

2019 年度修士論文

非整数 Fokker-Planck 方程式と非整数微積分作用素

Fractional Fokker-Planck equations and fractional differintegrals

中央大学理工学研究科物理学専攻

香取眞理研究室 博士前期課程 2 年

矢萩 脩

概要

1章では、非整数微積分作用素について記述した。非整数微積分作用素とはその名のとおりに、通常の微積分で扱うような整数の微積分の補間として定義されたものである。この非整数微積分作用素にはいくつか定義があるが、その中でも Grünwald-Letnikov 非整数微積分作用素と Riemann-Liouville 非整数微積分作用素について述べ、それらが本質的には同じであることを示した。

次の2章では、指数関数 e^x の拡張である Mittag-Leffler 関数について記述した。Mittag-Leffler 関数には1変数 Mittag-Leffler 関数と2変数 Mittag-Leffler 関数があるが、ここでは主に2変数 Mittag-Leffler 関数のラプラス変換について示した。これらは、後の6章で非整数 Fokker-Planck 方程式の解を求めるときに関わってくる。

3, 4, 5章は拡散過程 $X(t)$ について記述した。拡散過程とは、その平均2乗変位が $\langle X(t)^2 \rangle \propto t^\gamma$ のように時間のべき乗で特徴づけられているものをいう。より詳細には

$$\begin{aligned} 0 < \gamma < 1 &\longrightarrow \text{準拡散} \\ \gamma = 1 &\longrightarrow \text{通常拡散 (ブラウン拡散)} \\ \gamma > 1 &\longrightarrow \text{超拡散} \end{aligned}$$

のように指数 γ の大きさによってよび方が変わる。まず3章で後の4, 5章の基本となる幾何ブラウン運動 $X(\tau)$ について述べる。次に4章では、準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ について述べる。準拡散幾何ブラウン運動とは、幾何ブラウン運動 $X(\tau)$ に対して時間 τ を $1/\alpha$ 安定 subordinator $S_\alpha(t)$ によって変換した拡散過程である。この準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ は一般的には上記の性質を示すことが分かっている。さらに5章では複合拡散幾何ブラウン運動について述べる。まず、拡散過程 $X_H(\tau)$ を導入する。これは3章で述べた幾何ブラウン運動 $X(\tau)$ の確率微分方程式が通常のブラウン運動 $B(\tau)$ によって記述されているのに対し、非整数ブラウン運動 $B_H(\tau)$, ないしは変形非整数ブラウン運動 $b_H(\tau)$ で記述される拡散過程である。この $X_H(\tau)$ に対し、先の準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ で用いた $1/\alpha$ 安定 subordinator $S_\alpha(t)$ によって時間 τ を変換する。このようにして得られた拡散過程 $X_{\alpha,H}(t)$ を複合拡散幾何ブラウン運動とよぶ。なお $B_H(\tau)$ や $b_H(\tau)$ にある添え字 H はハースト指数 (Hurst index) であり $H \in (0, 1)$ の値をとる。

最後に6章では、非整数 Fokker-Planck 方程式の導出とその解について記述した。Fokker-Planck 方程式は確率密度関数が満たす偏微分方程式である。この Fokker-Planck 方程式は Kramers-Moyal 前進型展開で記述される偏微分方程式において、3次以上のモーメントをなくすことで得られる。このことから5章で述べた拡散過程 $X_H(\tau)$ が満たす確率微分方程式を用いて Kramers-Moyal 前進型展開で記述される偏微分方程式を求め、3次以上のモーメントをなくすことで非整数 Fokker-Planck 方程式を導出した。非整数 Fokker-Planck 方程式は次数 $1 - \alpha$ と $1 - 2\alpha H$ の2つの時間 t に関する非整数微積分作用素で記述されている。 $H = 1/2$ のとき、どちらの次数も $1 - \alpha$ で一致し偏微分方程式の変数を分離することができる。このとき κ という定数を導入した。このことから κ を固定したときの x と t の微分方程式の解をそれぞれ求め、これらの積をとることで $H = 1/2$ における κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解を求めた。

目次

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | 非整数微積分作用素 | 4 |
| 1.1 | Grünwald-Letnikov 非整数微積分作用素 (G-L 型微積分作用素) ${}_a D_t^p$ | 4 |
| 1.2 | Riemann-Liouville 非整数微積分作用素 (R-L 型非整数微積分作用素) ${}_a \mathbf{D}_t^p$ | 11 |
| 2 | Mittag-Leffler 関数 | 12 |
| 2.1 | Mittag-Leffler 関数と代表的な関数の関係 | 12 |
| 2.2 | 2 変数 Mittag-Leffler 関数のラプラス変換 | 14 |
| 3 | 幾何ブラウン運動 | 16 |
| 4 | 準拡散幾何ブラウン運動 | 17 |
| 4.1 | α 安定 Lévy 過程について | 17 |
| 4.2 | $S_\alpha(t)$ の計算機シミュレーション | 17 |
| 5 | 複合拡散幾何ブラウン運動 | 20 |
| 5.1 | 変形非整数ブラウン運動、非整数ブラウン運動 | 20 |
| 6 | 非整数 Fokker-Planck 方程式 | 22 |
| 6.1 | 非整数 Fokker-Planck 方程式の導出 | 22 |
| 6.2 | $H = 1/2$ における非整数 Fokker-Planck 方程式 | 30 |
| 6.3 | $H = 1/2, \alpha \rightarrow 1$ の極限における非整数 Fokker-Planck 方程式 | 31 |
| 7 | κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 | 32 |
| 7.1 | κ の導入 | 32 |
| 7.2 | κ を固定したときの t についての微分方程式の解 $T_\kappa(t)$ | 33 |
| 7.3 | κ を固定したときの x についての微分方程式の解 $X_\kappa(x)$ | 37 |
| 7.4 | $H = 1/2$ における κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x, t)$ | 39 |
| 8 | 結果 | 40 |
| 9 | 課題 | 40 |

1 非整数微積分作用素

ある関数 $f(t)$ に n 回微分・積分を作用させる (ただし $n = 0, 1, 2, \dots$ とする).

$$\dots, \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_1}^{t''} f(t') dt', \int_{t_0}^t f(t') dt', f(t), \frac{d}{dt} f(t), \frac{d^2}{dt^2} f(t), \dots \quad (1.1)$$

このとき任意の実数 α で (1.1) 式の作用素を補間することを考える. それを次のように表記する.

$${}_a D_t^\beta f(t). \quad (1.2)$$

ただし a と t はそれぞれ作用素がはたらく領域の上限値と下限値である. (1.2) 式の ${}_a D_t^\beta$ を非整数微積分作用素とよぶ. 実数 β が正のとき ${}_a D_t^\beta f(t)$ は次数 β の非整数微分を表す. また β が負のとき ${}_a D_t^\beta f(t)$ は次数 β の非整数積分を表す.

1.1 Grünwald-Letnikov 非整数微積分作用素 (G-L 型微積分作用素) ${}_a D_t^p$

1.1.1 任意の整数 p における G-L 型非整数微積分作用素

[1] にない G-L 型非整数微積分作用素を次のように定義する.

$${}_a D_t^p = h^{-p} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (1.3)$$

ただし $p \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f^{(k)}(a) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)|_{x=a}$ とする.

1.1.2 任意の整数 p における G-L 型非整数積分作用素

G-L 型非整数微積分作用素は (1.22) 式にあるように関数 $f(t)$ の微分を定義し, それを積分へ拡張する. 整数 p が $p > 0$ のとき (1.22) 式右辺の $f(t - rh)$ の項から微分のイメージができるが $p < 0$ のときに (1.22) 式が積分になるということはイメージしがたい. そこで [1] に基づき, 次のような方法で G-L 型非整数微積分作用素の微分と積分を統一する.

一般的な微分の定義から $f(t)$ の 1 階微分は

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (1.4)$$

2 階微分は

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

のように与えられる. このことから $f(t)$ の n 階微分 $f^{(n)}(t)$ が

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

で与えられることは明らかである。ここで整数 p を用いて

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (1.7)$$

を考える。 $p \leq n$ のとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p}{dt^p} f(t), \quad (1.8)$$

となることがすぐにわかる。ただし二項係数 $\binom{p}{r}$ は $r \geq p + 1$ なる整数で 0 をとるものとする。一方、 p が負の整数の場合、これを $-p$ (ただし $p > 0$) とおくと

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-p}{r} f(t - rh) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh), \quad (1.9)$$

のようになる。ここで $\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right]$ は二項係数 $\binom{-p}{r}$ と

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right], \quad (1.10)$$

の関係で結ばれる。いま、(1.9) 式において n を固定し $h \rightarrow 0$ なる極限をとると $f_h^{(-p)}(t)$ は 0 に収束してしまう。それを避けるために $h \rightarrow 0$ の極限をとったときに同様に $n \rightarrow \infty$ となるようにする。具体的には $h = \frac{t-a}{n}$ とし、

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t), \quad (1.11)$$

によって ${}_a D_t^{-p}$ ($p > 0$) を定義する。ただし a, t はそれぞれ作用素の領域の上限値と下限値である。

$p = 1$ のとき

$p = 1$ のとき (1.9) 式は

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} 1 \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh) = h \sum_{r=0}^n f(t - rh), \quad (1.12)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} h \sum_{r=0}^n f(t - rh) \\ &= \int_0^{t-a} f(t - z) dz \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.13)$$

$p = 2$ のとき

$p = 2$ のとき (1.9) 式は

$$\begin{aligned}
f_h^{(-2)}(t) &= h^2 \sum_{r=0}^n \binom{2}{r} f(t - rh) = h^2 \sum_{r=0}^n (r+1) f(t - rh) \\
&= h^2 \sum_{r=1}^{n+1} r f(t - (r-1)h) \\
&= h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh),
\end{aligned} \tag{1.14}$$

となる. ここで $t + h = y$ なる変数変換を用いた. よって

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-2} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(t - rh) \\
&= \int_0^{t-a} z f(t - z) dz \\
&= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$p = 3$ のとき

$p = 3$ のとき (1.9) 式は

$$\begin{aligned}
f_h^{(-3)}(t) &= h^3 \sum_{r=0}^n \binom{3}{r} f(t - rh) = h^3 \sum_{r=0}^n \frac{(r+1)(r+2)}{2!} f(t - rh) \\
&= \frac{h^3}{2!} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1) f(t - (r-1)h) \\
&= \frac{h}{2!} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{2!} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh),
\end{aligned} \tag{1.16}$$

となる. ここで $p = 2$ のときと同様に $t + h = y$ なる変数変換を用いた. よって

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-3} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \frac{h}{2!} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \frac{h^2}{2!} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh) \\
&= \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t - z) dz \\
&= \frac{1}{2!} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

以上 (1.13), (1.15), (1.17) 式より次のような積分表式が予想される.

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.18}$$

(1.18) 式の証明

(1.18) 式を数学的帰納法で証明する. 以下 $p \geq 1$ とする.

$p = 1$ のとき (1.13) 式から明らかのように

$${}_a D_t^{-1} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau := f_1(t), \quad (1.19)$$

である. 次に p のときに (1.18) 式が成立すると仮定し $p+1$ のときに成立することを示す.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= {}_a D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} f_h^{(-p-1)}(t) \\ &= h^{p+1} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} f(t-rh) \\ &= h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} h f(t-rh) \\ &= h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} (f_1(t-rh) - f_1(t-(r+1)h)) \\ &= h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} f_1(t-rh) - h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} f_1(t-(r+1)h) \\ &= h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f_1(t-rh) + h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r-1} f_1(t-rh) \\ &\quad - h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} f_1(t-(r+1)h) \\ &= h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f_1(t-rh) + h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r-1} f_1(t-rh) \\ &\quad - h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \sum_{r=1}^{n+1} \binom{p+1}{r-1} f_1(t-rh) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - h^p \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ hn=t-a}} \binom{p+1}{n} f_1(t-(n+1)h) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{p+1}{n} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p!} [-(t-\tau)^p f_1(\tau)]_{\tau=a}^t + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.20)$$

したがって $p+1$ のときに成立することが示された. ゆえに (1.18) は任意の整数 p で成立する. \square

1.1.3 任意の実数 p における G-L 型非整数微積分作用素

(1.22),(1.18) 式により G-L 型非整数微積分作用素は任意の整数 p で成立することが示された. しかし p は整数でなくてもよい.[1] によれば, 任意の実数 p における G-L 型非整数微積分作用素を以下のように定義している.

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{nh=t-a} f_h^{(p)}(t) \quad (1.22)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (m < p < m+1). \quad (1.23)$$

[1] に基づいて任意の実数 p における G-L 型非整数微積分作用素の微分と積分を統一する.

証明として以下の定理を用いる.

定理 1 ([1]Theorem2.1,[2])

数列 $\beta_k, (k = 1, 2, \dots)$ が以下を満たすとする.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1, \quad (1.24)$$

$$\text{すべての } k \text{ に対し } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0, \quad (1.25)$$

$$\text{すべての } k \text{ に対し } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A, \quad (1.26)$$

$$\text{すべての } n \text{ に対し } \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K. \quad (1.27)$$

このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A, \quad (1.28)$$

となる.

$p > 0$ のとき G-L 型非整数微積分作用素 ${}_a D_t^p$ は非整数微分作用素を表す. 二項係数の関係式

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1}, \quad (1.29)$$

より (1.7) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + \frac{1}{h^p} \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh), \end{aligned} \quad (1.30)$$

ただし $\Delta f(t - rh) = f(t - rh) - f(t - (r + 1)h)$ とする. 二項係数の関係式 (1.29) 式を m 回繰り返すと (1.30) 式は以下ようになる.

$$f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a + kh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t - rh). \quad (1.31)$$

(1.31) 式の右辺第 1 項の和において k 番目の極限を考える.

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a + kh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a + kh)}{h^k} \\ &= (t-a)^{-p+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a + kh)}{h^k} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}. \quad (1.33)$$

ここで (1.32) 式において Γ 関数の極限表示

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1.34)$$

および

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a + kh)}{h^k} = f^{(k)}(a), \quad (1.35)$$

であることを用いた. 一方 (1.31) 式の右辺第 2 項を以下のように書き換える.

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} h (rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}. \quad (1.36)$$

ここで

$$\beta_r = (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}, \quad (1.37)$$

$$\alpha_{n,r} = h (rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}, \quad h = \frac{t-a}{n}, \quad (1.38)$$

とおけば (1.34) 式より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} = 1, \quad (1.39)$$

となる. さらに $m-p > -1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} h (rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} = \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (1.40)$$

となる. (1.39), (1.40) 式および定理 1 より

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (1.41)$$

となることが言える. 以上 (1.33), (1.41) 式より (1.31) 式の極限が以下のようになり任意の実数 $p > 0$ における非整数微積分作用素が示された.

$$\begin{aligned} & {}_a D_t^p f(t) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (m < p < m+1). \end{aligned} \quad (1.42)$$

ここで $m < p < m+1$ となるのは取りうる最も小さい整数 m が $m < p < m+1$ として決まるからである.

$p < 0$ のとき G-L 型非整数微積分作用素 ${}_a D_t^p$ は非整数積分作用素を表す. 分かりやすくするため $-p$ (ただし $p > 0$) とする. すなわち (1.9) 式の極限を考える.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{1}{r^{p-1}} \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

ここで

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right], \quad (1.44)$$

$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right), \quad (1.45)$$

とおけば (1.34) 式より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = 1 \quad (1.46)$$

となる. さらに

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \alpha_{n,r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.47)$$

となる. (1.46), (1.47) 式および定理 1 より

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} h(rh)^{p-1} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.48)$$

となる. (1.48) 式に対し部分積分を $m+1$ 繰り返すと以下のようになり任意の実数 $-p < 0$ における非整数微積分作用素が示された.

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m+p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

1.2 Riemann-Liouville 非整数微積分作用素 (R-L 型非整数微積分作用素) ${}_a D_t^p$

1.2.1 任意の実数 p における R-L 型非整数積分作用素

Riemann-Liouville 非整数積分作用素 [1] を次のように定義する.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \quad (m \leq p < m+1). \end{aligned} \quad (1.50)$$

R-L 型非整数微積分作用素は (1.50) 式にあるように関数 $f(t)$ の積分を定義し, それを微分へと拡張していく. $p > 0, -p < 0$ (ただし $p > 0$) における R-L 型非整数微分, 非整数積分作用素については [1] の 2.3.1~2.3.3 (63~72 ページ) で示されている.

1.2.2 G-L 型非整数微積分作用素と R-L 型非整数微積分作用素の関係

G-L 型非整数微積分作用素 (1.23) 式と R-L 型非整数微積分作用素 (1.51) 式より, これらの作用素の間には

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a \mathbf{D}_t^p f(t), \quad (1.52)$$

の関係が成り立つことがわかる.

2 Mittag-Leffler 関数

Mittag-Leffler 関数には 1 変数の Mittag-Leffler 関数 $E_a(z)$ と 2 変数の Mittag-Leffler 関数 $E_{a,b}(z)$ がある. $E_a(z)$ と $E_{a,b}(z)$ を以下のように定義する [1], [3].

定義 1 Mittag-Leffler 関数

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+1)}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

2.1 Mittag-Leffler 関数と代表的な関数の関係

1 変数, 2 変数 Mittag-Leffler 関数はパラメーターの取り方によって次に述べるような代表的な関数との関係が導かれる [1], [3].

2.1.1 1 変数 Mittag-Leffler 関数と代表的な関数の関係

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (2.3)$$

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k!} = \cos z, \quad (2.4)$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z. \quad (2.5)$$

なお (2.5) 式は

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l + (-z)^l}{l!}, \quad (2.6)$$

において $l = 2k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ のとき

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l + (-z)^l}{l!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k} + (-z)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!}, \quad (2.7)$$

$l = 2k+1, (k = 0, 1, 2, \dots)$ のとき

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l + (-z)^l}{l!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1} + (-z)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1} - z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0, \quad (2.8)$$

を用いた.

2.1.2 2変数 Mittag-Leffler 関数と代表的な関数の関係

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (2.9)$$

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{z}^{2k}}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{z}), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{z}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

なお (2.10) 式は (2.5) 式と同様に $\cosh z$ の無限級数展開を用いた。また (2.11) 式は

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l - (-z)^l}{l!}, \quad (2.12)$$

において $l = 2k + 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l - (-z)^l}{l!} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1} - (-z)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$l = 2k$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l - (-z)^l}{l!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k} - (-z)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k} - z^{2k}}{(2k)!} = 0, \quad (2.14)$$

を用いた。

2.1.3 1変数 Mittag-Leffler 関数と 2変数 Mittag-Leffler 関数の関係

2変数 Mittag-Leffler 関数には

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} + zE_{a,a+b}(z), \quad (2.15)$$

という関係が成り立つ [3]。この (2.15) 式に $b = 1$ を代入すると次のような 1変数 Mittag-Leffler 関数と 2変数 Mittag-Leffler 関数についての関係式が導かれる。

$$E_a(z) = E_{a,1}(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} + zE_{a,a+1}(z) = 1 + zE_{a,a+1}(z). \quad (2.16)$$

(2.15) 式の証明

2変数 Mittag-Leffler 関数 (2.2) 式の $k = 0$ の項を取り出し k が 1 つずれることで (2.16) 式が証明される.

$$\begin{aligned}
 E_{a,b}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} = \frac{1}{\Gamma(b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} = \frac{1}{\Gamma(b)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(a(k+1)+b)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(b)} + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+(a+b))} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(b)} + z E_{a,a+b}(z). \quad \square \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

2.2 2変数 Mittag-Leffler 関数のラプラス変換

2変数 Mittag-Leffler 関数 $E_{a,b}(z)$ で構成される関数 $t^{ak+b-1} E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta t^a)$ に対してラプラス変換を行うと以下のようなになる [1].

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{ak+b-1} E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta t^a) dt = \frac{k! s^{a-b}}{(s^a \mp \beta)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\beta|^{1/a}, \quad (2.18)$$

ただし $E_{a,b}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{a,b}(y)$ である.

(2.18) 式の証明

ここでは [1] に基づき (2.18) 式の証明を行う. まず $E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta t^a)$ を求める.

$$\begin{aligned}
 E_{a,b}^{(k)}(\pm\beta t^a) &= \frac{d^k}{d(\pm\beta t^a)^k} E_{a,b}(\pm\beta t^a) = \frac{1}{(\pm\beta)^k} \frac{d^k}{d(t^a)^k} E_{a,b}(\pm\beta t^a) \\
 &= \frac{1}{(\pm\beta)^k} \frac{d^k}{d(t^a)^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\pm\beta t^a)^l}{\Gamma(al+b)} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} \frac{d^k}{d(t^a)^k} \frac{(t^a)^l}{\Gamma(al+b)} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)(t^a)^{l-k}}{\Gamma(al+b)}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

これを (2.18) 式の左辺に代入すると以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} e^{-st} t^{ak+b-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)(t^a)^{l-k}}{\Gamma(al+b)} \right) dt \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{\Gamma(al+b)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{ak+b-1} \times t^{al-ak} dt \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{\Gamma(al+b)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{al+b-1} dt \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (\pm\beta)^{l-k} l(l-1)\dots(l-k+1) \times \left(\frac{1}{s}\right)^{al+b}. \quad (2.21)$$

ここで (2.20) 式において $\tilde{t} = st$ の変数変換を行うことで

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} t^{al+b-1} dt &= \int_0^\infty e^{-\tilde{t}} \left(\frac{\tilde{t}}{s}\right)^{al+b-1} \frac{d\tilde{t}}{s} = \left(\frac{1}{s}\right)^{al+b} \int_0^\infty e^{-\tilde{t}} \tilde{t}^{al+b-1} d\tilde{t} \\ &= \left(\frac{1}{s}\right)^{al+b} \Gamma(al+b), \end{aligned} \quad (2.22)$$

となることを用いた. さらに (2.21) 式を以下のように変形する.

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)\dots(l-k+1) \left(\frac{\pm\beta}{s^a}\right)^{l-k} \times s^{-ak-b}. \quad (2.23)$$

ここで無限級数の和の公式

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^l = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad (2.24)$$

を利用する. 両辺を x で 1 回微分を行うと

$$\frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{\infty} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} l \times x^{l-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (2.25)$$

2 回微分を行うと

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{l=0}^{\infty} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1) \times x^{l-2} = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \quad (2.26)$$

となることから k 回微分を行うと

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{l=0}^{\infty} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)\dots(l-k+1) \times x^{l-k} = \frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{1-x} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad (2.27)$$

であることが導かれる. このことから (2.23) 式に対して

$$x \rightarrow \frac{\pm\beta}{s^a}, \quad \left(\text{ただし } \left|\frac{\beta}{s^a}\right| < 1 \implies |s|^a > |\beta| \implies \operatorname{Re}(s) > |\beta|^{1/a} \text{ とする}\right), \quad (2.28)$$

の変数変換を行えば (2.27) 式より

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)\dots(l-k+1) \left(\frac{\pm\beta}{s^a}\right)^{l-k} \times s^{-ak-b} &= \frac{k! s^{-ak-b}}{(1 - (\pm\beta/s^a))^{k+1}} \\ &= \frac{k! s^{-ak-b}}{s^{-ak-a} (s^a \mp \beta)^{k+1}} \\ &= \frac{k! s^{a-b}}{(s^a \mp \beta)^{k+1}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

となり (2.18) 式が導かれた. \square

3 幾何ブラウン運動

幾何ブラウン運動は、経済学や金融工学によく用いられる。 $X(\tau)$ が次のような確率微分方程式を満たすとき $X(\tau)$ を幾何ブラウン運動と定義する [4].

$$dX(\tau) = \mu X(\tau)d\tau + \sigma X(\tau)dB(\tau), \quad X(0) = X_0, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

(3.1) 式の μ, σ はそれぞれ幾何ブラウン運動のドリフト係数と拡散係数に対応しており $B(\tau)$ はブラウン運動である。幾何ブラウン運動 (3.1) 式の解は、

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma B(\tau)}, \quad (3.2)$$

で与えられる。

(3.2) 式の証明

(3.1) 式の両辺を $X(t)$ で割ると

$$\frac{dX(\tau)}{X(\tau)} = \mu d\tau + \sigma dB(\tau), \quad (3.3)$$

となる。(3.3) 式の左辺は

$$\frac{dX(\tau)}{X(\tau)} = d \log X(\tau), \quad (3.4)$$

のように書き換えることができるので、伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d \log X(\tau) &= \frac{d}{dx} \log x|_{x=X(\tau)} dX(\tau) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \log x|_{x=X(\tau)} d\langle X(s), X(s) \rangle_\tau \\ &= \frac{1}{X(\tau)} dX(\tau) - \frac{1}{2} \frac{1}{X(\tau)^2} \sigma^2 X(\tau)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{X(\tau)} (\mu X(\tau) d\tau + \sigma X(\tau) dB(\tau)) - \frac{1}{2} \sigma^2 d\tau \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) d\tau + \sigma dB(\tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となることが導かれる。したがってこれを解くと

$$\log \left(\frac{X(\tau)}{X(0)} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau + \sigma B(\tau) \implies X(\tau) = X(0) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \tau + \sigma B(\tau)}, \quad (3.6)$$

となり (3.2) 式が得られる。□

また、(3.3) 式から分かるように幾何ブラウン運動は $X(\tau)$ の対数をとった $\log X(\tau)$ が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うような確率過程である。

4 準拡散幾何ブラウン運動

準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ とは

$$X_\alpha(t) = X(S_\alpha(t)), \quad (4.1)$$

で定義される拡散過程である [4]. (4.1) 式右辺より準拡散幾何ブラウン運動 $X_\alpha(t)$ は, 幾何ブラウン運動 $X(\tau)$ の時間 τ を $S_\alpha(t)$ によって変換したときの拡散過程である. ここで $S_\alpha(t)$ は $1/\alpha$ 安定 subordinator とよばれる

$$S_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t\}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2)$$

によって定義する [4], [5]. ただし (4.2) 式の $U_\alpha(t)$ は α 安定 Lévy 過程である.

4.1 α 安定 Lévy 過程について

α 安定 Lévy 過程を以下のように定義する [6], [7].

定義 2 α 安定 Lévy 過程

確率過程 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ が以下の条件を満たすとき $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ を α 安定 Lévy 過程と定義する.

- サンプルパスが各時刻 t に対して右に連続かつ左に極限をもつ.
- すべての時刻 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ に対して増分 $X(t_i) - X(t_{i-1})$ が独立.
- すべての時刻 $0 \leq s \leq t$ に対して, 確率変数 $X(t) - X(s)$ と $X(t-s) - X(0)$ が同じ分布関数をもつ.
- $\{X(t/\tau^{1/\alpha})/\tau^{1/\alpha}\}_{t \geq 0}$ が $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ と同じ確率法則に従う (自己相似特性).

なお, $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ が自己相似特性をもたないときは Lévy 過程とよばれる. また, $U_\alpha(\tau)$ は

$$\langle e^{-kU_\alpha(\tau)} \rangle = \int_0^\infty e^{-kt} u(t, \tau) dt = \hat{u}(t, \tau) = e^{-\tau k^\alpha}, \quad (4.3)$$

という関係を満たしている. ただし $u(t, \tau)$ は $U_\alpha(\tau)$ の確率密度関数とする.

4.2 $S_\alpha(t)$ の計算機シミュレーション

ここでは [5] に基づき確率過程 $S_\alpha(t)$ のサンプルパスを図示する.

4.2.1 α 安定 Lévy 過程 $U_\alpha(t)$ の作成

$S_\alpha(t)$ の定義 (4.2) 式より, まず α 安定 Lévy 過程 $U_\alpha(t)$ のサンプルパスを計算機シミュレーションで作成する. まず, $\tau_j = j\Delta\tau$, ($j = 0, 1, 2, \dots, M$) という離散的な時間を設定する. そして以下のような方法によって $\Delta\tau$ ごとの $U_\alpha(\tau_j)$ を計算機シミュレーションによって作成する.

$$U(\tau_0) = 0, \quad (4.4)$$

$$U(\tau_j) = U(\tau_{j-1}) + (\Delta\tau)^{1/\alpha} \xi_j, \quad (4.5)$$

ただし (4.5) 式の ξ_j は次のように作成される.

$$\xi_j = [\cos(\pi\alpha/2)]^{-1/\alpha} \frac{\sin(\alpha(V + \pi/2))}{[\cos(V)]^{1/\alpha}} \times \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + \pi/2))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad (4.6)$$

ここで V は区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ での一様分布, W は平均 1 の指数分布に従う乱数である. 次のページの図 1 は (4.4), (4.5) 式で $\Delta\tau = 0.001, \alpha = 0.6, M = 10000$ として計算機シミュレーションを行うことで作成された $U_\alpha(\tau_j)$ のサンプルパスである.

4.2.2 $S_\alpha(t)$ の作成

先の α 安定 Lévy 過程のときに設定した $\Delta\tau$ とは別に Δt を設定する. この Δt は $t_i = i\Delta t, (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ のように離散的な時間として扱う. ここで t_i ごとに

$$U(\tau_{j-1}) < t_i \leq U(\tau_j), \quad (4.7)$$

となるような τ_j を見つける. このとき Δt の個数 N は

$$U(\tau_{M-1}) < t_N \leq U(\tau_M), \quad (4.8)$$

を満たすような自然数として決定される. (4.7) 式において $S_\alpha(t)$ の定義より

$$S(t_i) = \tau_j, \quad (4.9)$$

となる. このようにして $S(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ が得られる. 次のページの図 2 は図 1 の $U_\alpha(\tau_j)$ のサンプルパスに $\Delta t = 0.0001, N = 26762$ として計算機シミュレーションを行うことで作成した $S_\alpha(t_i)$ のサンプルパスである. 図 1 の $U_\alpha(\tau_j)$ のジャンプに応じて, 図 2 の $S_\alpha(t_i)$ が一定の値をとっている.

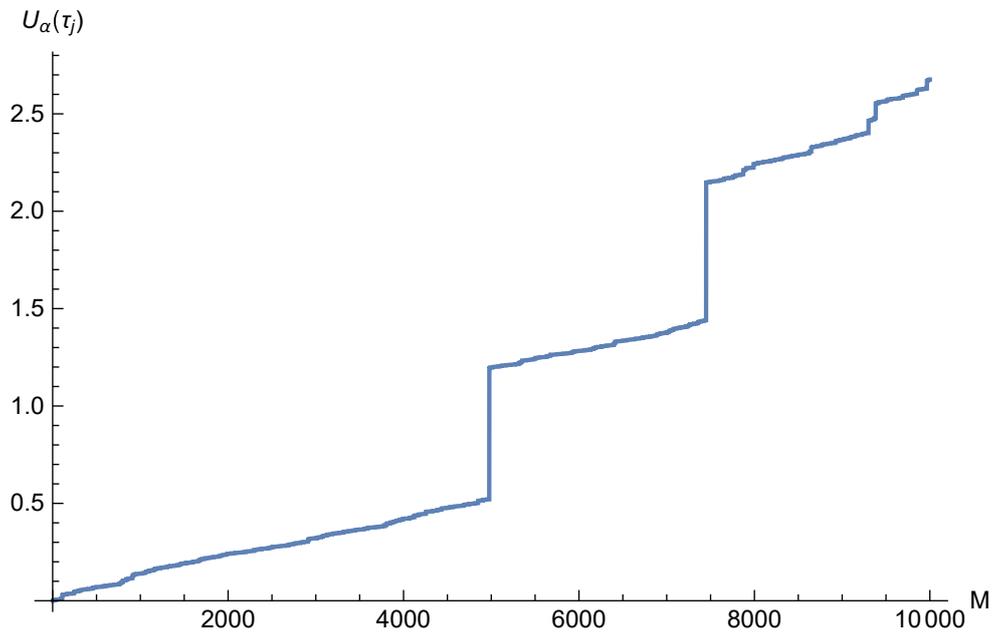


図1 $\Delta\tau = 0.001, \alpha = 0.6, M = 10000$ のときの $U_\alpha(\tau_j)$ のサンプルパス.

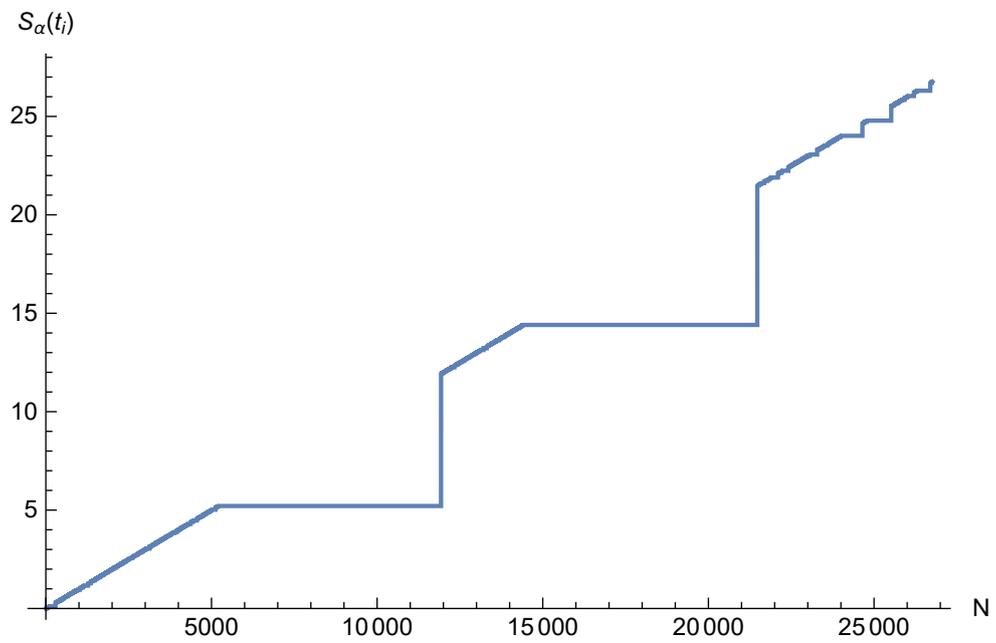


図2 図1の $U_\alpha(\tau)$ に対して $\Delta t = 0.0001, N = 26762$ としたときの $S_\alpha(t_i)$ のサンプルパス.

5 複合拡散幾何ブラウン運動

複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ とは

$$X_{\alpha,H}(t) = X_H(S_\alpha(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < H < 1, \quad (5.1)$$

で定義される拡散過程である [4]. ただし拡散過程 $X_H(\tau)$ は以下の確率微分方程式

$$dX_H(\tau) = \mu X_H(\tau)d\tau + \sigma X_H(\tau)db_H(\tau) \quad (5.2)$$

または

$$dX_H\tau = \mu X_H(\tau)d\tau + \sigma X_H(\tau)dB_H(\tau) \quad (5.3)$$

で定義される [4]. ここで (5.2), (5.3) 式の $b_H(\tau), B_H(\tau)$ はそれぞれ変形非整数ブラウン運動, 非整数ブラウン運動を表す. また $S_\alpha(t)$ は (4.2) 式と同じ $1/\alpha$ 安定 subordinator である.

5.1 変形非整数ブラウン運動、非整数ブラウン運動

変形非整数ブラウン運動, 非整数ブラウン運動を以下のように定義する [4].

定義 3 変形非整数ブラウン運動

確率過程 $\{b_H(t)\}_{t \geq 0}$ が以下のような条件を満たすとき, 変形非整数ブラウン運動と定義する.

$0 < H < 1$ とする. 微小時刻 dt に対し

- $db_H(t) = w(t)(dt)^H$ (ただし $w(t)$ は, 分散が σ^2 で与えられるガウス白色雑音) .
- 平均と分散がそれぞれ $\mathbb{E}[db_H(t)] = 0, \text{Var}[db_H(t)] = \mathbb{E}[w(t)^2](dt)^{2H}$.

定義 4 非整数ブラウン運動

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, ハースト指数を $H \in (0, 1)$ とする. この確率空間内で確率過程 $\{B_H(t)\}_{t \geq 0}$ が以下の条件を満たすとき, ハースト指数 H の非整数ブラウン運動と定義する.

- $\text{Prob}\{B_0(0) = 0\} = 1$.
- 時刻 $t \in \mathbb{R}^+$ において, $B_H(t)$ が \mathcal{F} -可測な確率変数であり $\mathbb{E}[B_H(t)] = 0$.
- 時刻 $t, \tau \in \mathbb{R}^+$ に対して $\mathbb{E}[B_H(t)B_H(\tau)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + \tau^{2H} - |t - \tau|^{2H})$.

5.1.1 非整数ブラウン運動の図

mathematica には非整数ブラウン運動過程 $B_H(t)$ のコマンドがある. 次のページの図 3,4,5 は $\mu = 0, \sigma = 0.1$ で固定し $H = 0.05, 0.50, 0.95$ のときに計算機シミュレーションで作成した $B_H(t)$ のサンプルパスを示している. ただし, 時間 $t = 0$ から $t = 1$ において 0.01 刻みで $B_H(t)$ の値をプロットしている (サンプル数 100). 非整数ブラウン運動の定義で述べたように, 非整数ブラウン運動の平均 2 乗変位が $\langle B_H(t)^2 \rangle \propto t^{2H}$ になることから, ハースト指数 H が大きくなるほど平均 $\mu = 0$ から遠ざかることが確認できる.

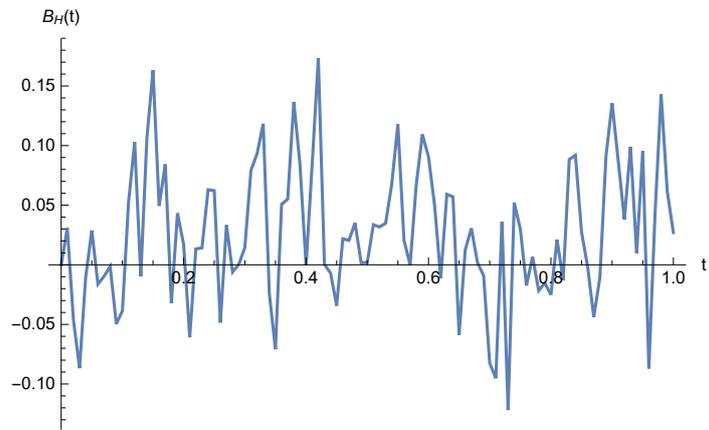


図3 $\mu = 0, \sigma = 0.1, H = 0.05$ のときの $B_H(t)$.

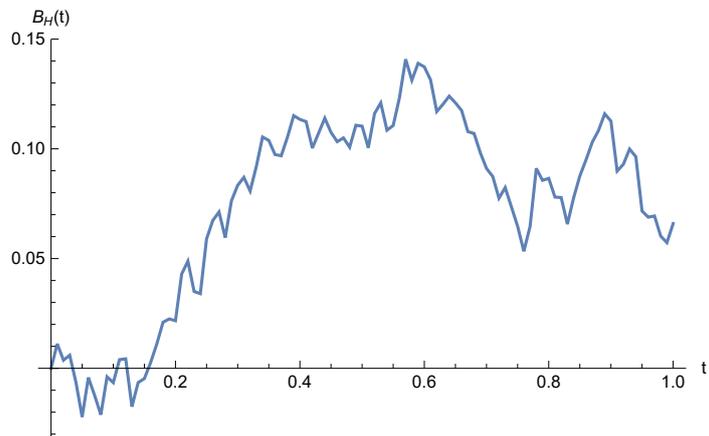


図4 $\mu = 0, \sigma = 0.1, H = 0.50$ のときの $B_H(t)$.

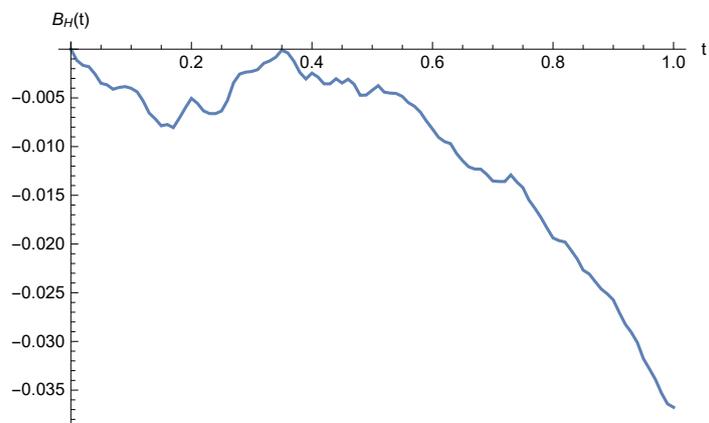


図5 $\mu = 0, \sigma = 0.1, H = 0.95$ のときの $B_H(t)$.

6 非整数 Fokker-Planck 方程式

複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ が (4.2), (5.2) 式で与えられるときを考える. このとき確率過程 $S_\alpha(t)$ と $X_H(\tau)$ はそれぞれ独立であるとする. このとき複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ の確率密度関数 $p(x, t)$ は以下のような非整数 Fokker-Planck 方程式を満たす [4]. ただし α は $\alpha \in (0, 1)$ を満たす実数, $\Gamma(z)$ はガンマ関数, ${}_0\mathbf{D}_t^\gamma$ は Riemann-Liouville 非整数微積分作用素 [1], [4] である.

$1/2 \leq H < 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = & {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) \right] \\ & + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

$0 < H \leq 1/2$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = & {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\Gamma(3-2H)\Gamma(1+2H)\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) \right] \\ & + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

また (6.1), (6.2) 式の $p(x, t)$ はどちらも

$$p(x, 0) = \delta(x), \quad (6.3)$$

を満たす.

6.1 非整数 Fokker-Planck 方程式の導出

ここでは [4], [5] を基に非整数 Fokker-Planck 方程式の導出を行う. 以下の表 1 にあるように, それぞれの確率過程に対して確率密度関数を設定する.

表 1 $X_{\alpha,H}(t), S_\alpha(t), X_H(\tau), U_\alpha(\tau)$ の確率密度関数.

| 過程 | 名称 | 密度関数 |
|-------------------|----------------------------|--------------|
| $X_{\alpha,H}(t)$ | 複合拡散幾何ブラウン運動 | $p(x, t)$ |
| $S_\alpha(t)$ | $1/\alpha$ 安定 subordinator | $g(\tau, t)$ |
| $X_H(\tau)$ | 異常拡散過程 | $f(x, \tau)$ |
| $U_\alpha(\tau)$ | α 安定 Lévy 過程 | $u(t, \tau)$ |

$p(x, t)$ のラプラス変換をとる.

$$\begin{aligned} \hat{p}(x, k) = \int_0^\infty e^{-kt} p(x, t) dt &= \int_0^\infty e^{-kt} \left(\int_0^\infty f(x, \tau) g(\tau, t) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(x, \tau) \hat{g}(\tau, k) d\tau, \end{aligned} \quad (6.4)$$

ここで (4.2) 式より $\text{Prob}[S_\alpha(t) < \tau] = \text{Prob}[U_\alpha(\tau) \geq t] = 1 - \text{Prob}[U_\alpha(\tau) < t]$ すなわち

$$\int_0^\tau g(\tau', t) d\tau' = 1 - \int_0^t u(t', \tau) dt', \quad (6.5)$$

であることが導かれる. 両辺を τ で偏微分することで

$$g(\tau, t) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t u(t', \tau) dt' = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/\alpha}} u\left(\frac{t'}{\tau^{1/\alpha}}, 1\right) dt' \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{t/\tau^{1/\alpha}} u(t', 1) dt' \\ &= \frac{t}{\alpha \tau^{1+1/\alpha}} u\left(\frac{t}{\tau^{1/\alpha}}, 1\right) \\ &= \frac{t}{\alpha \tau} u(t, \tau), \end{aligned} \quad (6.7)$$

となり $g(\tau, t)$ と $u(t, \tau)$ の関係式が導かれる. ここで (6.6) 式および (6.7) 式では確率密度関数 $u(t, \tau)$ の自己相似特性を用いた. よって $g(\tau, t)$ のラプラス変換は (6.7) 式より

$$\begin{aligned} \hat{g}(\tau, k) &= \int_0^\infty e^{-kt} g(\tau, t) dt = \int_0^\infty e^{-kt} \frac{t}{\alpha \tau} u(t, \tau) dt \\ &= -\frac{1}{\alpha \tau} \frac{\partial}{\partial k} \int_0^\infty e^{-kt} u(t, \tau) dt \\ &= -\frac{1}{\alpha \tau} \frac{\partial}{\partial k} \hat{u}(k, \tau), \end{aligned} \quad (6.8)$$

で与えられる. さらに (4.3) 式より $u(t, \tau)$ のラプラス変換が

$$\hat{u}(k, \tau) = \int_0^\infty e^{-kt} u(t, \tau) dt = \langle e^{-kU_\alpha(\tau)} \rangle = e^{-\tau k^\alpha}, \quad (6.9)$$

なることから (6.8) 式は

$$\hat{g}(\tau, k) = -\frac{1}{\alpha \tau} \frac{\partial}{\partial k} e^{-\tau k^\alpha} = -\frac{1}{\alpha \tau} (-\alpha \tau k^{\alpha-1}) e^{-\tau k^\alpha} = k^{\alpha-1} e^{-\tau k^\alpha}, \quad (6.10)$$

と書き換えることができる. したがって (6.10) 式を (6.4) 式に代入すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \hat{p}(x, k) &= \int_0^\infty f(x, \tau) \hat{g}(\tau, k) d\tau = \int_0^\infty f(x, \tau) k^{\alpha-1} e^{-\tau k^\alpha} d\tau \\ &= k^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\tau k^\alpha} f(x, \tau) d\tau \\ &= k^{\alpha-1} \hat{f}(x, k^\alpha) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ただし $\hat{f}(x, k) = \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau$ であり確率密度関数 $f(x, \tau)$ のラプラス変換を表している.

一方, Kramers-Moyal 前進型展開によると確率密度関数 $f(x, \tau)$ について

$$f(x, \tau + \eta) - f(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, \tau, \eta) f(x, \tau), \quad (6.12)$$

が成り立つ [4]. (6.12) 式の $M_n(x, \tau, \eta)$ は

$$M_n(x, \tau, \eta) = E[(X_H(\tau + \eta) - X_H(\tau))^n] |_{X_H(\tau)=x}, \quad (6.13)$$

で定義され、 n 次のモーメントを表す。ただし、 $|_{X_H(\tau)=x}$ は時刻 τ のとき $X_H(\tau)$ が x になることを表している。ここで、(5.2) 式が

$$dX_H(\tau) = \mu X_H(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 X_H(\tau) d\tau^{2H} + \sigma X_H(\tau) db_H(\tau) \quad (6.14)$$

となることを用いると以下のように $M_n(x, \tau, \eta)$ を求めることができる。

$$M_1(x, \tau, \eta) = \left(\mu\eta - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^{2H} \right) x + o(\eta^{\min(1, 2H)}), \quad (6.15)$$

$$M_2(x, \tau, \eta) = \sigma^2 x^2 \eta^{2H} + o(\eta^{\min(1, 2H)}), \quad (6.16)$$

$$M_n(x, \tau, \eta) = o(\eta^{\min(1, 2H)}), \quad n \geq 3. \quad (6.17)$$

$\eta = \Delta\tau$ とし (6.15), (6.16), (6.17) 式を (6.12) 式に代入すると以下のような差分方程式が得られる。

$$f(x, \tau + \Delta\tau) - f(x, \tau) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) \Delta\tau + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) (\Delta\tau)^{2H} + o((\Delta\tau)^{\min(1, 2H)}). \quad (6.18)$$

6.14 式の証明

(5.2) 式の両辺を $X_H(\tau)$ で割る。

$$\frac{dX_H(\tau)}{X_H(\tau)} = \mu d\tau + \sigma db_H(\tau). \quad (6.19)$$

(6.19) 式の左辺は

$$\frac{dX_H(\tau)}{X_H(\tau)} = d \log X_H(\tau), \quad (6.20)$$

と書き換えることができる。伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d \log X_H(\tau) &= \frac{d}{dx} \log x |_{x=X_H(\tau)} dX(\tau) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \log x |_{x=X_H(\tau)} d\langle X_H(s), X_H(s) \rangle_\tau \\ &= \frac{1}{X_H(\tau)} dX_H(\tau) - \frac{1}{2} \frac{1}{X_H(\tau)^2} \sigma^2 X_H(\tau)^2 d\tau^{2H} \\ &= \frac{1}{X_H(\tau)} (\mu X_H(\tau) d\tau + \sigma X_H(\tau) db_H(\tau)) - \frac{1}{2} \sigma^2 d\tau^{2H} \\ &= \mu d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 d\tau^{2H} + \sigma db_H(\tau), \end{aligned} \quad (6.21)$$

となることが導かれるので (6.19) 式は

$$dX_H(\tau) = \mu X_H(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 X_H(\tau) d\tau^{2H} + \sigma X_H(\tau) db_H(\tau), \quad (6.22)$$

となり (6.14) 式になることが示された。□

(6.1) 式の導出

(6.18) 式の両辺を $\Delta\tau$ で割り $\Delta\tau \rightarrow 0$ の極限をとる.

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau + \Delta\tau) - f(x, \tau)}{\Delta\tau} = -\mu \frac{\partial}{\partial \tau} x f(x, \tau) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) (\Delta\tau)^{2H-1}. \quad (6.23)$$

(6.23) 式の右辺第 2 項

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) (\Delta\tau)^{2H-1} = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(x, \tau) (\Delta\tau)^{2H-1}, \quad (6.24)$$

において

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(x, \tau) (\Delta\tau)^{2H-1} &= f(x, \tau) (d\tau)^{2H-1} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau f(x, \tau') (d\tau')^{2H} \\ &= 2H(2H-1) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') \right) d\tau', \end{aligned} \quad (6.25)$$

となる [4]. したがって (6.23) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} f(x, \tau) &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \times 2H(2H-1) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') \right) d\tau' \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + H(2H-1) \sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') \right) d\tau'. \end{aligned} \quad (6.26)$$

さらに (6.26) 式のラプラス変換をとる.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} f(x, \tau) d\tau = [e^{-k\tau} f(x, \tau)]_{\tau=0}^\infty + k \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\ &= -f(x, 0) + k \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\ &= -f(x, 0) + k \hat{f}(x, k), \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺第 1 項} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) \right) d\tau = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k), \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺第 2 項} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right) d\tau \\
&= H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right) d\tau \\
&= H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \times \left[e^{-k\tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right]_{\tau=0}^\infty \\
&\quad + H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \times k \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right) d\tau. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$= H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right) d\tau. \tag{6.30}$$

ここで (6.29) 式第 1 項が確率密度関数 $f(x, \tau)$ が $\tau \rightarrow \infty$ のとき 0 になることを認めれば,

$$\left[e^{-k\tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{2H-2} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right]_{\tau=0}^\infty = 0, \tag{6.31}$$

となることを用いた. また, ラプラス変換の性質

$$\int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^{\tau'} g(\tau - \tau') h(\tau') d\tau' \right) d\tau = \hat{g}(k) \hat{h}(k), \tag{6.32}$$

により

$$g(\tau - \tau') \rightarrow (\tau - \tau')^{2H-2}, \tag{6.33}$$

$$h(\tau') \rightarrow \int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'', \tag{6.34}$$

とすれば $\hat{g}(k), \hat{h}(k)$ は

$$\begin{aligned}
\hat{g}(k) &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \tau^{2H-2} d\tau = \int_0^\infty e^{-\tilde{\tau}} \left(\frac{\tilde{\tau}}{k} \right)^{2H-2} \frac{d\tilde{\tau}}{k} \\
&= k^{1-2H} \int_0^\infty e^{-\tilde{\tau}} \tilde{\tau}^{2H-2} d\tilde{\tau} \\
&= k^{1-2H} \Gamma(2H-1), \tag{6.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(k) &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau \\
&= \left[-\frac{1}{k} e^{-k\tau} \int_0^\tau f(x, \tau'') d\tau'' \right]_{\tau=0}^\infty + \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \tag{6.36}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \hat{f}(x, k), \tag{6.37}$$

となる。ただし (6.36) 式第 1 項は (6.31) 式と同様に $f(x, \tau)$ が $\tau \rightarrow \infty$ のとき 0 になることを認めた。このことから (6.30) 式は

$$\begin{aligned} & H(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k \times k^{1-2H} \Gamma(2H-1) \times \frac{1}{k} \hat{f}(x, k) \\ &= H(2H-1)\Gamma(2H-1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k^{1-2H} \hat{f}(x, k) \\ &= H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k^{1-2H} \hat{f}(x, k), \end{aligned} \quad (6.38)$$

となり右辺第 2 項が求められた。したがって (6.27), (6.28), (6.38) 式をまとめると以下のようになる。

$$k\hat{f}(x, k) - f(x, 0) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k) + H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k^{1-2H} \hat{f}(x, k). \quad (6.39)$$

(6.39) 式において $k \rightarrow k^\alpha$ と変数変換を行う。

$$k^\alpha \hat{f}(x, k^\alpha) - f(x, 0) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k^\alpha) + H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k^{\alpha(1-2H)} \hat{f}(x, k^\alpha). \quad (6.40)$$

(6.40) 式に (6.11) 式を用いる。

$$k\hat{p}(x, k) - p(x, 0) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x k^{1-\alpha} \hat{p}(x, k) + H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) k^{1-2H\alpha} \hat{p}(x, k). \quad (6.41)$$

(6.41) 式を逆ラプラス変換すると

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) \right] + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right], \quad (6.42)$$

となり $1 < 2H < 2 \iff 1/2 < H < 1$ における非整数 Fokker-Planck 方程式が導出される。

また $H = 1/2$ のとき (6.23) 式は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau + \Delta\tau) - f(x, \tau)}{\Delta\tau} &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) \\ &\iff \frac{\partial}{\partial \tau} f(x, \tau) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau), \end{aligned} \quad (6.43)$$

となる。 $1 < 2H < 2$ のときと同様に, (6.44) 式の両辺をラプラス変換する。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} f(x, \tau) d\tau = [e^{-k\tau} f(x, \tau)]_{\tau=0}^\infty + k \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\ &= -f(x, 0) + k\hat{f}(x, k), \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) \right) d\tau + \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) \right) d\tau \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \hat{f}(x, k), \end{aligned} \quad (6.45)$$

であることから (6.44) 式のラプラス変換は

$$k\hat{f}(x, k) - f(x, 0) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \hat{f}(x, k), \quad (6.46)$$

で与えられる. これは (6.39) 式において $H = 1/2 \iff 2H = 1$ としたときに等しい. すなわち (6.40), (6.41) 式は $2H = 1$ でも成立する. このことから (6.42) 式は $1 \leq 2H < 2 \iff 1/2 \leq H < 1$ で成立し, (6.1) 式の導出ができた.

6.1.1 (7.2) 式の導出

(6.18) 式の両辺を $(\Delta\tau)^{2H}$ で割り $\Delta\tau \rightarrow 0$ の極限をとる.

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau + \Delta\tau) - f(x, \tau)}{(\Delta\tau)^{2H}} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) (\Delta\tau)^{1-2H} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau). \quad (6.47)$$

ここで (6.47) 式左辺は以下のようになる [4].

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, \tau + \Delta\tau) - f(x, \tau)}{(\Delta\tau)^{2H}} = \frac{1}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau'. \quad (6.48)$$

また (6.47) 式右辺第 1 項の極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [f(x, \tau) (\Delta\tau)^{1-2H}] &= f(x, \tau) (d\tau)^{1-2H} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau f(x, \tau') (d\tau')^{2-2H} \\ &= (2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau', \end{aligned} \quad (6.49)$$

で与えられる [4]. よって (6.47) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \\ &= -\mu (2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau). \end{aligned} \quad (6.50)$$

(6.50) 式について $1 < 2H < 2$ のときと同様に両辺のラプラス変換をとる. ただし (6.51), (6.53) 式ではラプラス変換の性質 (6.32) 式を用いた.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\frac{1}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \left[e^{-k\tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \right]_{\tau=0}^\infty \\
&\quad + \frac{k}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \right) d\tau \\
&= \frac{k}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} f(x, \tau') d\tau' \right) d\tau \\
&= \frac{k}{\Gamma(1+2H)\Gamma(1-2H)} \times k^{2H-1} \Gamma(1-2H) \hat{f}(x, k) \tag{6.51}
\end{aligned}$$

$$= \frac{k^{2H} \hat{f}(x, k)}{\Gamma(1+2H)}, \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺第1項} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left\{ -\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right\} d\tau \\
&= -\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \int_0^\infty e^{-k\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right\} d\tau \\
&= -\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \left[e^{-k\tau} \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right]_{\tau=0}^\infty \\
&\quad + k\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \int_0^\infty e^{-k\tau} \left\{ \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right\} d\tau \\
&= k\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \int_0^\infty e^{-k\tau} \left\{ \int_0^\tau (\tau - \tau')^{-2H} \left(\int_0^{\tau'} f(x, \tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right\} d\tau \\
&= k\mu(2H-2)(1-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \times k^{2H-1} \Gamma(1-2H) \times \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\int_0^\tau f(x, \tau') d\tau' \right) d\tau \\
&= k^{2H} \mu(2H-2) \Gamma(2-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \left[-\frac{e^{-k\tau}}{k} \int_0^\tau f(x, \tau') d\tau' \right]_{\tau=0}^\infty \\
&\quad + k^{2H} \mu(2H-2) \Gamma(2-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \tag{6.53}
\end{aligned}$$

$$= k^{2H-1} \mu(2H-2) \Gamma(2-2H) \frac{\partial}{\partial x} x \hat{f}(x, k), \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺第2項} &= \int_0^\infty e^{-k\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) f(x, \tau) \right) d\tau \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \int_0^\infty e^{-k\tau} f(x, \tau) d\tau \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) \hat{f}(x, k). \tag{6.55}
\end{aligned}$$

以上のことから (6.50) 式のラプラス変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{k^{2H}\hat{f}(x,k)}{\Gamma(1+2H)} &= k^{2H-1}\mu(2H-2)\Gamma(2-2H)\frac{\partial}{\partial x}xf(x,k) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)\hat{f}(x,k) \\ \iff \frac{k^{2H}\hat{f}(x,k)}{\Gamma(1+2H)} &= -\Gamma(3-2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xk^{2H-1}\hat{f}(x,k) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)\hat{f}(x,k).\end{aligned}\quad (6.56)$$

$k \rightarrow k^\alpha$ の変数変換をおこなう.

$$\begin{aligned}\frac{k^{2H\alpha}\hat{f}(x,k^\alpha)}{\Gamma(1+2H)} &= -\Gamma(3-2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xk^{2H\alpha-\alpha}\hat{f}(x,k^\alpha) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)\hat{f}(x,k^\alpha) \\ \iff \frac{k \times k^{\alpha-1}\hat{f}(x,k^\alpha) \times k^{2H\alpha-\alpha}}{\Gamma(1+2H)} &= -\Gamma(3-2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xk^{2H\alpha-\alpha}\hat{f}(x,k^\alpha) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)\hat{f}(x,k^\alpha).\end{aligned}\quad (6.57)$$

(6.11) 式より (6.57) 式は $\hat{p}(x,k)$ についての偏微分方程式

$$\frac{k\hat{p}(x,k) - p(x,0)}{\Gamma(1+2H)} = -\Gamma(3-2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xk^{1-\alpha}\hat{p}(x,k) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)k^{1-2H\alpha}\hat{p}(x,k^\alpha), \quad (6.58)$$

となる. (6.58) 式を逆ラプラス変換すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\Gamma(3-2H)\Gamma(1+2H)\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) \right] + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 \right) p(x,t) \right], \quad (6.59)$$

のようになり (6.2) 式の導出ができた.

6.2 $H = 1/2$ における非整数 Fokker-Planck 方程式

(6.1), (6.2) 式において $H = 1/2$ をそれぞれ代入すると以下のように一致する [4].

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) \right] \\ &\quad + {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[\frac{1}{2}\Gamma(1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 \right) p(x,t) \right] \\ &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 \right) p(x,t) \right],\end{aligned}\quad (6.60)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\Gamma(3-1)\Gamma(1+1)\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) \right] \\ &\quad + {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[\frac{1}{2}\Gamma(1)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 \right) p(x,t) \right] \\ &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu\frac{\partial}{\partial x}xp(x,t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 \right) p(x,t) \right],\end{aligned}\quad (6.61)$$

6.3 $H = 1/2$, $\alpha \rightarrow 1$ の極限における非整数 Fokker-Planck 方程式

複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ の平均 2 乗変位 $\langle X_{\alpha,H}(t)^2 \rangle$ は

$$\langle X_{\alpha,H}(t)^2 \rangle \propto t^{2\alpha H}, \quad (6.62)$$

と時間 t の $2\alpha H$ 乗に比例する [4]. このとき $H = 1/2$, $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとると

$$\langle X_{\alpha,H}(t)^2 \rangle \propto t, \quad (6.63)$$

平均 2 乗変位が時間 t に比例する. これは, 複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha,H}(t)$ が $H = 1/2$, $\alpha \rightarrow 1$ の極限で幾何ブラウン運動 $X(t)$ になることを示している. したがって非整数 Fokker-Planck 方程式において $H = 1/2$, $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとると, 幾何ブラウン運動の確率密度関数が満たす Fokker-Planck 方程式に一致する. 確認のため [4] に基づき $H = 1/2$, $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとったとき非整数 Fokker-Planck 方程式が幾何ブラウン運動の確率密度関数 $p_g(x, t)$ が満たす Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p_g(x, t)}{\partial t} = -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} x p_g(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 p_g(x, t), \quad (6.64)$$

になることを示す.

$H = 1/2$ のとき非整数 Fokker-Planck 方程式は一致し

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right], \quad (6.65)$$

となることが (6.60), (6.61) 式で示された. この (6.65) 式の右辺において $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとる.

$$\begin{aligned} & {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right] \\ & \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1} {}_0\mathbf{D}_t^0 \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \right] = -\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t). \end{aligned} \quad (6.66)$$

よって (6.65) 式で $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとると以下のような偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x, t) \\ &= -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 p(x, t). \end{aligned} \quad (6.67)$$

これは幾何ブラウン運動 $X(t)$ の確率密度関数 $p_g(x, t)$ が満たす Fokker-Planck 方程式 (6.64) 式と一致する.

7 κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解

7.1 κ の導入

改めて, 非整数 Fokker-Planck 方程式は

$1/2 \leq H < 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial x} xp(x,t) \right] \\ &\quad + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x,t) \right], \end{aligned} \quad (7.1)$$

$0 < H \leq 1/2$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\Gamma(3-2H)\Gamma(1+2H)\mu \frac{\partial}{\partial x} xp(x,t) \right] \\ &\quad + {}_0\mathbf{D}_t^{1-2H\alpha} \left[H\Gamma(2H)\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) p(x,t) \right], \end{aligned} \quad (7.2)$$

で与えられた. さらに, このとき $H = 1/2$ とすると (7.1), (7.2) 式は一致し

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial x} xp(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 p(x,t) \right], \quad (7.3)$$

という式に変形できることを (6.60), (6.61) 式で確かめた. ただし $\alpha \in (0, 1)$ である. そこで $p(x, t) = X(x)T(t)$ と確率密度関数 $p(x, t)$ を位置 x の関数 $X(x)$ と時刻 t の関数 $T(t)$ の積と考える. すると (7.3) 式は以下のようなになる.

$$X(x) \frac{dT(t)}{dt} = \left(-\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x \frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2 \frac{d^2X(x)}{dx^2} \right) {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]. \quad (7.4)$$

(7.4) 式の導出

(7.3) 式の両辺に $p(x, t) = X(x)T(t)$ を代入する. まず左辺を考える.

$$\text{左辺} = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial X(x)T(t)}{\partial t} = X(x) \frac{dT(t)}{dt} \quad (7.5)$$

一方, 右辺は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial x} xp(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 p(x,t) \right] \\ &= {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \left[-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial x} xX(x)T(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 X(x)T(t) \right] \\ &= \left(-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial x} xX(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 X(x) \right) {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

ここで (7.6) 式の $X(x)$ に関する部分が

$$\begin{aligned}
& -\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial}{\partial x}xX(x) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2X(x) \\
&= -\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(X(x) + x\frac{dX(x)}{dx}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(2X(x) + 4x\frac{dX(x)}{dx} + x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right) \\
&= -\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}, \tag{7.7}
\end{aligned}$$

となることに注意すれば (7.6) 式は

$$\left(-\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right) {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)], \tag{7.8}$$

で与えられる. したがって (7.5), (7.6) 式により (7.4) 式が得られる.

さて, (7.4) 式の両辺を $X(x){}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]$ で割ると

$$\frac{1}{{}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\left(-\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right), \tag{7.9}$$

という式が得られる. (7.9) 式の左辺は t のみ, 右辺は x のみで記述されているため両辺が等号で結ばれるには, それぞれ定数でなければならない. いまその定数を $-\kappa$ とおくと

$$\frac{1}{{}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]}\frac{dT(t)}{dt} = -\kappa \iff \kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)] - \frac{dT(t)}{dt} = 0, \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{X(x)}\left(-\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right) = -\kappa \\
& \iff -\left(\mu - \frac{3}{2}\sigma^2 - \kappa\right)X(x) - \left(\mu - \frac{5}{2}\sigma^2\right)x\frac{dX(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0, \tag{7.11}
\end{aligned}$$

というそれぞれの変数についての微分方程式に分けることができる. このことから, 微分方程式 (7.10), (7.11) 式の解を求め, その積をとることで κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x, t)$ を求めることができる.

7.2 κ を固定したときの t についての微分方程式の解 $T_\kappa(t)$

非整数微積分作用素の性質 [1] を用いて

$${}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)] = {}_0\mathbf{D}_t^{-\alpha}\frac{d}{dt}[T(t)] = {}_0\mathbf{D}_t^{-\alpha}\left[\frac{dT(t)}{dt}\right], \tag{7.12}$$

と書き換えられるため (7.10) 式は以下ようになる.

$$\kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{-\alpha}\left[\frac{dT(t)}{dt}\right] - \frac{dT(t)}{dt} = 0. \tag{7.13}$$

(7.13) 式の両辺に ${}_0\mathbf{D}_t^\alpha$ を作用させる. 左辺が

$$\begin{aligned}
{}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{-\alpha} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] \right] - {}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] &= \kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^\alpha {}_0\mathbf{D}_t^{-\alpha} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] - {}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] \\
&= \kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-\alpha} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] - {}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] \\
&= \kappa \times \frac{dT(t)}{dt} - {}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right], \tag{7.14}
\end{aligned}$$

のようになることから (7.13) 式は次のような微分方程式に書き換えることができる。

$${}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] - \kappa \frac{dT(t)}{dt} = 0. \tag{7.15}$$

この $T(t)$ に関する微分方程式 (7.15) 式を解くと

$$T(t) = \kappa T(0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa\tau^\alpha) d\tau + T(0), \quad T(0): \text{初期時刻}, \tag{7.16}$$

となる。ただし $E_{\alpha,\alpha}(\kappa\tau^\alpha)$ は (2.2) 式で定義される 2 変数の Mittag-Leffler 関数である。

7.2.1 非整数微積分方程式の解法

(7.16) 式の導出に必要な非整数微積分方程式の解法を [1] に基づき以下に示す。

β は定数, n は $n-1 < \alpha < n$ を満たす整数とする。非整数微積分方程式

$${}_0\mathbf{D}_t^\alpha [y(t)] - \beta y(t) = h(t), \quad (t > 0), \tag{7.17}$$

$${}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-k} [y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{7.18}$$

を考える。(7.17) 式をラプラス変換すると次のようになる。ただし $Y(s)$ は $y(t)$ をラプラス変換したものである。

$$s^\alpha Y(s) - \beta Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1} \iff Y(s) = \frac{H(s)}{s^\alpha - \beta} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \beta}. \tag{7.19}$$

(7.19) 式を逆ラプラス変換することで,

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\beta t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\beta(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau, \tag{7.20}$$

となり非整数微積分方程式 (7.17) の解を求めることができる。

(7.20) 式の証明

(2.18) 式において $k = 1, a - b = k - 1 \iff b = a - k + 1, a = \alpha$ としたとき

$$\frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \beta} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\beta t^\alpha) dt, \quad (7.21)$$

となることから $\frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \beta}$ は $t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\beta t^\alpha)$ をラプラス変換したものになる. 逆に $\frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \beta}$ を逆ラプラス変換すれば $t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\beta t^\alpha)$ が得られる. したがって (7.19) 式の右辺第 2 項が

$$\sum_{k=0}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \beta} \xrightarrow{\text{逆ラプラス変換}} \sum_{k=0}^n b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\beta t^\alpha), \quad (7.22)$$

のように逆ラプラス変換される. また (2.18) 式において $k = 0, a - b = 0 \iff a = b, a = \alpha$ としたとき

$$\frac{1}{s^\alpha - \beta} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\beta t^\alpha) dt, \quad (7.23)$$

となることから $\frac{1}{s^\alpha - \beta}$ は $t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\beta t^\alpha)$ をラプラス変換したものになる. 先と同様に考えれば $\frac{1}{s^\alpha - \beta}$ を逆ラプラス変換すれば $t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\beta t^\alpha)$ が得られる. よって (7.19) 式右辺第 1 項が

$$H(s) \times \frac{1}{s^\alpha - \beta} \xrightarrow{\text{逆ラプラス変換}} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\beta(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau, \quad (7.24)$$

となることが導かれる. ただし (7.24) 式においてラプラス変換の性質 (6.32) 式を用いた. \square

(7.16) 式の導出

(7.15) 式を改めて考える.

$${}_0\mathbf{D}_t^\alpha \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] - \kappa \frac{dT(t)}{dt} = 0. \quad (7.25)$$

これは先に述べた非整数微積分方程式 (7.17) 式において

$$y(t) \rightarrow \frac{dT(t)}{dt}, \quad \beta \rightarrow \kappa, \quad h(t) \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 1 \rightarrow n = 1, \quad (7.26)$$

としたときに対応している. したがって, 非整数微積分方程式 (7.25) 式の解は

$$\frac{dT(t)}{dt} = b_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\kappa t^\alpha), \quad (7.27)$$

となる. ここで

$$b_1 = {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] \Big|_{t=0}, \quad (7.28)$$

であるが (7.10) 式が

$$\begin{aligned}
\kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)] - \frac{dT(t)}{dt} = 0 &\iff {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} [\kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^{1-\alpha}[T(t)]] - {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] = 0 \\
&\iff \kappa \times {}_0\mathbf{D}_t^0[T(t)] - {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] = 0 \\
&\iff \kappa T(t) - {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{7.29}$$

のように式変形できることから b_1 は

$$b_1 = {}_0\mathbf{D}_t^{\alpha-1} \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] \Big|_{t=0} = \kappa T(t) \Big|_{t=0} = \kappa T(0), \tag{7.30}$$

となる。ゆえに (7.27) 式が

$$\frac{dT(t)}{dt} = \kappa T(0) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa t^\alpha), \tag{7.31}$$

となることが示された。さらに、両辺をそれぞれ t で積分する。

$$T(t) = \kappa T(0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa \tau^\alpha) d\tau + C_1, \quad C_1: \text{積分定数}, \tag{7.32}$$

これに $t=0$ を代入することで

$$\begin{aligned}
T(0) &= \kappa T(0) \int_0^0 \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa \tau^\alpha) d\tau + C_1 \\
&= C_1,
\end{aligned} \tag{7.33}$$

と積分定数 C_1 が $T(0)$ と等しくなる。したがって

$$T(t) = \kappa T(0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa \tau^\alpha) d\tau + T(0), \tag{7.34}$$

となり (7.16) 式が得られた。□

ここで (7.16) 式の積分を行う。(2.2) 式の定義を用いれば、

$$\begin{aligned}
\kappa T(0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\kappa \tau^\alpha) d\tau + T(0) &= \kappa T(0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\kappa \tau^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} d\tau + T(0) \\
&= \kappa T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\kappa^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha(k+1)-1} d\tau + T(0) \\
&= \kappa T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\kappa^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \left[\frac{\tau^{\alpha(k+1)}}{\alpha(k+1)} \right]_{\tau=0}^t + T(0) \\
&= \kappa T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\kappa^k t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k + \alpha) \times \alpha(k+1)} + T(0) \\
&= \kappa t^\alpha T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\kappa t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} + T(0) \\
&= \kappa t^\alpha T(0) E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa t^\alpha) + T(0) \\
&= T(0) (1 + \kappa t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa t^\alpha)).
\end{aligned} \tag{7.35}$$

さらに (2.16) 式より

$$E_{\alpha,1}(\kappa t^\alpha) = E_\alpha(\kappa t^\alpha) = 1 + \kappa t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa t^\alpha), \quad (7.36)$$

の関係式が成り立つのでこれを (7.35) 式に代入すれば (7.16) 式を次式のように 1 変数 Mittag-Leffler 関数で記述することができる.

$$T(t) = T(0) (1 + E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa t^\alpha)) = T(0) E_\alpha(\kappa t^\alpha), \quad (7.37)$$

ここで, 初期時刻 $T(0)$ であるが κ に依存している可能性がある. よって $T(0) = T(0, \kappa)$ と κ の関数とおき以下のように κ を固定したときの時間 t についての微分方程式の解 $T_\kappa(t)$ を定義する.

$$T_\kappa(t) := T(0, \kappa) E_\alpha(\kappa t^\alpha) \quad (7.38)$$

7.3 κ を固定したときの x についての微分方程式の解 $X_\kappa(x)$

κ を固定したときの x に関する微分方程式 (7.11) 式の解 $X_\kappa(x)$ は以下ようになる.

$$X_\kappa(x) = C_2(\kappa) x^{\frac{\mu-2\sigma^2-\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}} + C_3(\kappa) x^{\frac{\mu-2\sigma^2+\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}}, \quad (7.39)$$

ただし $C_2(\kappa), C_3(\kappa)$ は任意の κ の関数とする.

(7.39) 式の証明

(7.39) 式を以下のように略記する.

$$X_\kappa(x) = C_\mp(\kappa) x^{\frac{\mu-2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}}, \quad (7.40)$$

とおく. $C_-(\kappa)$ は (7.39) 式の右辺第 1 項, $C_+(\kappa)$ は (7.39) 式の右辺第 2 項に対応しているとする. (7.40) 式が微分方程式 (7.11) 式を満たすことを示せばよい.

(7.40) 式を 1 回微分する.

$$\frac{d}{dx} X_\kappa(x) = \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) C_\mp(\kappa) x^{\frac{\mu-2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2} - 1}. \quad (7.41)$$

(7.40) 式を 2 回微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} X_\kappa(x) &= \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) \\ &\times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 1 \right) C_\mp(\kappa) x^{\frac{\mu-2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2} - 2}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

(7.41), (7.42) 式を (7.11) 式の左辺

$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \left(\frac{5}{2} \sigma^2 - \mu \right) x \frac{d}{dx} X(x) + \left(\kappa + \frac{3}{2} \sigma^2 - \mu \right) X(x), \quad (7.43)$$

に代入する.

$$\begin{aligned}
(\text{第1項}) &= \frac{\sigma^2}{2} x^2 \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 1 \right) C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 1 \right) C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}}, \quad (7.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{第2項}) &= \left(\frac{5}{2}\sigma^2 - \mu \right) x \\
&\quad \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 1} \\
&= \left(\frac{5}{2}\sigma^2 - \mu \right) \times \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}}, \quad (7.45)
\end{aligned}$$

$$(\text{第3項}) = \left(\kappa + \frac{3}{2}\sigma^2 - \mu \right) C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}}, \quad (7.46)$$

となるので, まとめると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{5}{2}\sigma^2 - \mu \right) \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) + \left(\kappa + \frac{3}{2}\sigma^2 - \mu \right) \right\} \times C_{\mp}(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}}. \quad (7.47)
\end{aligned}$$

(7.47) 式の波括弧 $\{\dots\}$ で囲まれた部分についてももう少し詳しく計算を行う.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{5}{2}\sigma^2 - \mu \right) \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) + \left(\kappa + \frac{3}{2}\sigma^2 - \mu \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right)^2 \\
&\quad + (2\sigma^2 - \mu) \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) + \left(\kappa + \frac{3}{2}\sigma^2 - \mu \right). \quad (7.48)
\end{aligned}$$

(7.48) 式を $\sigma^2/2$ でくくる.

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - 2 \left(\frac{\mu - 2\sigma^2}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2\kappa + 3\sigma^2 - 2\mu}{\sigma^2} \right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left[\left\{ \left(\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right) - \left(\frac{\mu - 2\sigma^2}{\sigma^2} \right) \right\}^2 - \left(\frac{\mu - 2\sigma^2}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2\kappa + 3\sigma^2 - 2\mu}{\sigma^2} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left[\left(\mp \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2} \right)^2 - \frac{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}{\sigma^4} \right] \\
&= 0, \tag{7.49}
\end{aligned}$$

となる. したがって (7.43) 式は

$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{d^2}{dx^2} X_\kappa(x) + \left(\frac{5}{2} \sigma^2 - \mu \right) x \frac{d}{dx} X_\kappa(x) + \left(\kappa + \frac{3}{2} \sigma^2 - \mu \right) X_\kappa(x) = 0, \tag{7.50}$$

となり $C_\mp(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 \mp \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}}$ が (7.11) の解であることが示された. \square

7.4 $H = 1/2$ における κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x, t)$

時間 t に関する微分方程式の解 $T_\kappa(t)$ と位置 x に関する微分方程式 $X_\kappa(x)$ が求められた. したがって κ を固定したときの非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x, t)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
w_\kappa(x, t) &= X_\kappa(x) T_\kappa(t) \\
&= C_2(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0, \kappa) E_\alpha(\kappa t^\alpha) \\
&\quad + C_3(\kappa) x^{\frac{\mu - 2\sigma^2 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 - 2\kappa\sigma^2 + \sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0, \kappa) E_\alpha(\kappa t^\alpha) \tag{7.51}
\end{aligned}$$

ただし $C_2(\kappa), C_3(\kappa), T(0, \kappa)$ は任意の κ の関数.

8 結果

- 確率微分方程式

$$dX_H(\tau) = \mu X_H(\tau)d\tau + \sigma X_H(\tau)db_H(\tau), \quad b_H(\tau): \text{変形非整数ブラウン運動},$$

で定義された拡散過程 $X_H(\tau)$ に対し時間 τ を $1/\alpha$ 安定 subordinator $S_\alpha(t)$ に変更することで2つのパラメーター α, H で記述される拡散過程 $X_{\alpha, H}(t)$ を得た. それを複合拡散幾何ブラウン運動と定義した.

- 複合拡散幾何ブラウン運動 $X_{\alpha, H}(t)$ の確率密度関数が満たす Fokker-Planck 方程式は2つの Riemann-Liouville 非整数微積分作用素で記述され, それぞれの次数は $1 - \alpha, 1 - 2\alpha H$ である.
- $H = 1/2$ のとき非整数 Fokker-Planck 方程式の R-L 型非整数微積分作用素の次数が $1 - \alpha$ で一致し, 変数分離型の偏微分方程式になる. この方程式に, 定数 κ を導入することで位置 x と時間 t それぞれの微分方程式を解くことができる. このとき, 時間 t に関する微分方程式の解 $T_\kappa(t)$ は Mittag-Leffler 関数で記述される.
- 位置 x と時間 t の微分方程式の解 $X_\kappa(x), T_\kappa(t)$ の積をとることで κ を固定したときの $H = 1/2$ における非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $w_\kappa(x, t)$ を導出した. しかし κ についての重ね合わせができず, 非整数 Fokker-Planck 方程式を満たす確率密度関数 $p(x, t)$ を導出できなかった.

9 課題

κ を固定したとき, 非整数 Fokker-Planck 方程式の解が

$$\begin{aligned} w_\kappa(x, t) &= X_\kappa(x)T_\kappa(t) \\ &= C_2(\kappa)x^{\frac{\mu-2\sigma^2-\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0, \kappa)E_\alpha(\kappa t^\alpha) \\ &\quad + C_3(\kappa)x^{\frac{\mu-2\sigma^2+\sqrt{\mu^2-2\mu\sigma^2-2\kappa\sigma^2+\sigma^4}}{\sigma^2}} \times T(0, \kappa)E_\alpha(\kappa t^\alpha) \end{aligned}$$

となることを7章で求めた. この解 $w_\kappa(x, t)$ を κ について重ね合わせることで $H = 1/2$ のときの非整数 Fokker-Planck 方程式を満たす確率密度関数 $p(x, t)$ が得られる. しかし, κ が連続的か離散的かということが不明であり重ね合わせることができなかった. さらに, 仮に κ が連続的あるいは離散的ということが分かっても κ の関数 $C_2(\kappa), C_3(\kappa), T(0, \kappa)$ が決まっていないので $w_\kappa(x, t)$ を重ね合わせることは容易ではない. これら $C_2(\kappa), C_3(\kappa), T(0, \kappa)$ を求めること, ならびに $w_\kappa(x, t)$ の重ね合わせを行い非整数 Fokker-Planck 方程式の解 $p(x, t)$ を求めることが今後の課題である.

参考文献

- [1] Igor Podlubny: Fractional Differential Equations, Academic press(1999)
- [2] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, Mat. sb., vol. 3, 1868, pp. 1-68 (in Russian)
- [3] Rudolf Gorenflo, Anatoly A. Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin :Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer
- [4] Jin-Rong Liang, Jun Wang, Long-Jin Lu, Hui Gu, Wei-Yuan Qiu, Fu-Yao Ren: Fractional Fokker-Planck Equation and Black-Sholes Formula in Composite-Diffusive Regime. J,Stat.Phys. **146**,205-216(2012)
- [5] Marcin Magdziartz, Aleksander Weron: Fractional Fokker-Planck dynamics: Stochastic representation and computer simulation. Phys. Rev. E **75**, 016708(2007)
- [6] Steven P. Lalley: Lévy processes, stable processes, and subordinators, <http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/385/>
- [7] Aleksander Weron, Krzysztof Burnecki: Complete description of self-similar models driven by Lévy stable noise. Phy. Rev. E, **71**, 016113(2005)