を $P_{1.3}^{\text{GPP}}(m)$ とする.

GPPの次数分布はガウス分布

$$P_{1.3}^{\text{GPP}}(m) = 0.34 \exp\left(\frac{-(m - 4.2)^2}{2(1.2)^2}\right)$$

にフィッティングした.

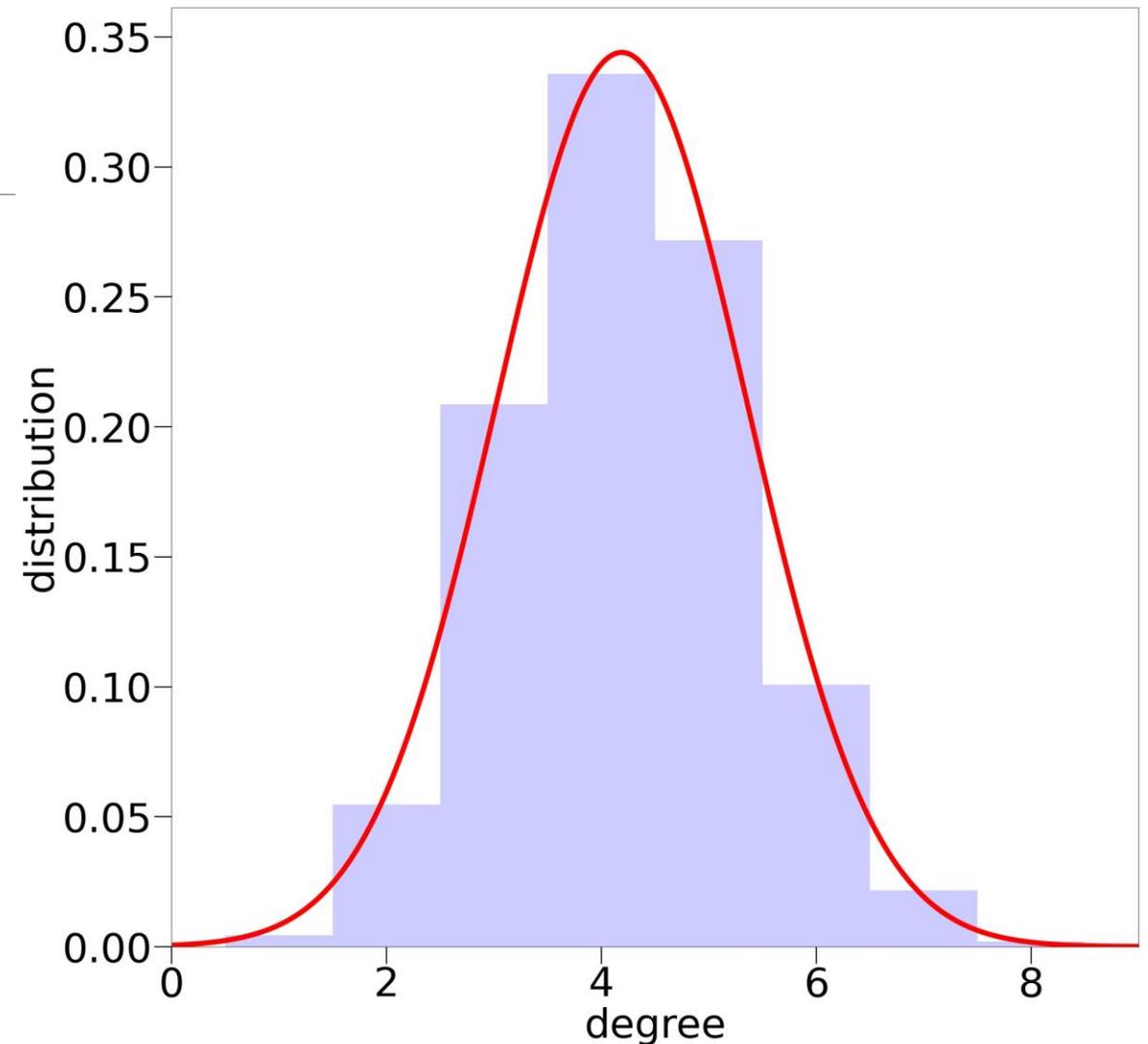


図2-2.  $\kappa = 1.3$ のGPPの次数分布. 10個の $E_{1000}^{\text{GPP}}$ における連続パーコレーション・クラスターの次数分布の平均(青), 赤線はフィッティングしたグラフ(赤).

# 2-3.PPPの次数別平均の累計感染者数

次数 $m$ における次数別平均の累計感染者数 $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{m,1.3}$ は  

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

で回帰分析できた。 $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) は定数. ただし, 次数11は79個,  
 次数12は51個の平均である.

$$\begin{aligned}
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{1,1.3}(\lambda) &= 7.86\lambda^3 + 2.43\lambda^2 + 0.0843\lambda + 1.09, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{2,1.3}(\lambda) &= 8.49\lambda^3 + 7.63\lambda^2 + 0.300\lambda + 1.13, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{3,1.3}(\lambda) &= 4.66\lambda^3 + 22.6\lambda^2 + 1.58\lambda + 0.980, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{4,1.3}(\lambda) &= 2.45\lambda^3 + 25.0\lambda^2 + 0.220\lambda + 1.25, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{5,1.3}(\lambda) &= 6.28\lambda^3 + 14.1\lambda^2 + 8.71\lambda + 0.659, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{6,1.3}(\lambda) &= 7.40\lambda^3 + 16.3\lambda^2 + 9.42\lambda + 0.872, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{7,1.3}(\lambda) &= 1.12\lambda^3 + 30.7\lambda^2 + 14.3\lambda + 0.468, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{8,1.3}(\lambda) &= 7.70\lambda^3 + 11.1\lambda^2 + 20.9\lambda + 0.201, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{9,1.3}(\lambda) &= 8.03\lambda^3 + 8.64\lambda^2 + 25.8\lambda - 0.0493, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{10,1.3}(\lambda) &= 6.08\lambda^3 + 11.5\lambda^2 + 41.2\lambda - 0.719, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{11,1.3}(\lambda) &= 2.92\lambda^3 + 16.2\lambda^2 + 50.6\lambda - 1.29, \\
 [\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{12,1.3}(\lambda) &= 5.88\lambda^3 + 14.0\lambda^2 + 34.3\lambda - 0.171.
 \end{aligned}$$

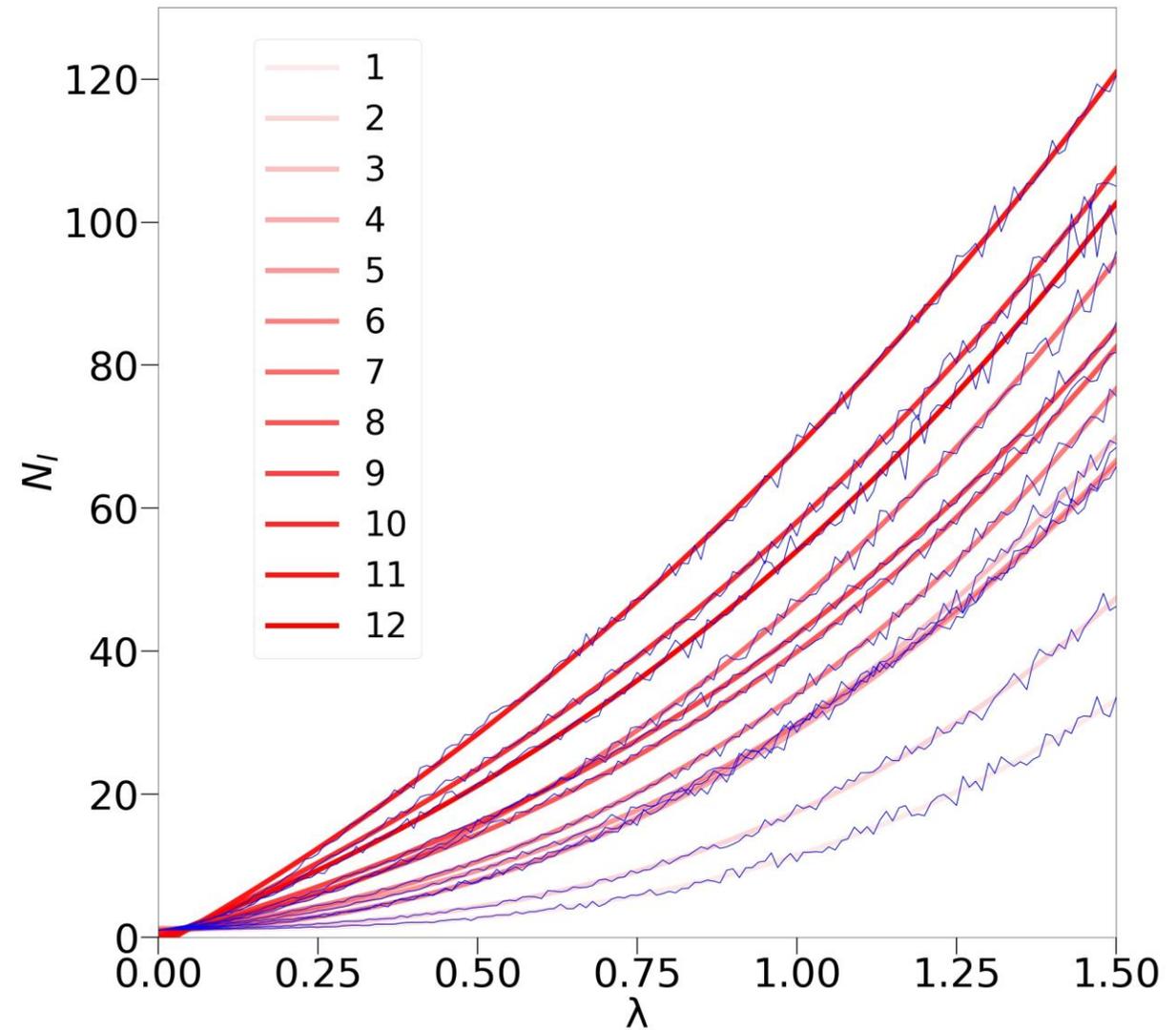


図2-3. 感染率 $\lambda$ と次数別平均の累計感染者 $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{PPP}} \rangle]_{m,1.3}$ のグラフ. シミュレーションで得られた値(青), 回帰分析したグラフ(赤).

# 2-4.GPPの次数別平均の累計感染者数

感染率 $\lambda$ と次数別平均の累計感染者数 $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{m,1.3}$ は —  
$$\exp(b_1\lambda + b_0)$$

で回帰分析できた.  $b_i$  ( $i = 0, 1$ )は定数. ただし, 次数1は45個, 次数8は19個の平均である.

$$\begin{aligned} [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{1,1.3}(\lambda) &= \exp(4.18\lambda - 1.06), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{2,1.3}(\lambda) &= \exp(4.05\lambda - 0.533), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{3,1.3}(\lambda) &= \exp(3.93\lambda - 0.137), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{4,1.3}(\lambda) &= \exp(3.80\lambda + 0.172), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{5,1.3}(\lambda) &= \exp(3.74\lambda + 0.350), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{6,1.3}(\lambda) &= \exp(3.67\lambda + 0.489), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{7,1.3}(\lambda) &= \exp(3.67\lambda + 0.511), \\ [\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{8,1.3}(\lambda) &= \exp(3.58\lambda + 0.662). \end{aligned}$$

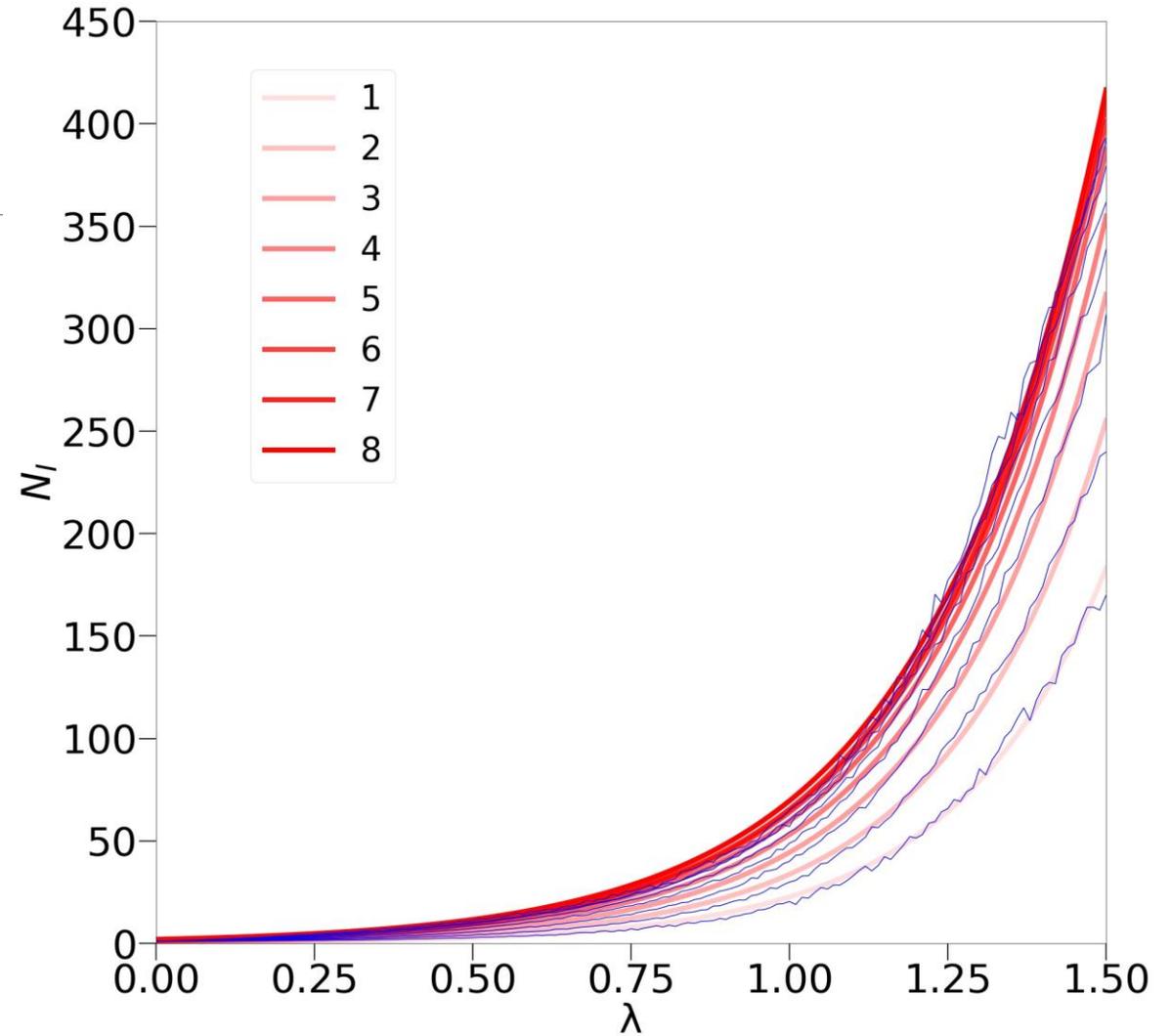


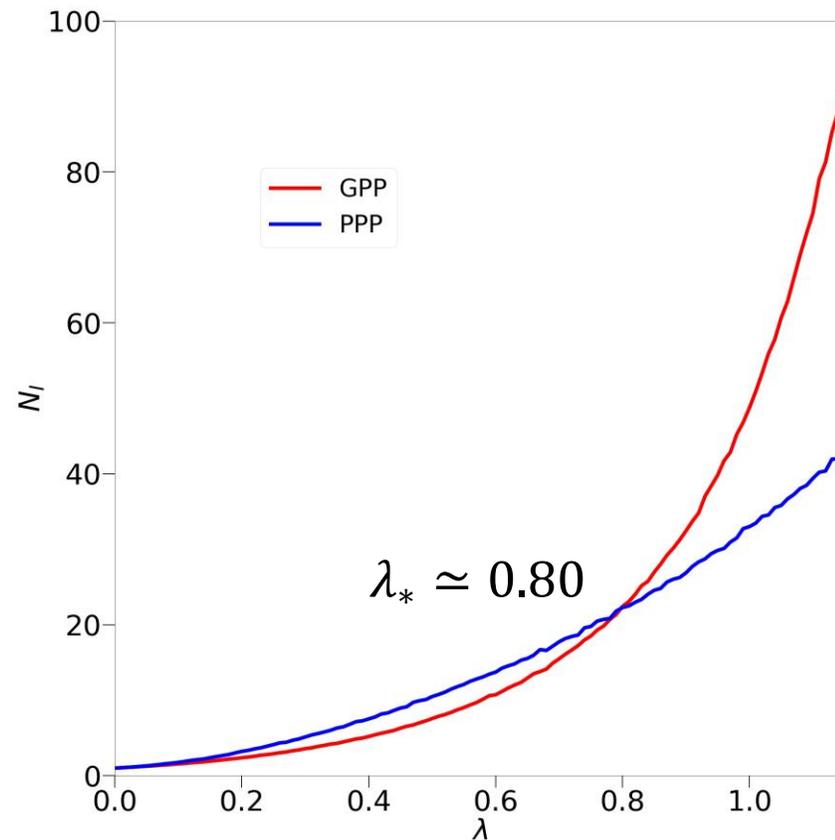
図2-4. 感染率 $\lambda$ と次数別平均の累計感染者 $[\langle \mathcal{N}_I^{\text{GPP}} \rangle]_{m,1.3}$ のグラフ. シミュレーションで得られた値(青), 赤線が回帰分析したグラフ(赤).

# 2-5. $\kappa = 1.3$ での感染における逆転現象

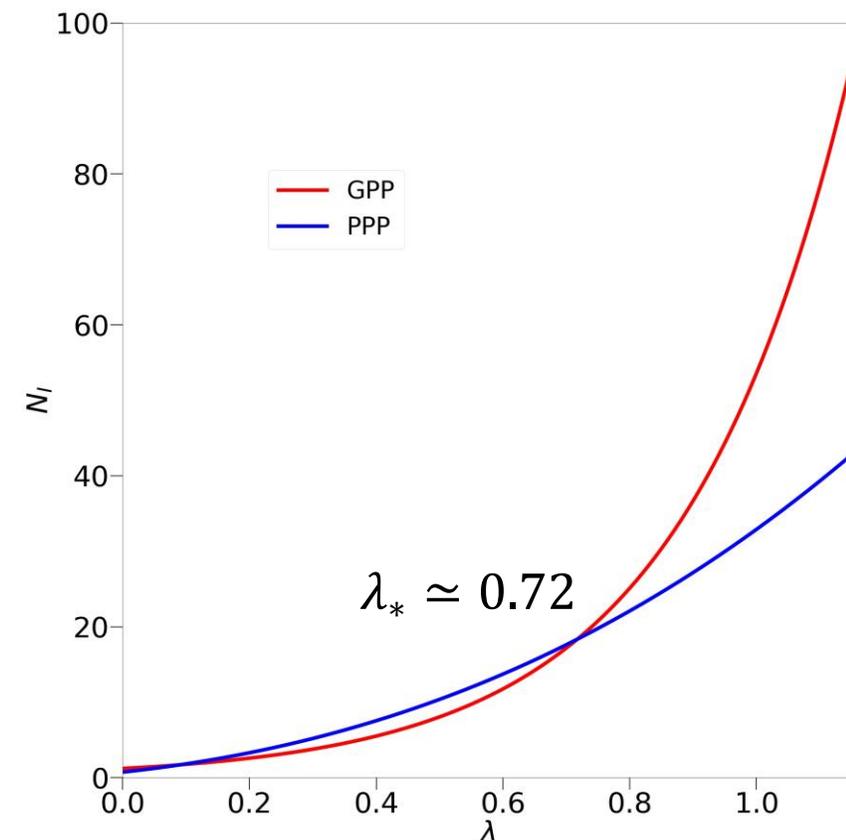
スライド2-1から2-4の $P_{1.3}(m)$ ,  
 $[\langle \mathcal{N}_I \rangle]_{m,1.3}$ の結果を使用し, 掛け足し  
 合わせることで, 平均の累計感染者  
 数 $[\langle \mathcal{N}_I \rangle]_{1.3}$ を得る.

$$[\langle \mathcal{N}_I^\# \rangle]_{1.3} = \sum_m P_{1.3}^\#(m) [\langle \mathcal{N}_I^\# \rangle]_{m,1.3}$$

(# = PPPまたはGPP)



(a)シミュレーションで得られた値による  
 感染率 $\lambda$ と平均の累計感染者数 $[\langle \mathcal{N}_I \rangle]_{1.3}$



(b)回帰分析の式による感染率 $\lambda$ と平均の  
 累計感染者数 $[\langle \mathcal{N}_I \rangle]_{1.3}$

図2-5.  $\kappa = 1.3$ での感染における逆転現象

# 目次

---

## 1. Introduction

- 先行研究
- 研究の概要・目的

## 2. $\kappa = 1.3$ でのSIRモデル感染シミュレーション

## 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

## 4. まとめ

# 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

・充填率 $\kappa$ と感染率 $\lambda$ の相図

第2章と同様に、 $\kappa = 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ においてもSIRモデル感染シミュレーションを行い、 $\lambda_*$ を求めた。

実線がシミュレーションで得られた値、点線が回帰分析の式により得られた充填率 $\kappa$ と感染率 $\lambda$ の相図である。

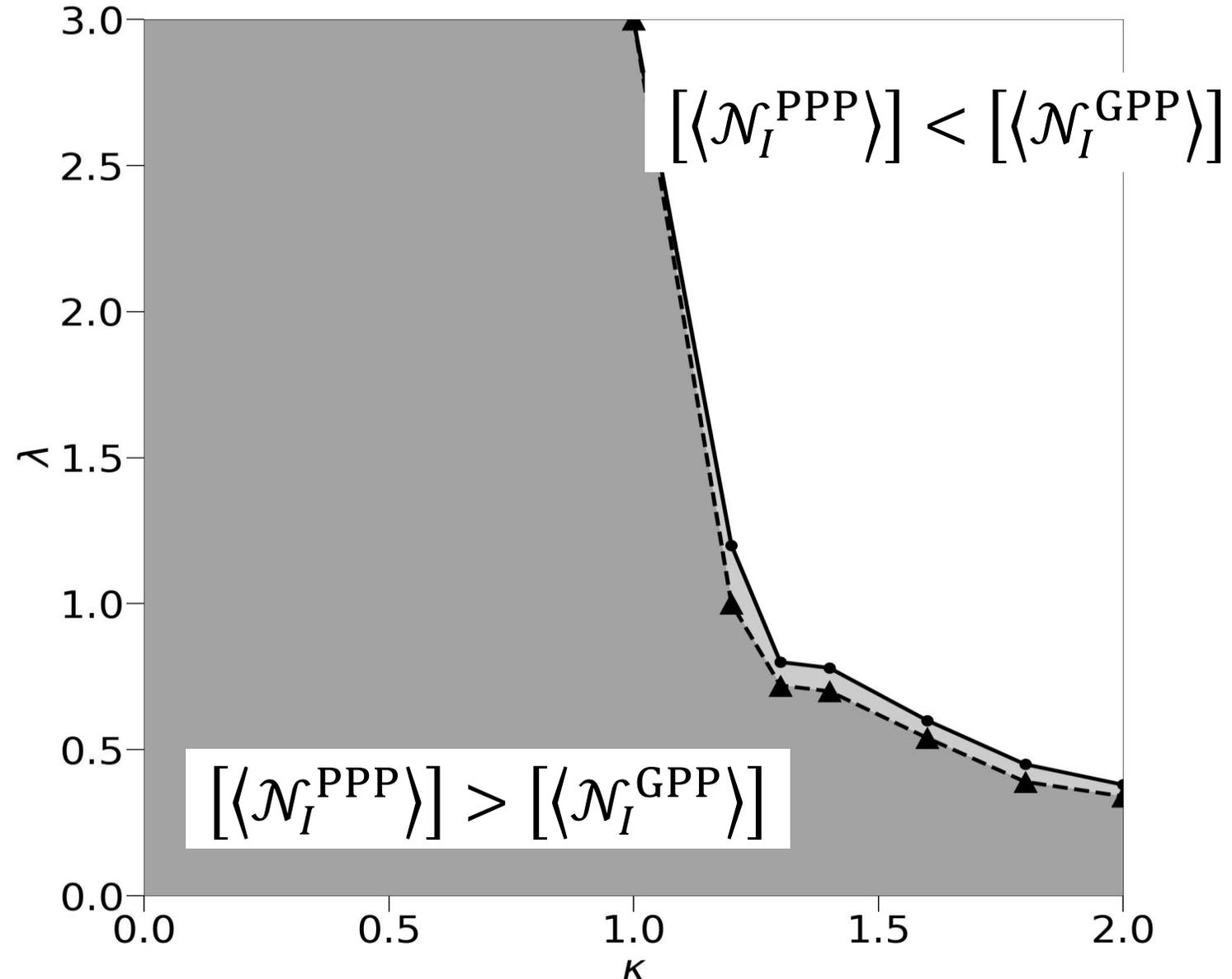


図3. 充填率 $\kappa$ と感染率 $\lambda$ の相図

# 目次

---

## 1. Introduction

- 先行研究
- 研究の概要・目的

## 2. $\kappa = 1.3$ でのSIRモデル感染シミュレーション

## 3. $\kappa$ の値を変えたときの感染における逆転現象

## 4. まとめ

## 4. まとめ

---

- ・感染の回帰分析を用いることで, 始点によって感染プロセスが異なることが分かった.
- ・始点に着目しSIRモデル感染シミュレーションを行うことでも逆転現象を説明することができた. つまり, 感染率 $\lambda$ が小さい場合GPPの累計感染者数が小さくなり, 感染率 $\lambda$ が大きい場合PPPの累計感染者数が小さくなるといえる.

# 参考文献

---

[1] Machiko Katori, Makoto Katori: Continuum percolation and stochastic epidemic models on Poisson and Ginibre point processes. *Phys. A. Stat. Mech. its Appl* **581** (2021) 126191.

[2] Machiko Katori, Makoto Katori: Spreading and suppression of infection clusters on the Ginibre continuum percolation clusters. arXiv:2105.044142

[3] D.T.Gillespie, A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions. *J. Comput. Phys.* **22** (4) (1976) 403-434,  
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(76\)90041-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90041-3).

---

ご清聴ありがとうございました