

2020年度修士論文

Master Thesis, 2021

数分散の厳密表式に基づく
超一様行列式点過程の研究

Exact Expressions of Number Variances
and Hyperuniformity of Determinantal Point Processes

2021年2月26日

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻
博士課程前期課程

Department of Physics, Graduate School of Science
and Engineering, Chuo University

松井 貴都

Takato Matsui

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々のご協力を頂きました。ここに感謝の意を述べさせていただきます。

香取眞理先生には、学部4年からの3年間様々な研究テーマに触れる機会を与えてくださっただけでなく、研究の方向性や研究発表、論文執筆等、あらゆる事に親身になってご指導していただきました。今年度は新型コロナウイルスの流行により研究にも少なからず支障がありましたが、何度も励ましのお言葉をいただきました。深く感謝申し上げます。

田口善弘先生、脇田順一先生には、ご多忙の中本修士論文の副査を引き受けていただきました。感謝申し上げます。また、脇田先生には、1年間という短い期間ではございましたが、学部4年次にパターン形成物理学研究室のメンバーとして迎え入れていただき、研究、進路について多くのご指導、ご助言をいただきました。深く感謝申し上げます。

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所の白井朋之先生には、共同研究を通じて多くの有益な助言をいただきました。深く感謝申し上げます。

同専攻の助教である Andraus Sergio 先生、日本学術振興会特別研究員の越田真史氏、研究室のメンバーには何度もご助力をいただきました。感謝申し上げます。

最後に、日々の生活を支えてくださった家族に心から感謝申し上げます。

目次

第 1 章	はじめに	7
第 2 章	数分散の厳密表式と主定理	15
第 3 章	相関関数と分散	19
3.1	相関関数と分散の一般式	19
3.2	Bessel 関数	22
第 4 章	数分散	25
4.1	一般式	25
4.2	行列式点過程	27
4.3	Heisenberg 点過程族	28
第 5 章	Ginibre 点過程の数分散と超一様性 (命題 2.1 の証明)	31
5.1	$\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ の厳密表式 (2.1) の導出	31
5.2	$\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ 漸近挙動の導出 ((2.3) の証明)	33
第 6 章	\mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程の数分散と超一様性 (命題 2.2 の証明)	35
6.1	$\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]$ の厳密表式 (2.4) の導出	35
6.2	$\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]$ の漸近挙動の導出 ((2.5) の証明)	38
第 7 章	\mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族の数分散と超一様性	39
7.1	定理 2.3 の (2.6) の証明	39
7.2	命題 2.4 の (2.7) の証明	41
7.3	定理 2.5 の証明	42
7.4	命題 2.6 の (2.12) の証明	44
付録 A	Heisenberg 点過程族の表現論	47

第1章 はじめに

多粒子系の密度ゆらぎ (分散) に対する定量的評価は, 基礎的かつ重要な問題である. 結晶, 気体, 流体等の多粒子系において, 物質の密度のゆらぎが重要な情報を含んでいることは, 統計物理学, 物性物理学において既によく知られている. 生物学においては, 生きた細胞内の構造のフラクタル性の解明に, 密度ゆらぎの定量化が利用されてきた. 構造的なゆらぎは, ガラス形成のダイナミクスの解析において重要な役割を果たしている. 銀河の密度ゆらぎの測定は, 宇宙の大規模構造を研究するために利用されている. 密度ゆらぎの知識は, 振動する粒状媒体の構造や集団行動の研究に用いられている [13].

超一様性 (hyperuniformity) とは, 「点や粒子の配置に対する局所的な点の個数の分散を特徴づける概念」である. Torquato により 2003 年に提唱された [15]. 結晶, 準結晶, 特殊な無秩序点過程等を定量的に分類し, 構造的に特徴づけるための統一的な手段を提供することができる. 材料工学あるいは凝縮系物理学において盛んに研究が行われ, 現在では様々な分野で超一様性との関連が報告されている.

本修士論文では, 数理モデルを導入し, 統計力学的・確率論的観点から超一様性を研究した結果を報告する. d 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ あるいは D 次元複素空間 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ を基本空間 S とし, $\lambda(dx)$, $x \in S$ を参照測度 (reference measure) として与える. この S 上に無限点過程 (infinite point process) Ξ を考える.¹ この無限点過程は, ランダムな点 X_i , $i \in \mathbb{N}$ の無限集合のデルタ測度の和

$$\Xi = \sum_{i:i \in \mathbb{N}} \delta_{X_i} \quad (1.1)$$

として表される. デルタ測度 $\delta_X(\{x\})$ は, $x = X$ ならば 1 を, それ以外では 0 を与える. したがって, 領域 $\Lambda \subset S$ に入る点の数は

$$\Xi(\Lambda) := \int_{\Lambda} \Xi(dx) = \sum_{i:X_i \in \Lambda} 1$$

与えられる. ここで, すべての有界な領域 $\Lambda \subset S$ に対して $\Xi(\Lambda) < \infty$ を仮定する. この仮定は, 点が局所的に集積することがなく, 参照測度 $\lambda(dx)$ に対して, 点過程は有限の密度 $\rho_1(x) < \infty$, $x \in S$ を持つことを表す. 本研究では

$$\rho_1(x)\lambda(dx) = \text{const.} \times dx, \quad x \in S$$

¹点過程 (point process) は点の静的なランダム配置を意味し, 時間発展を意味するものではない. 確率過程という用語と似ているため紛らわしいが, 確率論で通常用いられる用語であり, 本修士論文でもこれを用いることとする.

となるような、密度が一定かつ一様な点過程を考えるものとする。 dx は S 上の Lebesgue 測度である。上記の仮定は、有界な領域 Λ に含まれる点の数 $\Xi(\Lambda)$ の期待値は Λ の体積に比例することを表している。本修士論文では、確率変数 X の期待値を $\mathbf{E}[X]$ で表すことにする。また、領域 Λ の体積を $\text{vol}(\Lambda)$ と書くことにする。これらの記号を使うと、上の主張は $\mathbf{E}[\Xi(\Lambda)] \propto \text{vol}(\Lambda)$ と表されることになる。ここで、領域 Λ に含まれる点の数の分散 $\text{var}[\Xi(\Lambda)]$ を次式で定義する。

$$\text{var}[\Xi(\Lambda)] := \mathbf{E}[(\Xi(\Lambda) - \mathbf{E}[\Xi(\Lambda)])^2] \quad (1.2)$$

これは無限点過程 Ξ の局所的な領域 Λ に含まれる点の数のゆらぎを表し、これを“数分散”とよぶ。数分散は密度ゆらぎを定量的に表現する統計量であり、領域 Λ の大きさの変化に応じて数分散がどのように振る舞うのかを調べることで、その系が持つ構造的な特徴を明らかにすることができる [13]。各点が無相関あるいは Poisson 点過程で与えられる点過程であれば、その点過程の数分散は体積に比例する； $\text{var}[\Xi(\Lambda)] \propto \text{vol}(\Lambda)$ 。 (図 1.1 を参照。)

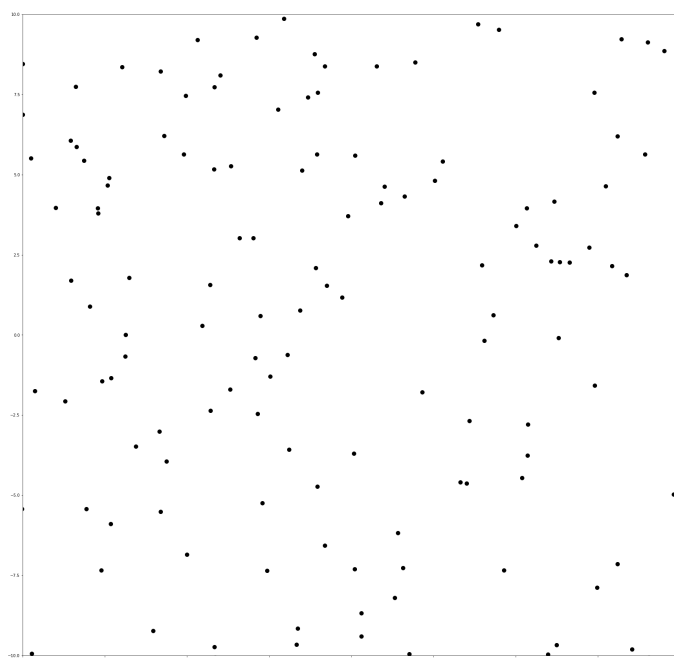


図 1.1: Poisson 点過程の分布図。無相関の点過程で、その数分散は体積に比例する。ゆらぎが大きく、密な部分と疎な部分が現れる。

最近の凝縮系物理学やそれに関連した材料工学では、大規模極限において相関粒子系での密度が異常に抑制されるとき、その系は“超一様”状態になると言われている。無限点過程 Ξ が超一様性を持つとき、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow S} \frac{\text{var}[\Xi(\Lambda)]}{\mathbf{E}[\Xi(\Lambda)]} = 0 \quad (1.3)$$

が成り立つ。これは、領域 Λ が系全体を覆うような大規模極限 $\Lambda \rightarrow S$ において、数分散の増大が期待値の増大、すなわち領域の体積の増大よりも遅いことを意味する。

ここで、基本空間を d 次元ユークリッド空間 $S = \mathbb{R}^d$ とし、その空間中に

$$\Lambda = \mathbb{B}_R^{(d)}, \quad d \in \mathbb{N}$$

となるような領域を仮定する。 $\mathbb{B}_R^{(d)}$ は \mathbb{R}^d 上の半径 $R > 0$ の d 次元球

$$\mathbb{B}_R^{(d)} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$$

を表す。上記の仮定により、この球に含まれる点の数 $\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})$ の期待値 $\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})]$ は球の体積 $\text{vol}(\mathbb{B}_R^{(d)})$ に比例し、その体積は

$$\text{vol}(\mathbb{B}_R^{(d)}) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} R^d \quad (1.4)$$

と与えられる。 $\Gamma(z)$ は gamma 関数を表し

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \quad \text{Re} z > 0$$

と定義される。 gamma 関数については、次の3つの等式

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

が成り立つ。今、 d 次元球 $\mathbb{B}_R^{(d)}$ の半径 R を増大するような場合を考える； $\{\mathbb{B}_R^{(d)}\}_{R>0}$ 。この場合、大規模極限 $R \rightarrow \infty$ に伴う数分散の振る舞いに従って、超一様性は次の3つの Class に分類される [13]

$$\begin{aligned} \text{Class I :} \quad & \text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] \asymp R^{d-1}, \\ \text{Class II :} \quad & \text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] \asymp R^{d-1} \log R, \\ \text{Class III :} \quad & \text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] \asymp R^{d-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Class I には、完全結晶、多くの準結晶、1成分プラズマ模型等が該当する。Class II には、いくつかの準結晶、Riemann のゼータ関数の零点が該当する。Class III にはランダム集団モデル等が該当する。このように、超一様性による多粒子系の分類は、既存の分類とは異なる新たな分類を行うことが可能である。特に、(1.3) と (1.5) より、点過程が Class I の超一様性を持つときは

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})]}{\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})]} = \text{const.} \quad (1.6)$$

が成り立つ。

超一様性を持つランダムな点過程の典型例は、ランダム行列理論に関連した行列式点過程

である。行列式点過程とは、相関関数が行列式で定義される、点同士が負の相関を持つ点過程である。ランダム行列とは、行列要素が何らかの確率分布に従う確率変数で与えられる行列であり、その固有値を実軸 \mathbb{R} や複素平面 \mathbb{C} 上にプロットすると行列式点過程が得られる。一般に、行列式点過程は3つの量の組み合わせ $(\Xi, K, \lambda(dx))$ で指定される。ここで、 Ξ は点過程 (1.1) を表し、 $\lambda(dx)$ は S 上で定義される参照測度で、 K は相関核 (correlation kernel) とよばれる $S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ の連続な関数である。

ランダム行列理論において最も研究されている行列式点過程は、 $S = \mathbb{R}$ 上の \sin 点過程 $(\Xi_{\sin}, K_{\sin}, dx)$ である。この点過程の相関核は $K_{\sin}(x, y) = \sin(x-y)/\{\pi(x-y)\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ と与えられ、その行列は Gauss 型ユニタリ統計集団で与えられる。Gauss 型ユニタリ統計集団とは、行列の各要素が正規分布に従う確率変数で与えられるような Hermite 行列である。領域 $\Lambda = \mathbb{B}_R^{(d)}$ を大きくする大規模極限 $R \rightarrow \infty$ においては

$$\text{var}[\Xi_{\sin}(\mathbb{B}_R^{(1)})] \sim \frac{\log R}{\pi^2}, \quad R \rightarrow \infty$$

が成り立ち、Class II の超一様性を持つことが知られている [9]。Torquato はこの \sin 点過程を高次元に拡張した Fermi 球点過程とよばれる、次元 $d \in \mathbb{N}$ を径数とした 1 径数の行列式点過程族について研究を行い、一般の d について Class II の超一様性を持つことを証明した [13, 14]。 $d = 1$ としたときは、Fermi 球点過程は \sin 点過程と等しくなる。この行列式点過程が Fermi 球点過程とよばれているのは、 $d = 3$ としたとき、絶対零度における 3次元自由電子の分布に対応していることに由来する [14]。

Class I の超一様性を持つランダム行列理論由来の無限点過程の典型例は、 $S = \mathbb{C}$ 上の Ginibre 点過程 $(\Xi_{\text{Ginibre}}, K_{\text{Ginibre}}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C})})$, $K_{\text{Ginibre}}(x, y) = e^{xy}$, $x, y \in \mathbb{C}$ である。参照測度 λ は複素標準正規分布 $\lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx) := e^{-|x|^2} dx/\pi$ である [6]。Ginibre 点過程は行列成分を複素数とし、実部と虚部がそれぞれ独立な正規分布に従う確率変数を要素に持つ行列式点過程である。Ginibre 点過程は 1 成分プラズマの分布やネットワーク解析に応用されている (図 1.2 を参照) [13]。

\mathbb{C} 上の Ginibre 点過程については、球領域 $\Lambda = \mathbb{B}_R^{(d)}$ の半径を大きくする大規模極限 $R \rightarrow \infty$ において

$$\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] \sim \frac{R}{\sqrt{\pi}}, \quad R \rightarrow \infty$$

が成り立ち、Class I の超一様性を持つことを白井 [11] が証明した。Torquato [13] も同様の結果を証明したが、さらに、Ginibre 点過程の数分散の厳密な表式も導出している。

Heisenberg 点過程族とは、Ginibre 点過程を高次元複素数空間 $S = \mathbb{C}^D$, $D = 2, 3, \dots$ 上に拡張したものであり、 $(\Xi_{H_D}, K_{H_D}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ で指定される。 $D = 1$ とすれば、Ginibre 点過程と一致する。

$$(\Xi_{H_1}, K_{H_1}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^1)}) = (\Xi_{\text{Ginibre}}, K_{\text{Ginibre}}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C})})$$

ここで、高次元複素空間 \mathbb{C}^D について説明する。 $S = \mathbb{C}^D$, $D \in \mathbb{N}$ のとき、 $x \in S$ の D 個の成分 $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)})$ はそれぞれ、

$$x^{(\ell)} = \text{Re}x^{(\ell)} + \sqrt{-1}\text{Im}x^{(\ell)}, \quad \ell = 1, \dots, D$$

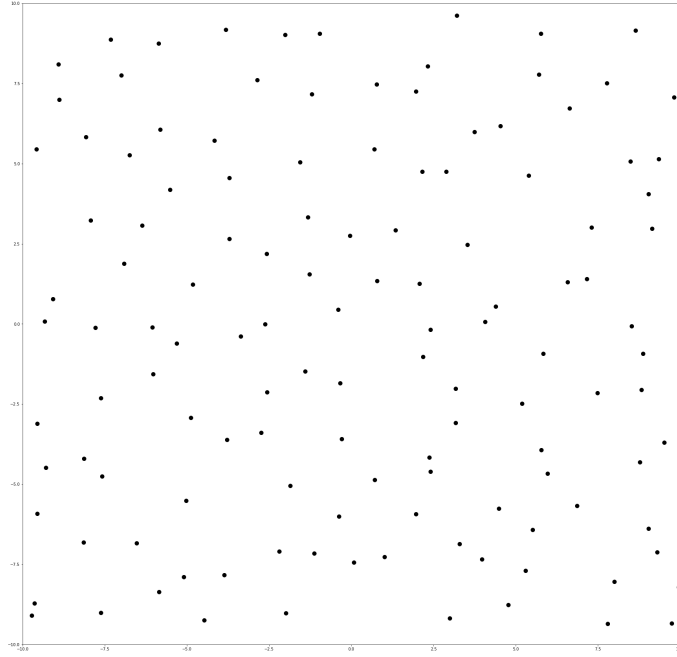


図 1.2: Ginibre 点過程の固有値の分布図. 行列の各成分は独立であるが, 固有値は負の相関を持つ. このため, 図 1.1 の Poisson 点過程と比べて一様に分布する.

と表される. ここでは, この複素構造を明示するため

$$x_{\mathbb{R}} = (\operatorname{Re}x^{(1)}, \dots, \operatorname{Re}x^{(D)}), \quad x_{\mathbb{I}} = (\operatorname{Im}x^{(1)}, \dots, \operatorname{Im}x^{(D)}) \in \mathbb{R}^D$$

として, $x = x_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}x_{\mathbb{I}}$ と書くことにする. Lebesgue 測度は

$$dx = dx_{\mathbb{R}}dx_{\mathbb{I}} := \prod_{\ell=1}^D d\operatorname{Re}x^{(\ell)} d\operatorname{Im}x^{(\ell)}$$

で与えられる. $x = x_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}x_{\mathbb{I}}, y = y_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}y_{\mathbb{I}} \in \mathbb{C}^D$ に対して, 標準 Hermite 内積を

$$x \cdot \bar{y} = (x_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}x_{\mathbb{I}}) \cdot (y_{\mathbb{R}} - \sqrt{-1}y_{\mathbb{I}}) = (x_{\mathbb{R}} \cdot y_{\mathbb{R}} + x_{\mathbb{I}} \cdot y_{\mathbb{I}}) - \sqrt{-1}(x_{\mathbb{R}} \cdot y_{\mathbb{I}} - x_{\mathbb{I}} \cdot y_{\mathbb{R}})$$

と定義する. もしも, $x = x_{\mathbb{R}}, y = y_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^D$ であれば,

$$x \cdot \bar{y} = x_{\mathbb{R}} \cdot y_{\mathbb{R}} := \sum_{\ell=1}^D \operatorname{Re}x^{(\ell)} \operatorname{Re}y^{(\ell)}$$

と書ける. ノルムは

$$|x| := \sqrt{x \cdot \bar{x}} = \sqrt{|x_{\mathbb{R}}|^2 + |x_{\mathbb{I}}|^2}$$

と定義する. このように設定すると, $S = \mathbb{C}^D$ 内の半径 R の D 次元円板 $\{x \in \mathbb{C}^D : |x| < R\}$ と \mathbb{R}^d 内の半径 R の球 $\mathbb{B}_R^{(d)}$ は, $d = 2D$ の下で同一視できる.

\mathbb{C} 上の Ginibre 点過程における参照測度は $\lambda_{N(0,1;\mathbb{C})}(dx) := e^{-|x|^2} dx / \pi$ であることから, これを拡張し, $S = \mathbb{C}^D$ 上の参照測度は

$$\lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx) := \prod_{i=1}^D \lambda_{N(0,1;\mathbb{C})}(dx^{(i)}) = \frac{1}{\pi^D} e^{-|x|^2} dx = \frac{1}{\pi^D} e^{-(|x_R|^2 + |x_I|^2)} dx_R dx_I \quad (1.7)$$

で与え, Heisenberg 点過程族を次のように定義する.

定義 1.1 Heisenberg 点過程族は次元 $D \in \mathbb{N}$ を径数とした \mathbb{C}^D 上の行列式点過程 $(\Xi_{H_D}, K_{H_D}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の 1 径数族である. 各 D に対して, 相関核は

$$K_{H_D}(x, y) = e^{x\bar{y}}, \quad x, y \in \mathbb{C}^D \quad (1.8)$$

で与えられる.

相関核 $K_{H_D}(x, y)$ は Hermite 性 $\overline{K_{H_D}(x, y)} = K_{H_D}(y, x)$ をもち, $D = 1$ とすれば Ginibre 点過程の相関核の定義と一致する; $K_{\text{Ginibre}} = K_{H_1}(x, y) = e^{x\bar{y}}$, $x, y \in \mathbb{C}$.

先行研究では, Ginibre 点過程が Class I の超一様性を持つことを明らかにして, その数分散の厳密な表式も求められている [13, 11]. しかし, Ginibre 点過程の高次元拡張にあたる Heisenberg 点過程族については, その数分散の具体的な表式と, 高次元拡張で超一様性がどのように変化するのは明らかにされていなかった.

そこで, 本研究では定義 1.1 で定義される D 次元複素数空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{H_D}, K_{H_D}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)})$ について, その数分散をの厳密な表式と, $R \rightarrow \infty$ としたときの数分散の漸近展開形の導出を行い, 一般次元 D において Class I の超一様性を持つことを明らかにした. 本修士論文では得られた結果とその導出過程を説明する. この結果に至るまで, 先行研究として知られていた $D = 1$ の場合 [13] の結果をフォローし, 次にその高次元拡張である $D = 2$ の場合について計算を行った. これらの計算の経験と得られた具体的な表式を元に, 一般化の試みを行った結果, 任意次元 D における厳密な表式が得られた. そこで, 本修士論文では $D = 1, 2$ の場合についても導出過程を詳細に述べ, どのように一般化されるのかについてを見せることにしたい.

本文の構成は以下のとおりである. 第 2 章では本研究で得られた主結果を記す. 第 3 章では点過程と分散等の定義と説明を行う. 計算で用いた公式についてもこの章で述べる. 第 4 章では d 次元球を領域としたときの数分散の導出と行列式点過程の定義を行う. これらのことを用いて, Heisenberg 点過程族の数分散を決定するための必要な諸式を導く. 第 5 章では \mathbb{C} 上の Ginibre 点過程について, 数分散の厳密な表式とその漸近展開形を導出し, Class I の超一様性を持つことを示す. 第 6 章では \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程 $(\Xi_{H_2}, K_{H_2}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^2)})$ につ

いて、数分散の厳密な表式とその漸近展開形を導出し、Class I の超一様性を持つことを示す。第7章では \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{H_D}, K_{H_D}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)})$ に対し、数分散の厳密な表式とその漸近展開形を導出し、Class I の超一様性を持つことを示す。

本修士論文の内容は以下の論文として投稿中である。

Matsui, T, Katori, M., Shirai, T.: Local number variances and hyperuniformity of the Heisenberg family of determinantal point processes. [arXiv:PR/2012.10585](https://arxiv.org/abs/2012.10585)

第2章 数分散の厳密表式と主定理

この章では本修士論文で得られた主要な結果について述べる.

先行研究として, 次の命題 2.1 が成り立つことが知られている [13, 11].

命題 2.1 複素平面 \mathbb{C} 上の Ginibre 点過程 $(\Xi_{\text{Ginibre}}, K_{\text{Ginibre}}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C})})$ の数分散 $\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ の厳密な表式は

$$\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] = R^2 e^{-2R^2} [I_0(2R^2) + I_1(2R^2)], \quad R > 0 \quad (2.1)$$

と与えられる. ここで, $I_\nu(x)$ は第 1 種変形 Bessel 関数を表し

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \quad (2.2)$$

と定義される. この数分散の厳密な表式に対し, $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開形は

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{1}{2^4} R^{-2} + O(R^{-4}) \right], \quad R \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

と与えられる. このことから, Class I の超一様性を持つことが示される.

この結果は白井 [11] と Torquato [13] が求めている. しかし, 上述の通り, 本研究はこの命題のフォローから始まり, 計算で得られた知見や経験が, この命題以降で述べる Ginibre 点過程の高次元拡張における結果の導出につながっている. また, 次に述べる命題 2.2 の (2.4) の証明において, (2.1) の導出過程で得られた式を利用するため, その導出過程を第 5 章で詳細に記述する.

命題 2.2 では, Ginibre 点過程を 2 次元複素空間 \mathbb{C}^2 上に拡張した Heisenberg 点過程について, その数分散と $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開を求め, Class I の超一様性を持つことを示した.

命題 2.2 2次元複素空間 \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程 $(\Xi_{\text{H}_2}, K_{\text{H}_2}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^2)})$ の数分散 $\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]$ の厳密な表式は

$$\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})] = \frac{R^4 e^{-2R^2}}{2} [I_0(2R^2) + 2I_1(2R^2) + I_2(2R^2)], \quad R > 0 \quad (2.4)$$

と与えられる. この数分散の厳密な表式に対し, $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開形は

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{5}{24} R^{-2} + \frac{21}{29} R^{-4} + O(R^{-6}) \right], \quad R \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

と与えられる. このことから, Class I の超一様性を持つことが示される.

この命題の証明は第 6 章で詳細に記述する.

本修士論文の主結果の 1 つとして, 次の定理 2.3 を述べる. この定理では, D 次元複素空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{H}_D}, K_{\text{H}_D}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の数分散の表式を厳密に導出した.

定理 2.3 D 次元複素空間 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{H}_D}, K_{\text{H}_D}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の数分散 $\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]$ の厳密な表式は

$$\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] = \frac{R^{2D} e^{-2R^2}}{D!} \left[I_0(2R^2) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2) \right], \quad R > 0 \quad (2.6)$$

と与えられる.

(2.6) に対して, $D = 1, 2$ とすれば \mathbb{C} 上 Ginibre 点過程の数分散 (2.1) と \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程の数分散 (2.4) と一致する. この定理の証明は第 7 章の 7.1 節で記述する.

また, (2.6) の別表現として, 一般化超幾何関数を用いても D 次元複素空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{H}_D}, K_{\text{H}_D}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の数分散を厳密に表すことができる.

命題 2.4 D 次元複素空間 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{H}_D}, K_{\text{H}_D}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の数分散 $\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]$ の厳密な表式は, (2.6) の別表現として

$$\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] = \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} \left[1 - \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2) \right] \quad (2.7)$$

と与えられる. ${}_2F_2$ は一般化超幾何関数を表し

$${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n n!} \quad (2.8)$$

と定義される. $(a)_n$ は Pochhammer 記号

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_n := a(a+1)(a+2) \cdots (a+n) := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$$

を表す.

一般化超幾何関数の定義 (2.8) より, $R \rightarrow \infty$ の極限をとると (2.7) は発散する. そのため, $R \rightarrow \infty$ における数分散の挙動を調べるには (2.6) を用いる方が有用である. この命題の証明は第7章の7.2節で記述する.

(2.6) に対し, $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開を行うことにより, 本修士論文の2つ目の主結果である次の定理が成り立つ.

定理 2.5 D 次元複素空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{HD}}, K_{\text{HD}}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ は $D \in \mathbb{N}$ において

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi_{\text{HD}}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{HD}}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]} = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \quad (2.9)$$

が成り立つ. このことから, すべての $D \in \mathbb{N}$ において Class I の超一様性を持つことが示される. さらに, $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開形は

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{HD}}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{HD}}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]} \sim \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(D)}{(2k+1)k!2^{4k}} R^{-2k}, \quad R \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

となる. $\alpha_k(D)$ は (3.23) で定義される定数である.

ここで得られた漸近展開形は, $D = 1, 2$ とすれば, (2.3), (2.5) の結果と等しくなる. この定理の証明は第7章の7.3節で記述する.

注 1 Heisenberg 点過程族は無有限 Weyl-Heisenberg ensemble とよばれる行列式点過程の広いクラスに属する. このクラスは Abreu ら [2, 4, 3] によって研究されている. 先に導入した定義と表記を用いて, Weyl-Heisenberg ensemble の行列式点過程は基本空間を D 次元複素空間 $S = \mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^{2D}$, $D \in \mathbb{N}$ とした点過程で $(\Xi_{\text{WH}}, K_{\text{WH}}^g, dx)$ と表現され, その相関核 K_{WH}^g は

$$K_{\text{WH}}^g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^D} g(u - x_{\text{R}}) \overline{g(u - y_{\text{R}})} e^{2\sqrt{-1}(x_1 - y_1) \cdot u} du, \quad x, y \in \mathbb{C}^D$$

と与えられる. 文献 [8] の [Section 2.6] によれば, 式中の \mathbb{R}^D 上の関数 g はいくつかの条件を満たすが, 関数 g を

$$G(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{D/4} \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{D/2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^D \quad (2.11)$$

と, とれば条件は満たされる. このとき,

$$K_{\text{WH}}^G(x, y) = \frac{e^{\sqrt{-1}x_{\text{R}}x_1}}{e^{\sqrt{-1}y_{\text{R}}y_1}} \sqrt{\frac{e^{-|x|^2}}{\pi^D}} K_{\text{HD}}(x, y) \sqrt{\frac{e^{-|y|^2}}{\pi^D}}, \quad x, y \in \mathbb{C}^D$$

が成り立つ. $e^{\sqrt{-1}x_{\text{R}}x_1}/e^{\sqrt{-1}y_{\text{R}}y_1}$ は行列式点過程とは無関係な因子である. この等式は Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{HD}}, K_{\text{HD}}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ と \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の Weyl-Heisenberg 点過程 $(\Xi_{\text{WH}}, K_{\text{WH}}^g, dx)$

との間に等式が成り立つことを表している、Wely-Heisenberg ensemble であるすべての点過程が Class I の超一様性を示すことは、文献 [4] の [Theorem 5.8] で証明がされている。

本研究と Abreu らの先行研究の異なる点は、 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族の数分散について、その一般次元 D における厳密な表式と、 $R \rightarrow \infty$ における漸近展開形の表式を求めている点にある。また、 $R \rightarrow \infty$ としたときの極限 (2.9) において、 $D/\sqrt{\pi}$ という係数を決定している点も挙げられる。

注 2 文献 [11] の [Proposition 2.4] によれば、 $R \rightarrow \infty$ としたときは $\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] \rightarrow \infty$ となる。このことから一般に次のことが成り立つ。

- (i) 確率 1 で、 $\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})/\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] \rightarrow 1$
- (ii) 中心極限定理; $(\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)}) - \mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})])/\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に収束する

命題 2.1 から定理 2.5 の結果は、領域を d 次元球として得られた。しかし、 d 次元球とは異なる領域を用いた場合においても、Heisenberg 点過程族の超一様性を評価することができた。

命題 2.6 文献 [8] の [Theorem 2.6] より、行列式点過程における双対性 (duality) を適用すると、球 $\mathbb{B}_R^{(2D)}$ とは異なる領域で $\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\Lambda)]/\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\Lambda)]$ を評価できる。 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の半径 $R > 0$ の多円板 (polydisk) $\Delta_R^{(D)} := \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)}) \in \mathbb{C}^D : |x^{(i)}| < R, i = 1, \dots, D\}$ を定義すると

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]} &= 1 - \left(1 - \frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}\right)^D \\ &\sim \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{D-1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(D-1)(D-2)}{3\pi} - \frac{1}{8} \right\} R^{-2} + O(R^{-3})\right], \quad R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.12)$$

が成り立つ。このことから、(1.6) より、Class I の超一様性を持つことが明らかとなる。

(2.12) の第 1 項は、(2.10) の第 1 項と一致している。しかし、 $k > 1$ 以降の項は係数が異なっている。このことから、 $R \rightarrow \infty$ としたときの数分散の挙動の詳細は、領域のとり方に依って変化していることが明らかとなった。

第3章 相関関数と分散

この章では、数学的な準備として点過程と分散等の定義及び説明を行う。計算で用いた Bessel 関数や、それを利用した公式群、また、Fourier 変換の定義についてもこの章で説明する。

3.1 相関関数と分散の一般式

点過程 $\Xi = \Xi(\cdot)$ の配置空間は

$$\text{Conf}(S) = \left\{ \xi = \sum_i \delta_{x_i} : x_i \in S, \text{すべての有界な集合 } \Lambda \subset S \text{ に対して } \xi(\Lambda) < \infty \right\}$$

と与えられる。すべての点 $x \in S$ に対して $\Xi(\{x\}) \in \{0, 1\}$ であれば、その点過程は単純という。単純とは、点の重なりがないことを表す。ここで、 $\mathcal{B}_c(S)$ を S 上でコンパクトな台を持つ有界な可測関数全体の集合とし、 $\xi \in \text{Conf}(S)$ と関数 $\phi \in \mathcal{B}_c(S)$ に対して

$$\langle \xi, \phi \rangle = \int_S \phi(x) \xi(dx) = \sum_i \phi(x_i)$$

と置く。この形式によって書かれるランダムな変数を、一般に点過程 Ξ の線形統計量とよぶ。点過程 Ξ において、任意の $\phi \in \mathcal{B}_c(S)$ に対して

$$\mathbf{E}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \int_S \phi(x) \rho_1(x) \lambda(dx) \quad (3.1)$$

が成り立つような非負の可測な関数 ρ_1 が存在するとき、 ρ_1 は参照測度 λ に関する点過程 Ξ の 1 点相関関数とよばれる。定義より、 $\rho_1(x)$ は $x \in S$ での点の密度を与える。さらに、 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $\xi \in \text{Conf}(S)$ より ξ_n を

$$\xi_n = \sum_{i_1, \dots, i_n, i_j \neq i_k, j \neq k} \delta_{x_{i_1}} \cdots \delta_{x_{i_n}}$$

と定義し、 λ の n 重積を

$$\lambda^{\otimes n}(dx_1 \cdots dx_n) := \prod_{i=1}^n \lambda(dx_i)$$

と定義する. 点過程 Ξ において, 任意の $\phi \in \mathcal{B}_c(S^n)$ に対して

$$\mathbf{E}[\langle \Xi_n, \phi \rangle] = \int_{S^n} \phi(x_1, \dots, x_n) \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda^{\otimes n}(dx_1 \cdots dx_n) \quad (3.2)$$

が成り立つような非負で対称な S^n 上の可測関数 ρ_n が存在するとき, ρ_n を $\lambda^{\otimes n}$ に対する点過程 Ξ の n 点相関関数という.

ここで, 点過程 Ξ と n 点相関関数 ρ_n に対して, 次のことを仮定する.

(A1) $(S, \mathcal{B}_c(S), \lambda)$ 上の点過程 Ξ は, 1 点相関関数 ρ_1 と 2 点相関関数 ρ_2 を持つ.

上記のことを仮定すると, n 点相関関数の定義 (3.2) を用いて次の補題 3.1 が成り立つ [13, 15].

補題 3.1 **(A1)** を仮定すると, (1.2) で定義される分散 $\text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle]$ は

$$\text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \int_S |\phi(x)|^2 \rho_1(x) \lambda(dx) + \int_{S \times S} \phi(x) \overline{\phi(y)} (\rho_2(x, y) - \rho_1(x) \rho_1(y)) \lambda^{\otimes 2}(dxdy) \quad (3.3)$$

と与えられる.

いま, 基本空間が d 次元ユークリッド空間 $S = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ で与えられる場合を考え, 1 点相関関数 ρ_1 と, 2 点相関関数 ρ_2 に対して, 次の仮定を置く.

(A2) 系が \mathbb{R}^d 上の Lebesgue 測度 dx に対して並進不変かつ, 次の 2 つのことを満たす.

(i) 参照測度が \mathbb{R}^d 上の Lebesgue 測度 dx に対する密度 $\ell(x)$ を持ち ($\lambda(dx) = \ell(x)dx$, $x \in \mathbb{R}^d$),

$$\rho_1(x) \ell(x) = \text{constant} =: \tilde{\rho}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ. $\tilde{\rho}$ は無限体積極限における単位体積あたりの点の数密度を表す.

(ii) 可測な偶関数 $g_2(x) = g_2(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ があり, これを用いて 2 点相関関数と密度関数の積が

$$\rho_2(x, y) \ell(x) \ell(y) = \tilde{\rho}^2 g_2(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

と書ける. $g_2(x)$ は動径分布関数とよばれる [13].

ここで全相関関数 (total correlation function) とよばれる関数 $C(x)$ を

$$C(x) = g_2(x) - 1, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.4)$$

と定義する [13]. この関数は2点間の相関を表す関数で, $x \rightarrow \infty$ となるときは0に減衰し, 2点間の相関が消失をすることを表す. (3.4) を用いると, (A1), (A2) の下で (3.3) は

$$\begin{aligned} \text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] &= \tilde{\rho} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx + \tilde{\rho} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x) \overline{\phi(y)} C(x-y) dx dy \right] \\ &= \tilde{\rho} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx + \tilde{\rho} \int_{\mathbb{R}^d} C(z) dz \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \overline{\phi(x-z)} dx \right] \end{aligned}$$

と書ける. 右辺第2式で積分変数を $(x, y) \rightarrow (x, z)$, $z = x - y$ と変更している.

ここで, ϕ についての交差積分 (intersection integral) とよばれる関数

$$\mathcal{I}_\phi(z) := \int_S \phi(x) \overline{\phi(x-z)} dx, \quad \phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \quad z \in \mathbb{R}^d \quad (3.5)$$

を定義する. $\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ であれば $\mathcal{I}_\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ となる. (3.5) を用いることで, 補題 3.1 から次の命題 3.2 が成り立つ.

命題 3.2 (A1), (A2) を仮定すると, $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ に対し (3.3) は

$$\text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \tilde{\rho} \left[\int_S |\phi(x)|^2 dx + \tilde{\rho} \int_S \mathcal{I}_\phi(x) C(x) dx \right] \quad (3.6)$$

と書ける.

ここで, $k = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)})$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$, $k \cdot x = \sum_{\ell=1}^d k^{(\ell)} x^{(\ell)}$ に対し, 可積分な関数 φ に対する Fourier 変換を

$$\widehat{\varphi}(k) = \mathbf{F}[\varphi](k) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k \cdot x} \varphi(x) dx \quad (3.7)$$

と定義する. 逆 Fourier 変換は

$$\varphi(x) = \mathbf{F}^{-1}[\widehat{\varphi}](x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k \cdot x} \widehat{\varphi}(k) dk \quad (3.8)$$

と与えられる. このとき,

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \iff \widehat{\varphi}(-k) = \widehat{\varphi}(k)$$

の関係が成り立つ. いま, $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ を2乗可積分な関数とすれば Parseval の等式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(k) \overline{\widehat{\psi}(k)} dk \quad (3.9)$$

が成り立つ. 特に, $\varphi(x) = \psi(x)$ であるならば

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(k)|^2 dk$$

と書ける. ここで, (3.7) から

$$F[\phi(\cdot - z)](k) = \widehat{\phi}(k)e^{\sqrt{-1}k \cdot z}$$

が得られる. したがって, $\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ に対して (3.9) を用いることにより, (3.5) は

$$\mathcal{I}_\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi}(k) \overline{\widehat{\phi}(k)} e^{\sqrt{-1}k \cdot z} dk = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k \cdot z} |\widehat{\phi}(k)|^2 dk, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

と書き換えられる. この式と (3.8) を比較することにより, 交差積分の Fourier 変換 $\widehat{\mathcal{I}_\phi}(k)$ は

$$\widehat{\mathcal{I}_\phi}(k) = |\widehat{\phi}(k)|^2, \quad \phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \quad k \in \mathbb{R}^d \quad (3.10)$$

となる. ここで, 次の仮定を置く.

(A3) $S = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ であり, 全相関関数 $C(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ は 2 乗可積分である. したがって, その Fourier 変換 $\widehat{C}(k)$, $k \in \mathbb{R}^d$ も同様に 2 乗可積分である.

ここで, 構造因子とよばれる関数 $\widehat{S}(k)$ を

$$\widehat{S}(k) = 1 + \widetilde{\rho} \widehat{C}(k), \quad k \in \mathbb{R}^d \quad (3.11)$$

と定義する. 全相関関数 $C(x)$ の定義より, $\widehat{S}(-k) = \widehat{S}(k)$, $k \in \mathbb{R}^d$ が成り立つため, $\widehat{S}(k)$ も同様に偶関数である. 構造因子は結晶の構造解析でよく用いられる構造因子を表す [13].

(3.6), (3.9), (3.11) を組み合わせることにより, 次の命題 3.3 が成り立つ.

命題 3.3 (A1)–(A3) を仮定すると, $\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ に対し, 分散は

$$\text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \frac{\widetilde{\rho}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathcal{I}_\phi}(k) \widehat{S}(k) dk \quad (3.12)$$

と与えられる.

3.2 Bessel 関数

この節では Bessel 関数に関する諸式, または Bessel 関数を用いた積分公式について説明する.

第 1 種 Bessel 関数 $J_\nu(x)$ は

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n + \nu}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \quad (3.13)$$

と定義される [10, 1]. 第 1 種変形 Bessel 関数 $I_\nu(x)$ は (2.2) で定義されている.

ここで, 関数 $\varphi(x)$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ が動径 $r = |x| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^d (x^{(\ell)})^2}$ のみに依存して, $\varphi(x) = f(r)$ と書けるととき, その関数は動径関数という. 動径関数に対する Fourier 変換について, 次の補題 3.4 が成り立つことが知られている [13].

補題 3.4 可積分関数 $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ が動径関数であるとき, すなわち, $r := |x|$ のみに依存して $\varphi(x) = f(r)$ として表せるとき, その Fourier 変換 (3.7) は $\kappa := |k|$ を用いて

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(k) &= \widehat{f}(\kappa) = (2\pi)^{d/2} \int_0^\infty r^{d-1} \frac{J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{(\kappa r)^{(d-2)/2}} f(r) dr \\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}}{\kappa^{(d-2)/2}} \int_0^\infty r^{d/2} J_{(d-2)/2}(\kappa r) f(r) dr\end{aligned}\quad (3.14)$$

と与えられる. 動径関数の逆 Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(r) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \kappa^{d-1} \frac{J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{(\kappa r)^{(d-2)/2}} \widehat{f}(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} r^{(d-2)/2}} \int_0^\infty \kappa^{d/2} J_{(d-2)/2}(\kappa r) \widehat{f}(\kappa) d\kappa\end{aligned}\quad (3.15)$$

と与えられる.

この補題は, 関数が動径関数であれば, その動径のみの積分で Fourier 変換の計算ができることを表している.

次に, 以降の章で計算に用いる Bessel 関数を用いた公式について紹介する.

第 1 種 Bessel 関数を用いた不定積分について, 次の式が成り立つことが知られている [10, 1].

$$\int \frac{J_\nu(ax)^2}{x^{2\nu-1}} dx = -\frac{1}{2(2\nu-1)} \frac{J_\nu(ax)^2 + J_{\nu-1}(ax)^2}{x^{2(\nu-1)}}, \quad \nu \neq 1/2 \quad (3.16)$$

定積分については, $\operatorname{Re} \nu > -1$, $\operatorname{Re} p^2 > 0$ を用いて以下の式が成り立つことが知られている [10, 1].

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-p^2 x^2} J_\nu(ax) dx = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}} e^{-a^2/(4p^2)}, \quad (3.17)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ax)^2}{x} dx = \frac{1}{2\nu}, \quad (3.18)$$

$$\int_0^\infty x e^{-p^2 x^2} J_\nu(ax)^2 dx = \frac{1}{2p^2} e^{-a^2/(2p^2)} I_\nu \left(\frac{a^2}{2p^2} \right), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-1} e^{-p^2 x^2} J_\nu(ax)^2 dx \\ = \frac{(a/p)^{2\nu}}{2^{2\nu+1} \nu^2 \Gamma(\nu)} {}_2F_2 \left(\nu, \nu + 1/2; \nu + 1, 2\nu + 1; -(a^2/p^2) \right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

$x \rightarrow \infty$ としたとき, 第 1 種 Bessel 関数 $J_\nu(x)$, 第 1 種変形 Bessel 関数 $I_\nu(x)$ について, 以下の漸近展開が成り立つことが知られている [10, 1].

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos \omega_\nu(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_{2k}(\nu)}{(2k)! 2^{6k} x^{2k}} - \sin \omega_\nu(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_{2k+1}(\nu)}{(2k+1)! 2^{3(2k+1)} x^{2k+1}} \right\} \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \omega_\nu(x), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(\nu)}{k! 2^{3k}} x^{-k}, \quad x \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

ここで, $\omega_\nu(x)$, $\alpha_k(\nu)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} \omega_\nu(x) &= x - \frac{(2\nu + 1)\pi}{4}, \\ \alpha_k(\nu) &= \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ \prod_{\ell=1}^k (4\nu^2 - (2\ell - 1)^2) = \prod_{\ell=-k+1}^k (2\nu + 2\ell - 1) & \text{if } k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

第4章 数分散

この章では, Heisenberg 点過程族の数分散を求めるために必要な諸式の導出を行う. 4.1 節では, d 次元球を領域としたときの数分散を導出する. 4.2 節では, 行列式点過程の定義を行う. 4.3 節では, 得られた結果を下に, Heisenberg 点過程族の数分散を決定するために必要な諸式を導く.

4.1 一般式

$S = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ である場合を考える. 領域 $\Lambda \subset S$ について, 指示関数を

$$1_{\Lambda}(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Lambda, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. 定義より, 指示関数 $1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ は動径関数である. この指示関数が動径関数であることを明記するために

$$1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x) = \chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(|x|)$$

と置く. 今, $\phi = 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ とすれば (3.5) は

$$\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(y) 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(y-x) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

と書ける. これは交差体積 (intersection volume) よばれ, 半径 R の 2 つの球の重なり体積を表す [13].

球 $\mathbb{B}_R^{(d)}$ 内に含まれる点の数の期待値 $\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})]$ は, 指示関数 $1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ と (1.4) で与えられる d 次元球の体積を用いて

$$\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] = \tilde{\rho} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x) dx = \text{vol}(\mathbb{B}_R^{(d)}) \tilde{\rho} \quad (4.2)$$

と書ける.

次に, 指示関数 $1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ の Fourier 変換を考える. この関数が動径関数であるから, (3.14) を用いることで次の補題 4.1 が成り立つ [8].

補題 4.1 $1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ は動径関数であるため, その Fourier 変換

$$\widehat{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k \cdot x} 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x) dx = \int_{\mathbb{B}_R^d} e^{\sqrt{-1}k \cdot x} dx$$

も $\kappa = |k|$ の動径関数として与えられる. この Fourier 変換を

$$\widehat{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(k) = \widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(|k|)}$$

と書けば, $\widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(\kappa)$ は (3.14) を用いて

$$\widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(\kappa) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\kappa^{(d-2)/2}} \int_0^R r^{d/2} J_{(d-2)/2}(\kappa r) dr = (2\pi)^{d/2} \left(\frac{R}{\kappa}\right)^{d/2} J_{d/2}(\kappa R)$$

と与えられる.

(3.10) を用いれば, 交差体積の Fourier 変換 $\widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}}(k)$ は

$$\widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}}(k) = (2\pi)^d R^d \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2}{\kappa^d} =: \widehat{\mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}}(\kappa), \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad \kappa = |k| \quad (4.3)$$

となる. また, 動径関数の逆 Fourier 変換 (3.15) を (4.3) に対して用いることで, (4.1) は動径 $r = |x|$ の関数

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(x) &= \mathbb{F}^{-1} \left[\widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}} \right] (x) \\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}}{r^{(d-2)/2}} R^d \int_0^R \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2 J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{\kappa^{d/2}} d\kappa =: \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(r), \quad r = |x| \leq 2R \end{aligned} \quad (4.4)$$

として得られる. 定義より, $r > 2R$ ならば $\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(r) = 0$ となる. したがって, (3.6), (3.12) に対して, $\phi = 1_{\mathbb{B}_R^{(d)}}(x)$ としたときは $\text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})]$ と書ける. これは d 次元球に含まれる点の数の分散, つまり数分散を表す. したがって, この交差体積の式を用いることで次の系 4.2 が成り立つ.

系 4.2

(i) (A1), (A2) を仮定すると, 数分散は (3.4), (4.4) を用いて

$$\text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] = \tilde{\rho} \left[\text{vol}(\mathbb{B}_R^{(d)}) + \tilde{\rho} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(|x|) C(x) dx \right] \quad (4.5)$$

と書ける. 全相関関数が動径関数であり, $C(x) = c(r)$, $r = |x|$ と書けるとき, (4.5) は

$$\text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] = \tilde{\rho} \left[\text{vol}(\mathbb{B}_R^{(d)}) + \frac{2\pi^{d/2} \tilde{\rho}}{\Gamma(d/2)} \int_0^{2R} \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^{(d)}}}(r) c(r) r^{d-1} dr \right] \quad (4.6)$$

と書き直せる.

(ii) (A1)–(A3) を仮定すると, 数分散は (3.11), (4.3) を用いて

$$\text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] = \frac{\tilde{\rho}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathcal{I}_{1, \mathbb{B}_R^{(d)}}}(|k|) \widehat{S}(k) dk = \tilde{\rho} R^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{J_{d/2}(|k|R)^2}{|k|^d} \widehat{S}(k) dk \quad (4.7)$$

と書ける. 構造因子が動径関数であり, $\widehat{S}(k) = \widehat{s}(\kappa)$, $\kappa = |k|$ と書けるとき, (4.7) は

$$\text{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^{(d)})] = \frac{2\pi^{d/2} \tilde{\rho}}{\Gamma(d/2)} R^d \int_0^\infty \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2}{\kappa} \widehat{s}(\kappa) d\kappa \quad (4.8)$$

と書き直せる.

証明 動径関数に対して Lebesgue 測度は, $dx = r^{d-1} \sigma_{d-1} dr$, $\sigma_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ と極座標表示できる. よって, これを適用することにより (4.5) から (4.6) を, (4.7) から (4.8) を得る. ■

系 4.2 は, 点過程を特徴づける全相関関数 $c(r)$ あるいは構造因子 $\widehat{s}(\kappa)$ が決定できれば, その点過程の数分散が求められることを表している. 本研究では, Heisenberg 点過程族の構造因子を求め, (4.8) を利用して数分散を求めるための式を導出した. その式の導出過程は 4.3 節で述べる.

4.2 行列式点過程

ここで, 行列式点過程の一般式について述べる. 行列式点過程とは, 下記のように定義される点過程である [8].

定義 4.3 $(S, \mathcal{B}_c(S), \lambda)$ 上の単純点過程 Ξ に対して, 測度 λ に対する相関関数が一般に可測な積分核 $K : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて

$$\rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{1 \leq j, k \leq n} [K(x_j, x_k)], \quad \text{全ての } n \text{ に対して } n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in S \quad (4.9)$$

と与えられるとき, その点過程を行列式点過程という. K は相関核 (correlation kernel) とよばれる. 行列式点過程は (Ξ, K, λ) で指定され, 測度 $\lambda(dx)$ と相関核 K で特徴づけられる行列式点過程 Ξ を表す.

点過程 Ξ が行列式点過程であるならば, $\phi \in \mathcal{B}_c(S)$ に対して, (3.1), (3.3) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\langle \Xi, \phi \rangle] &= \int_S \phi(x) K(x, x) \lambda(dx), \\ \text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] &= \frac{1}{2} \int_{S \times S} |\phi(x) - \phi(y)|^2 K(x, y) K(y, x) \lambda^{\otimes 2}(dxdy) \end{aligned}$$

と与えられる. 特に, $\phi = 1_\Lambda$ であるときは, 有界な領域 $\Lambda \subset S$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\langle \Xi, \phi \rangle] &= \int_{\Lambda} K(x, x) \lambda(dx), \\ \text{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] &= \int_{\Lambda} \int_{S \setminus \Lambda} K(x, y) K(y, x) \lambda(dx) \lambda(dy)\end{aligned}$$

と書ける.

ここで, $S = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, あるいは $S = \mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^d$, $d = 2D$, $D \in \mathbb{N}$ である場合を考えて, 次の仮定を置く.

(DPP) 点過程は行列式点過程 (Ξ, K, λ) であり, 次のことを満たす.

(i) 相関核は Hermite である.

$$\overline{K(x, y)} = K(y, x), \quad x, y \in S$$

(ii) 参照測度が $\lambda(dx) = \ell(x)dx$, $x \in S$ で与えられ

$$K(x, x)\ell(x) = \text{constant} =: \tilde{\rho}, \quad \forall x \in S$$

が成り立つ.

(iii) 次の成り立つような, 可測な偶関数 $C(x) = C(-x)$, $x \in S$ がある.

$$\frac{|K(x, y)|^2}{K(x, x)K(y, y)} = -C(x - y), \quad x, y \in S$$

(DPP) と **(A3)** を仮定することにより, 次の系 4.4 が成り立つ.

系 4.4 **(DPP)** と **(A3)** を仮定すると, 系 4.2 (ii) が成り立つ.

4.3 Heisenberg 点過程族

この節では, D 次元複素空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族の定義 1.1 から, 構造因子 $\widehat{s}(\kappa)$ を決定することにより, 数分散を求めるための式を導出する.

Heisenberg 点過程族は行列式点過程であり, **(DPP)** を満たす. このとき, 次の補題 4.5 が成り立つ.

補題 4.5 D 次元複素空間 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\mathbb{H}}^{(D)}, K_{\mathbb{H}}^{(D)}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ は **(DPP)** を満たす. このとき $|x|^2 = |x_{\mathbb{R}}|^2 + |x_{\mathbb{I}}|^2$, $x \in \mathbb{C}^D$ とすれば

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\pi^D}, \quad (4.10)$$

$$C(x) = c(|x|) = -e^{-|x|^2} \quad (4.11)$$

が成り立つ.

証明 (1.8) と (4.9) から, $n = 1$ とすれば,

$$\rho_1(x) = K_{\mathbb{H}_D}(x, x) = e^{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{C}^d$$

が成り立つ. このとき, (DPP) の (ii) が成り立つので, (1.8) と (1.7) を用いて計算すると

$$\tilde{\rho} = K_{\mathbb{H}_D}(x, x) \cdot \ell(x) = e^{|x|^2} \cdot \frac{e^{-|x|^2}}{\pi^D} = \frac{1}{\pi^D}$$

を得る. よって (4.10) は示された. また, (DPP) の (iii) が成り立つため, (1.8) を用いれば

$$\begin{aligned} C(x - y) &= -\frac{|K_{\mathbb{H}_D}(x, y)|^2}{K_{\mathbb{H}_D}(x, x)K_{\mathbb{H}_D}(y, y)} = -e^{x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x} - |x|^2 - |y|^2} \\ &= -e^{-|x-y|^2} =: c(|x - y|) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より, (4.11) も示された. ■

補題 4.5 より, Heisenberg 点過程族の点の個数の密度 (4.10) と全相関関数 (4.11) が求められたため, これらを用いることで次の命題 4.6 が成り立つ.

命題 4.6 D 次元複素空間 \mathbb{C}^D , $D \in \mathbb{N}$ 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\mathbb{H}_D}, K_{\mathbb{H}_D}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ に対して, その構造因子は $\widehat{S}(k) = \widehat{s}(\kappa) = 1 - e^{-\kappa^2/4}$ となる. また, 期待値と数分散はそれぞれ

$$\mathbf{E}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] = \frac{R^{2D}}{D!}, \quad (4.12)$$

$$\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] = \frac{2R^{2D}}{(D-1)!} \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa^2/4}) d\kappa, \quad R > 0 \quad (4.13)$$

と与えられる.

証明 $\mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^d$, $d = 2D$ であるから, (1.4) と (4.10) を用いて (4.2) を計算すると,

$$\mathbf{E}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] = \text{vol}(\mathbb{B}_R^{(2D)}) \tilde{\rho} = \frac{\pi^d}{\Gamma(D+1)} R^{2D} \cdot \frac{1}{\pi^{2D}} = \frac{R^{2D}}{D!}$$

を得る.

(4.11) は動径関数であるから, その Fourier 変換 $\widehat{C}(k)$ も $\kappa = |k|$ の動径関数である. (3.14) を $C(r) = c(r) = -e^{-r^2}$ に適用すれば

$$\widehat{c}(\kappa) = \frac{(2\pi)^D}{\kappa^{D-1}} \int_0^\infty r^D J_{D-1}(\kappa r) c(r) dr = -\frac{(2\pi)^D}{\kappa^{D-1}} \int_0^\infty r^D e^{-r^2} J_{D-1}(\kappa r) dr$$

を得る. この式に対し, (3.17) を用いて計算すると,

$$\widehat{c}(\kappa) = -\frac{(2\pi)^D \kappa^{D-1}}{(2 \cdot 1^2)^{D-1+1}} e^{-\kappa^2/(4 \cdot 1^2)} = -\pi^D e^{-\kappa^2/4} \quad (4.14)$$

を得る. (4.14) を (3.11) に代入すると, 構造因子も動径関数であることから

$$\widehat{S}(k) = \widehat{s}(\kappa) = 1 + \tilde{\rho} \cdot \left(-\pi^D e^{-\kappa^2/4} \right) = 1 - e^{-\kappa^2/4} \quad (4.15)$$

を得る. よって, (4.10) と (4.15) を (4.8) に組み込むことにより

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] &= \frac{2\pi^D \tilde{\rho}}{\Gamma(D)} \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} \widehat{s}(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)} \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa^2/4}) d\kappa \end{aligned}$$

が得られる. 以上より (4.12), (4.13) が示された. ■

以降の章ではこの命題 4.6 の (4.12) と (4.13) を用いて, 各次元における Heisenberg 点過程族の数分散と, その漸近展開形の導出を行い, Heisenberg 点過程族が Class I の超一様性を持つことを証明する.

第5章 Ginibre点過程の数分散と超一様性 (命題2.1の証明)

第5章では、命題2.1の証明として、複素平面 \mathbb{C} 上のGinibre点過程 $(\Xi_{\text{Ginibre}}, K_{\text{Ginibre}}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C})})$ について、数分散の厳密な表式と、 $R \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開形を導出し、Class Iの超一様性を持つことを示す。

5.1節では、数分散の厳密な表式が(2.1)で与えられることを証明する。これは、(4.13)を $D = 1$ として計算を進めることで示される。

5.2節では、(2.1)に対し(3.22)を適用して、その漸近展開形が(2.3)で与えられることを証明する。そして、(2.3)から \mathbb{C} 上のGinibre点過程がClass Iの超一様性を持つことを示す。

5.1 $\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ の厳密表式(2.1)の導出

(4.13)を $D = 1$ として計算すると

$$\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] = 2R^2 \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa - 2R^2 \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa R)^2 e^{-\kappa^2/4}}{\kappa} d\kappa \quad (5.1)$$

を得る。(5.1)の右辺第1項の積分は、(3.18)を用いて計算すると

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa = \frac{1}{2} \quad (5.2)$$

を得る。(5.1)の右辺第2項の積分は、被積分関数を $J_2(\kappa R)^2 \kappa^{-1}$ と $e^{-\kappa^2/4}$ の積と見て、(3.16)を用いて部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa R)^2 e^{-\kappa^2/4}}{\kappa} d\kappa &= -\frac{1}{2} \left[e^{-\kappa^2/4} \{J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2\} \right]_0^\infty \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^\infty \kappa e^{-\kappa^2/4} [J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2] d\kappa \end{aligned} \quad (5.3)$$

を得る。ここで、(5.3)の右辺第1項の $[\dots]_0^\infty$ に注目する。 $\kappa \rightarrow \infty$ としたときは、 $J_\nu(\kappa)$ は(3.21)より $J_\nu(\kappa R) \rightarrow 0$ が成り立つ。また、 $\exp(-\kappa^2/4) \rightarrow 0$ であるから

$$\left[e^{-\kappa^2/4} \{J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2\} \right] \rightarrow 0, \quad \kappa \rightarrow \infty$$

が成り立つ. 一方, $\kappa = 0$ としたときは, $J_0(0) = 1, J_\nu(0) = 0, \nu \neq 0$ と $\exp(-0^2/4) = 1$ が成り立つ. したがって,

$$\left[e^{-\kappa^2/4} \{J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2\} \right] = 1, \quad \kappa \rightarrow 0$$

が成り立つ. 以上より, (5.3) の右辺第 1 項の $[\dots]_0^\infty$ は

$$\left[e^{-\kappa^2/4} \{J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2\} \right]_0^\infty = [0 - 1] = -1 \quad (5.4)$$

となる. (5.3) の右辺第 2 項については (3.19) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \kappa e^{-\kappa^2/4} [J_0(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2] d\kappa \\ &= \frac{4}{2} \exp\left(-\frac{(R^2 + R^2)}{4 \cdot \frac{1}{4}}\right) \left[I_0\left(\frac{4R^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{4R^2}{2}\right) \right] \\ &= 2 \exp(-2R^2) [I_0(2\pi R^2) + I_1(2\pi R^2)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

を得る. したがって, (5.4), (5.5) より, (5.1) の右辺第 2 項は

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{\kappa} J_1(\kappa R)^2 d\kappa = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2R^2} (I_0(2R^2) + I_1(2R^2)) \right] \quad (5.6)$$

となる. 以上より, (5.1) は (5.2) と (5.6) から

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] &= 2R^2 \cdot \frac{1}{2} - 2R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2R^2} (I_0(2R^2) + I_1(2R^2)) \right] \\ &= R^2 \exp(-2R^2) [I_0(2R^2) + I_1(2R^2)] \end{aligned}$$

となる. ■

5.2 $\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ 漸近挙動の導出 ((2.3) の証明)

$R \rightarrow \infty$ としたとき, 第 1 種変形 Bessel 関数 $I_\nu(2R^2)$ は (3.22) を用いて漸近展開できる. このことを用いて, (2.1) を漸近展開すると,

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] &\sim R^2 e^{-2R^2} \cdot \frac{e^{2R^2}}{(2 \cdot 2\pi R^2)^{1/2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(0)}{k! 2^{3k}} (2R^2)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(1)}{k! 2^{3k}} (2R^2)^{-k} \right] \\ &= \frac{R}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k! 2^{4k}} (\alpha_k(0) + \alpha_k(1)) \cdot R^{-2k} \right] \\ &= \frac{R}{2\sqrt{\pi}} \left[1 + 1 - \frac{-1 + (4-1)}{1! \cdot 2^4} R^{-2} + O(R^{-4}) \right] \\ &= \frac{R}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2^4} R^{-2} + O(R^{-4}) \right], \quad R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.7)$$

を得る. (4.12) より, $D = 1$ とすれば $\mathbf{E}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})] = R^2$ が得られる. このことを用いて, (5.7) から

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{1}{2^4} R^{-2} + O(R^{-4}) \right], \quad R \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

を得る. したがって, (2.3) が成り立つことが示された. そして, この式に R をかけ, $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

を得る. したがって, (1.6) より, 複素平面 \mathbb{C} 上の Ginibre 点過程 $(\Xi_{\text{Ginibre}}, K_{\text{Ginibre}}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C})})$ は Class I の超一様性を持つことが示された. ■

第6章 \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程の数分散 と超一様性 (命題 2.2 の証明)

第6章では, 命題 2.2 の証明を行い, 2次元複素空間 \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\mathbb{H}_2}, K_{\mathbb{H}_2}, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^2)})$ の数分散の厳密な表式と, $R \rightarrow \infty$ としたときの数分散の漸近展開形を導出し, Class I の超一様性を持つことを示す.

6.1 節では数分散の厳密な表式が (2.4) で与えられることを証明する. この証明は第7章で行う一般次元の場合の証明とは異なり, 各項の積分を計算して証明を行った.

6.2 節では, (2.4) に対し (3.22) を適用して, その漸近展開形が (2.5) で与えられることを証明する. そして, (2.5) から, \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程が Class I の超一様性を持つことを示す.

6.1 $\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]$ の厳密表式 (2.4) の導出

(4.13) を, $D = 2$ として計算すると

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})] &= \frac{2R^4}{\Gamma(2)} \int_0^\infty \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa^2/4}) d\kappa \\ &= 2R^4 \int_0^\infty \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa - 2R^4 \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa \end{aligned} \quad (6.1)$$

を得る. (6.1) の右辺第1項の積分は (3.18) を用いて計算すると

$$\int_0^\infty \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa = \frac{1}{4} \quad (6.2)$$

を得る. (6.1) の第2項の積分は, 被積分関数を $J_2(\kappa R)^2 \kappa^{-3}$ と $\kappa^2 e^{-\kappa^2/4}$ の積と見て, (3.16) を用いて部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa &= \left[\kappa^2 e^{-\kappa^2/4} \cdot \left(-\frac{(J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2)}{6\kappa^2} \right) \right]_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty \left(\frac{d}{d\kappa} \kappa^2 e^{-\kappa^2/4} \right) \cdot \left(-\frac{(J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2)}{6\kappa^2} \right) d\kappa \end{aligned} \quad (6.3)$$

を得る. ここで, (6.3) の右辺第1項の $[\dots]_0^\infty$ に注目すると, この部分は (5.3) の右辺第1項の $[\dots]_0^\infty$ と同様の形をしているため, 前章と同様の計算ができる. $\kappa \rightarrow \infty$ としたとき,

(3.21) より $J_\nu(\kappa R) \rightarrow 0$ が成り立つ. また, $\exp(-\kappa^2/4) \rightarrow 0$ である. $\kappa = 0$ としたときは, $J_0(0) = 1, J_\nu(0) = 0, \nu \neq 0$ と $\exp(-0^2/4) = 1$ が成り立つ. したがって,

$$\left[\kappa^2 e^{-\kappa^2/4} \cdot \left(-\frac{(J_2(\kappa R))^2 + J_1(\kappa R)^2}{6\kappa^2} \right) \right]_0^\infty = 0$$

を得る. また, (6.3) の第 2 項の微分を計算すると

$$\frac{d}{d\kappa} \kappa^2 e^{-\kappa^2/4} = (\kappa^2 - 4) \frac{\kappa e^{-\kappa^2/4}}{2}$$

を得る. したがって, (6.3) は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa &= - \int_0^\infty \frac{\kappa e^{-\kappa^2/4}}{12} (J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2) d\kappa \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{3\kappa} J_2(\kappa R)^2 d\kappa + \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{3\kappa} J_1(\kappa R)^2 d\kappa \end{aligned} \quad (6.4)$$

となる. ここで, (6.4) の両辺を比較すると, 右辺第 2 項に左辺の $1/3$ 倍が現れる. そこで, 右辺第 2 項を左辺に移項することにより

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa \\ = - \int_0^\infty \frac{\kappa e^{-\kappa^2/4}}{12} (J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2) d\kappa + \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{3\kappa} J_1(\kappa R)^2 d\kappa \end{aligned} \quad (6.5)$$

を得る. この式の両辺に $3/2$ をかければ左辺は (6.3) と等しくなる. つまり, (6.3) は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa \\ = - \int_0^\infty \frac{\kappa e^{-\kappa^2/4}}{8} (J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2) d\kappa + \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{2\kappa} J_1(\kappa R)^2 d\kappa \end{aligned} \quad (6.6)$$

となる. この 2 つの積分はどちらも計算することができる. (6.6) の右辺第 1 項の積分は, (3.19) を用いて計算すると

$$\int_0^\infty \frac{\kappa e^{-\kappa^2/4}}{8} (J_2(\kappa R)^2 + J_1(\kappa R)^2) d\kappa = \frac{1}{4} e^{-2R^2} (I_2(2R^2) + I_1(2R^2)) \quad (6.7)$$

を得る. (6.6) の右辺第 2 項の積分は, 第 5 章の $\text{var}[\Xi_{\text{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^{(2)})]$ の導出過程で得られた (5.6) に $1/2$ をかけたものと同様である. したがって, 前章の結果を利用することにより

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\kappa^2/4}}{2\kappa} J_1(\kappa R)^2 d\kappa = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2\pi R^2} (I_0(2\pi R^2) + I_1(2\pi R^2)) \quad (6.8)$$

を得る. 以上より, (6.1) は, (6.2), (6.7), (6.8) から

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})] &= 2R^4 \int_0^\infty \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa - 2R^4 \int_0^\infty e^{-\kappa^2/4} \frac{J_2(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa \\
 &= \frac{R^4}{2} - 2R^4 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2R^2} (I_0(2R^2) + I_1(2R^2)) - \frac{1}{4} e^{-2R^2} (I_2(2R^2) + I_1(2R^2)) \right] \\
 &= \frac{R^4 e^{-2R^2}}{2} [I_0(2R^2) + 2I_1(2R^2) + I_2(2R^2)]
 \end{aligned}$$

となる. ■

6.2 $\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]$ の漸近挙動の導出 ((2.5) の証明)

$R \rightarrow \infty$ としたとき, 第1種変形 Bessel 関数 $I_\nu(2R^2)$ は (3.22) を用いて漸近展開できる. このことを用いて (2.4) を漸近展開すると

$$\begin{aligned}
\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})] &\sim \frac{R^4 e^{-2R^2}}{2} \left[2 \cdot \frac{e^{2R^2}}{(2 \cdot 2\pi R^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(1)}{k! 2^{3k}} (2R^2)^{-k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{2R^2}}{(2 \cdot 2\pi R^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(0)}{k! 2^{3k}} (2R^2)^{-k} + \frac{e^{2R^2}}{(2 \cdot 2\pi R^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(2)}{k! 2^{3k}} (2R^2)^{-k} \right] \\
&= \frac{R^3}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k! 2^{4k}} (2\alpha_k(1) + \alpha_k(0) + \alpha_k(2)) R^{-2k} \right] \\
&= \frac{R^3}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{(2+1+1)}{0! \cdot 2^0} R^0 - \frac{2(4 \cdot 1 - 1^2) + (4 \cdot 0 - 1^2) + (4 \cdot 2^2 - 1^2)}{1! \cdot 2^4} R^{-2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(4 \cdot 1 - 1^2)(4 \cdot -3^2) + (4 \cdot 0 - 1^2)(4 \cdot 0 - 3^2) + (4 \cdot 2^2 - 1^2)(4 \cdot 2^2 - 3^2)}{2! \cdot 2^8} R^{-4} \right. \\
&\quad \left. + O(R^{-6}) \right] \\
&= \frac{R^3}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{5}{2^4} R^{-2} + \frac{21}{2^9} R^{-4} + O(R^{-6}) \right], \quad R \rightarrow \infty \tag{6.9}
\end{aligned}$$

を得る. (4.12) より, $D = 2$ とすれば $\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})] = R^4/2$ が得られる. このことを用いて, (6.9) から

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{5}{2^4} R^{-2} + \frac{21}{2^9} R^{-4} + O(R^{-6}) \right], \quad R \rightarrow \infty$$

を得る. したがって, (2.5) が成り立つことが示された. そして, この式に R をかけ, $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_2}(\mathbb{B}_R^{(4)})]} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

を得る. したがって, (1.6) より, 2次元複素空間 \mathbb{C}^2 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{\text{H}_2}, K_{\text{H}_2}, \lambda_{\text{N}(0,1;\mathbb{C}^2)})$ は Class I の超一様性を持つことが示された. ■

第7章 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族の数分散と超一様性

この章では, 第5章, 第6章の結果を一般の次元に拡張した結果として, D 次元複素空間 \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $(\Xi_{H_D}, K_{H_D}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)})$ に対し, その数分散の厳密な表式と, $R \rightarrow \infty$ としたときの数分散の漸近展開形を導出し, この行列式点過程が全ての $D \in \mathbb{N}$ に対して Class I の超一様性を持つことを示す. 本研究では, 数分散の厳密な表式を2つ導いた.

7.1節では, Bessel 関数の和で表された数分散の厳密な表式が (2.6) で与えられることを証明する.

7.2節では, もう1つの数分散の厳密な表式が (2.7) で与えられることを証明する.

7.3節では, (3.22) を (2.6) に適用して, 漸近展開形が (2.10) で与えられることを証明する. また, (2.9) が成り立つことを証明し, \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族が Class I の超一様性を持つことを示す.

7.4節では, (2.12) が成り立つことを証明する. この証明は行列式点過程の双対性 (duality) の関係 [8] を用いることで証明した.

7.1 定理 2.3 の (2.6) の証明

(4.13) の積分に注目し, 積分部を

$$A_n(R) := \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa R)^2}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置く. $A_n(R)$ の被積分関数を $J_n(\kappa R)^2 \kappa^{-2n+1}$ と $\kappa^{2n-2} (1 - e^{-\kappa^2/4})$ の積と見て, (3.16) を用いて部分積分を行うと

$$\begin{aligned} A_n(R) = & \left[-\frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{2(2n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right]_0^\infty \\ & + \frac{1}{2(2n-1)} \int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa^{2n-2}} \left[\frac{d}{d\kappa} \left\{ \kappa^{2n-2} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right\} \right] d\kappa \quad (7.1) \end{aligned}$$

と書ける. ここで, (7.1) の右辺第1項の $[\dots]_0^\infty$ に注目する. $k \rightarrow \infty$ としたときは, (3.21) より $J_\nu(kR) \rightarrow 0$ が成り立つ. また, $\exp(-\kappa^2/4) \rightarrow 0$ である. $k = 0$ としたときは, $J_0(x) =$

1, $J_\nu(x) = 0$, $\nu \neq 0$ と $\exp(-0^2/4) = 1$ が成り立つ。したがって

$$\left[-\frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{2(2n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right]_0^\infty = 0$$

を得る。また、右辺第2項の微分を計算すると

$$\frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^{2(n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right] = 2(n-1)\kappa^{2(n-1)-1} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) + \frac{1}{2}\kappa^{2(n-1)+1} e^{-\kappa^2/4}$$

を得る。以上の結果を用いて (7.1) は

$$\begin{aligned} A_n(R) &= \frac{n-1}{2n-1} \int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa \\ &\quad + \frac{1}{4(2n-1)} \int_0^\infty \kappa (J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2) e^{-\kappa^2/4} d\kappa \end{aligned} \quad (7.2)$$

となる。(7.2) の右辺第1項の積分は、 $A_n(R)$ の定義より $A_n(R)$ と $A_{n-1}(R)$ を用いて

$$\int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa = A_n(R) + A_{n-1}(R)$$

書ける。(7.2) の右辺第2項の積分は、(3.19) を用いて計算すると

$$\int_0^\infty \kappa (J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2) e^{-\kappa^2/4} d\kappa = 2e^{-2R^2} [I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)]$$

を得る。以上の結果を用いることで (7.2) は

$$A_n(R) = \frac{n-1}{2n-1} A_n(R) + \frac{n-1}{2n-1} A_{n-1}(R) + \frac{1}{2(2n-1)} e^{-2R^2} [I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)]$$

と書き直すことができる。この式を整理すれば次のような漸化式が得られる。

$$nA_n(R) - (n-1)A_{n-1}(R) = \frac{1}{2} e^{-2R^2} [I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)]$$

この漸化式を解いて、 $n \rightarrow D$ と直すことで

$$\begin{aligned} DA_D(R) &= \frac{1}{2} e^{-2R^2} \sum_{n=1}^D [I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)] \\ &= \frac{1}{2} e^{-2R^2} \left[I_0(2R^2) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2) \right] \end{aligned}$$

を得る. 以上より, $\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]$ は

$$\begin{aligned}\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] &= \frac{2R^{2D}}{(D-1)!} \cdot \frac{1}{2D} e^{-2R^2} \left[I_0(2R^2) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2) \right] \\ &= \frac{R^{2D} e^{-2R^2}}{D!} \left[I_0(2R^2) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2) \right]\end{aligned}$$

として得られる. ■

$D = 1, 2$ としたとき, その結果はそれぞれ (2.1), (2.4) の結果と一致する.

7.2 命題 2.4 の (2.7) の証明

$A_n(R)$ について, $n = D \in \mathbb{N}$ として

$$A_D(R) = A_D^{(1)}(R) - A_D^{(2)}(R),$$

$$A_D^{(1)}(R) = \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa, \quad A_D^{(2)}(R) = \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} e^{-\kappa^2/4} d\kappa$$

と置く. $A_D^{(1)}(R)$ は (3.18) を用いて計算すると

$$A_D^{(1)}(R) = \frac{1}{2D}$$

を得る. $A_D^{(2)}(R)$ は (3.20) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}A_D^{(2)}(R) &= \frac{(2R)^{2D}}{2^{2D+1} D^2 \Gamma(D)} {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2) \\ &= \frac{R^{2D}}{2D^2 \Gamma(D)} {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2)\end{aligned}$$

を得る. よって, $\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]$ は

$$\begin{aligned}\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] &= \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)} A_D(R) = \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)} \left[\frac{1}{2D} - \frac{R^{2D}}{2D^2 \Gamma(D)} {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2) \right] \\ &= \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} \left[1 - \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2) \right]\end{aligned}$$

として得られる. ■

7.3 定理 2.5 の証明

$R \rightarrow \infty$ としたとき, 第 1 種変形 Bessel 関数 $I_\nu(2R^2)$ は (3.22) を用いて漸近展開できる. このことを用いて (2.6) を漸近展開すると

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})] &\sim \frac{R^{2D} e^{-2R^2}}{D!} \left[\frac{e^{2R^2}}{(2\pi \cdot 2R^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{k! 2^{3k}} \cdot (2R^2)^{-k} \left(\alpha_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D) \right) \right\} \right] \\ &= \frac{R^{2D-1}}{2\sqrt{\pi} D!} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k! 2^{4k}} \cdot R^{-2k} \left(\alpha_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D) \right) \right], \quad R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.3)$$

を得る. ここで, $\beta_k^{(D)}$ を

$$\beta_k(D) := \alpha_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D)$$

と置き, (7.3) の両辺を (4.12) で割ると

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k^{(D)}}{k! 2^{4k}} R^{-2k} \quad (7.4)$$

を得る. $k=0$ のときは (3.23) より $\alpha_0(n) \equiv 0$ であるから

$$\begin{aligned} \beta_0(D) &= \alpha_0(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_0(n) + \alpha_0(D) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{D-1} 1 + 1 = 2D \end{aligned}$$

を得る. (7.4) は R^{-2k} の因子があるため, $R \rightarrow \infty$ の極限をとると $k=0$ の項のみが残り, それ以外の項は 0 となる. よって (7.4) の両辺に R をかけ, $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]} = R \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} (-1)^0 \frac{\beta_0(D)}{0! 2^{4 \cdot 0}} = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$$

が得られる. したがって, (2.9) が成り立つが示された. また, このとき (1.6) を満たすため, すべての $D \in \mathbb{N}$ に対して Class I の超一様性を持つことも示された.

一方, $k \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_k(n)$ には

$$\begin{aligned} \alpha_k(n+1) &= \prod_{\ell=-k+1}^k \{2(n+1) + 2\ell - 1\} = \prod_{\ell'=-k+2}^{k+1} (2n + 2\ell' - 1) \\ &= \frac{2n + 2k + 1}{2n - 2k + 1} \alpha_k(n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

という関係式が成り立つ。 \mathbb{N}_0 は 0 を含む自然数全体の集合を表す。この式は $(2n + 2k + 1)\alpha_k(n) = (2n - (2k - 1))\alpha_k(n + 1)$ と変形できる。さらに式変形を行うと

$$\begin{aligned} (2n + 2k + 1)\alpha_k(n) &= (2n - (2k - 1))\alpha_k(n + 1) \\ \Leftrightarrow (\alpha_k(n) + \alpha_k(n + 1)) &= 2[(n + 1)\alpha_k(n + 1) - n\alpha_k(n)] / (2k + 1) \end{aligned}$$

を得る。この式の両辺に対して、0 から $D - 1$ まで和をとれば

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{D-1} (\alpha_k(n) + \alpha_k(n + 1)) &= \sum_{n=0}^{D-1} \frac{2[(n + 1)\alpha_k(n + 1) - n\alpha_k(n)]}{2k + 1} \\ &= \frac{2}{2k + 1} [(\alpha_k(1) - 0) + \dots + (D\alpha_k(D) - (D - 1)\alpha_k(D - 1))] \\ &= \frac{2D}{2k + 1} \alpha_k(D) \end{aligned}$$

を得る。このとき、左辺の和は

$$\sum_{n=0}^{D-1} (\alpha_k(n) + \alpha_k(n + 1)) = \alpha_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D)$$

と書けるため、 $\beta_k(D)$ は $\alpha_k(D)$ を用いて

$$\beta_k(D) = \alpha_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D) = \frac{2D}{2k + 1} \alpha_k(D)$$

と書ける。以上のことから、

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathbb{H}_D}(\mathbb{B}_R^{(2D)})]} &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2D}{2k + 1} \cdot \frac{\alpha_k(D)}{k!2^{4k}} R^{-2k} \\ &= \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(D)}{(2k + 1)k!2^{4k}} R^{-2k} \end{aligned}$$

が成り立つことが示された。 ■

注 3 Heisenberg 点過程族の数分散の漸近展開形の各項の係数を $\gamma_k^{(D)} := \alpha_k(D) / \{(2k + 1)k!2^{4k}\}$ とすれば、 $k = 0, 1, 2, 3$, に対する $\gamma_k^{(D)}$ は

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(D)} &= \frac{\alpha_0(D)}{1 \cdot 0!2^0} = 1, \\ \gamma_1^{(D)} &= \frac{\alpha_1(D)}{1 \cdot 1!2^4} = \frac{1}{3 \cdot 2^4} (2D - 1)(2D + 1), \\ \gamma_2^{(D)} &= \frac{\alpha_2(D)}{2 \cdot 2!2^8} = \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 2^8} (2D - 3)(2D - 1)(2D + 1)(2D + 3), \\ \gamma_3^{(D)} &= \frac{\alpha_3(D)}{3 \cdot 3!2^{12}} = \frac{1}{7 \cdot 3! \cdot 2^{12}} (2D - 5)(2D - 3)(2D - 1)(2D + 1)(2D + 3)(2D + 5) \end{aligned}$$

として得られる. 各係数に次元に対応した数の積が規則的に現れていることから, これらの係数は Heisenberg 点過程の構造的な意味を表している可能性がある.

7.4 命題 2.6 の (2.12) の証明

付録 A の (A.7) で定義した Bargmann-Fock 空間 \mathcal{F}_D の完備正規直交系は (A.8) で与えられている. ここで, 多変数拡張された $n = (n^{(1)}, \dots, n^{(D)})$, $m = (m^{(1)}, \dots, m^{(D)}) \in \mathbb{N}_0^D$, $R > 0$ に対して

$$K_{\Delta_R^{(D)}}(n, m) := \int_{\Delta_R^{(D)}} \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(x) \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx) \quad (7.5)$$

で与えられるような相関核を持つ D 次元数直線 \mathbb{N}_0^D 上の行列式点過程 $\Xi_{\Delta_R^{(D)}}$ を考える. D 次元数直線 \mathbb{N}_0^D とは, D 本の数直線 \mathbb{N}_0 が平行に並ぶ座標系を表す. 文献 [8] の [Theorem 2.6] によれば, 行列式点過程における双対性の関係の一般論から

$$\mathbf{P}(\Xi_{\mathbb{H}_D}(\Delta_R^{(D)}) = k) = \mathbf{P}(\Xi_{\Delta_R^{(D)}}(\mathbb{N}_0^D) = k) \quad (7.6)$$

が成り立つ. この等式は, \mathbb{C}^D 上の Heisenberg 点過程族 $\Xi_{\mathbb{H}_D}$ について, 領域 $\Delta_R^{(D)}$ に含まれる点の数が k 個である確率と, 行列式点過程 $\Xi_{\Delta_R^{(D)}}$ について, D 本の数直線 \mathbb{N}_0^D に含まれる点の数が k 個である確率が等しいことを表す. (A.8) より, 行列式点過程 $\Xi_{\Delta_R^{(D)}}$ の相関核 (7.5) は, 計算すると

$$\begin{aligned} K_{\Delta_R^{(D)}}(n, m) &= \int_{\Delta_R^{(D)}} \frac{\bar{x}^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{x}^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{\pi^D} e^{-|x|^2} dx \\ &= \prod_{\ell=1}^D \frac{1}{\pi \sqrt{n! m!}} \int_{\mathbb{B}_R^{(2)}} \bar{x}^n x^m e^{-|x|^2} dx \end{aligned}$$

を得るが, この積分は

$$\int_{\mathbb{B}_R^{(2)}} \bar{x}^n x^m e^{-|x|^2} dx = 2\pi \delta_{nm} \int_0^R e^{-s^2} s^{1+n+m} ds$$

が成り立つ. このことを用いて $s^2 \rightarrow u$ と変数変換を行い,

$$p_{n^{(\ell)}}(R) := \int_0^{R^2} \frac{u^k e^{-u}}{k!} du = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{R^{2j} e^{-R^2}}{j!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

を用いて計算すると

$$K_{\Delta_R^{(D)}}(n, m) = \delta_{nm} \prod_{\ell=1}^d p_{n^{(\ell)}}(R), \quad n, m \in \mathbb{N}_0^D$$

を得る [8]. このとき, 確率 $p \in \{0, 1\}$ の Bernoulli 測度 $\mu_p^{\text{Bernoulli}}$ を用いて, \mathbb{N}_0^D 上の行列式点過程 $(\Xi_{\Delta_R^{(D)}}, K_{\Delta_R^{(D)}})$ は, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0^D}$ であるような直積 $\bigotimes_{\ell=1}^D \bigotimes_{n^{(\ell)} \in \mathbb{N}_0} \mu_{p_{n^{(\ell)}(R)}}^{\text{Bernoulli}}$ といえる. また, \mathbb{N}_0^D の多変量冪集合であるともいえる.

ここで, ランダム変数の級数 $Y_{n^{(\ell)}}^{(R)} \in \{0, 1\}, n^{(\ell)} \in \mathbb{N}_0, \ell = 1, \dots, D$ を導入すれば, これは互いに独立で, $Y_{n^{(\ell)}}^{(R)} \sim \mu_{p_{n^{(\ell)}(R)}}^{\text{Bernoulli}}$ が成り立つ. このとき, 双対性の関係 (7.6) から

$$\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)}) \stackrel{\text{d}}{=} \Xi_{\Delta_R^{(D)}}(\mathbb{N}_0^D) \stackrel{\text{d}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \prod_{\ell=1}^D Y_{n^{(\ell)}}^{(R)}$$

が成り立つ. このことから, D 次元多円板 $\Delta_R^{(D)}$ を領域したときの Heisenberg 点過程族 $\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})$ について, その領域に含まれる点の数の期待値と数分散は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})] &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \prod_{\ell=1}^D p_{n^{(\ell)}}(R) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R) \right)^D, \\ \text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})] &= \text{var} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \prod_{\ell=1}^D Y_{n^{(\ell)}}^{(R)} \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \text{var} \left[\prod_{\ell=1}^D Y_{n^{(\ell)}}^{(R)} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \left[\prod_{\ell=1}^D p_{n^{(\ell)}}(R) - \left(\prod_{\ell=1}^D p_{n^{(\ell)}}(R) \right)^2 \right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R) \right)^D - \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R)^2 \right)^D \end{aligned}$$

と書ける. このことから,

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]} = 1 - \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R)} \right)^D$$

が得られる. $D = 1$ のときは, $\Delta_R^{(1)}$ は半径 R の円板 $\mathbb{D}_R \subset \mathbb{C}$ と同一視出来るため, $\Delta_R^{(1)}$ は $\mathbb{B}_R^{(2)} \subset \mathbb{R}$ と同一視できる. よって,

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_1}(\Delta_R^{(1)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_1}(\Delta_R^{(1)})]} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(R)} = \frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]} = 1 - \left(1 - \frac{\text{var}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\text{H}_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]} \right)^D$$

を得る. この式に (2.3) を代入すれば, $-R^{-1}(1 - 2^{-4}R^{-2})/\sqrt{\pi} + O(R^{-4})$ についての Taylor 展開を行うことができる. この Taylor 展開を計算すると

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\text{var}[\Xi_{H_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{H_1}(\mathbb{B}_R^{(2)})]}\right)^D &\sim \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}R^{-1} \left(1 - \frac{1}{2^4}R^{-2}\right) + O(R^{-4})\right\}^D \\
&= 1 - \frac{D}{\sqrt{\pi}}R^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^4}R^{-2}\right) - \frac{(D-1)}{2\sqrt{\pi}}R^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(D-1)(D-2)}{6\pi}R^{-2} + O(R^{-3}) \right\} \\
&= 1 - \frac{D}{\sqrt{\pi}}R^{-1} \left[1 - \frac{D-1}{2\sqrt{\pi}}R^{-1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(D-1)(D-2)}{3\pi} - \frac{1}{8} \right\} R^{-2} + O(R^{-3}) \right]
\end{aligned}$$

を得る. よって, (2.12) が成り立つことが示された. また, (2.12) に対して, $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\text{var}[\Xi_{H_D}(\Delta_R^{(D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{H_D}(\Delta_R^{(D)})]} = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$$

が成り立つ. したがって, (1.6) より, 異なる領域 $\Delta_R^{(D)}$ で数分散の評価を行っても Class I の超一様性を持つことが示された. ■

付録 A Heisenberg 点過程族の表現論

ここでは, 文献 [5, 12, 7] に基づいて Heisenberg 群について説明を行い, 定義 1.1 により定められる Heisenberg 点過程族がなぜこのようによばれるのかを説明する.

D 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^D , $D \in \mathbb{N}$ における単一粒子の量子力学的な運動を考える. これは, $D = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ としたときは 3 次元ユークリッド空間上の k 個の粒子の系となる. この系の位相空間は \mathbb{R}^{2D} 次元の座標 $(p, q) = (p_1, \dots, p_D, q_1, \dots, q_D)$ で与えられるが, いま, このような位相空間に時間 τ を加えた座標 $(p, q, \tau) = (p_1, \dots, p_D, q_1, \dots, q_D, \tau)$ で表される $2D + 1$ 次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^{2D+1} を考える.

Heisenberg Lie 環 \mathfrak{h}_D とは

$$[(p, q, \tau), (p', q', \tau')] = (0, 0, p \cdot q' - q \cdot p') = (0, 0, [(p, q), (p', q')])$$

で与えられる Lie 括弧で定義される交換関係で定められる Lie 環である. 上の式の $[(p, q), (p', q')] = p \cdot q' - q \cdot p'$ は, 古典力学あるいは量子力学における交換関係 $[A, B] := AB - BA$ の Poisson 括弧である.

\mathbb{R}^{2D+1} 上の Heisenberg 群 H_D とは

$$XX' = X + X' + \frac{1}{2}[X, X'], \quad X, X' \in \mathbb{R}^{2D+1}$$

の群則を満たす

$$(p, q, \tau)(p', q', \tau') = \left(p + p', q + q', \tau + \tau' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - q \cdot p') \right)$$

で表される Lie 群である. Heisenberg 群 H_D が Lie 群である理由は, Lie 括弧の交換関係 $(p \cdot q' - q \cdot p')/2$ が上の式に含まれているためである.

ここで $L^2(\mathbb{R}^D)$ を \mathbb{R}^D 上の 2 乗可積分な関数の集合とし, そのような集合に含まれる関数 f, g の内積は $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_D) \in \mathbb{R}^D$ と \mathbb{R}^D 上の Lebesgue 測度 $d\zeta$ を用いて

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} := \int_{\mathbb{R}^D} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} d\zeta. \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^D)$$

と与えられる. 2 乗ノルムは

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^D)} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^D)$$

と与えられる. ここで, f を滑らかな関数として, 演算子 X_i と D_i を

$$(X_i f)(\zeta) = \zeta_i f(\zeta), \quad (D_i f)(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}(\zeta), \quad i = 1, \dots, D$$

と定義する. これら演算子は

$$[X_i, D_j] = \frac{\sqrt{-1}}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, D$$

の交換関係を満たす. この交換関係は量子力学における正準交換関係 $[Q_i, P_i] = \sqrt{-1}\hbar\delta_{ij}$ を表していて, Planck 定数 \hbar を $1/2$ とすれば $[X_i, D_j]$ と一致する.

ここで $X := (X_1, \dots, X_D)$, $D := (D_1, \dots, D_D)$, I を恒等写像演算子とし,

$$\rho(p, q, \tau) = e^{2\sqrt{-1}(p \cdot D + q \cdot X + \tau I)}$$

で定義される H_D から $L^2(\mathbb{R}^D)$ 上のユニタリ演算子への写像を考える. この写像は

$$\rho(p, q, \tau)f(\zeta) = e^{2\sqrt{-1}(\tau + q \cdot \zeta + p \cdot q/2)} f(\zeta + p), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^D) \quad (\text{A.1})$$

と表すことができる. ρ は H_D の Schrödinger 表現とよばれ, この写像 $\rho(p, q, \tau)f(\zeta)$ は H_D のユニタリ表現となっている. この写像の核, すなわち ρ が恒等写像 1 になるのは, $\{(0, 0, k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ となるとき, つまり $e^{2\pi k \sqrt{-1} I} = 1$ となるときである. この周期性を持つ部分 $e^{2\sqrt{-1}\tau}$ を除いた群を reduced Heisenberg 群 H_D^{red} といい,

$$H_D^{\text{red}} := H_D / \{(0, 0, k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

と表す.

$\rho(p, q, \tau)$ は $L^2(\mathbb{R}^D)$ 上のユニタリ演算子となることから, これの行列表現を考える. このことは, $(f, g) \in (L^2(\mathbb{R}^D))^2$ における $\rho(p, q, \tau)$ の行列の係数を計算することと等しい. この行列の係数を計算すると, 行列表現として

$$\begin{aligned} M_{f,g}(p, q, \tau) &:= \langle \rho(p, q, \tau)f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} \\ &= e^{2\sqrt{-1}\tau} \int_{\mathbb{R}^D} e^{2\sqrt{-1}q \cdot \zeta} f\left(\zeta + \frac{p}{2}\right) \overline{g\left(\zeta - \frac{p}{2}\right)} d\zeta \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

が得られる. これは関数 f, g についての Fourier–Wigner 変換とよばれる [5].

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^D)$ を用いて, $L^2(\mathbb{R}^{2D})$ における M_{f_1, g_1} と M_{f_2, g_2} の内積は

$$\begin{aligned} \langle M_{f_1, g_1}, M_{f_2, g_2} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2D})} &:= \int_{\mathbb{R}^D} dp \int_{\mathbb{R}^D} dq M_{f_1, g_1}(p, q, \tau) \overline{M_{f_2, g_2}(p, q, \tau)} \\ &= \pi^D \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} \overline{\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と書ける. ここで (2.11) を用いて $g_1 = g_2 = G$ と置き, 複素変数を

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)}) := p + \sqrt{-1}q = (p^{(1)} + \sqrt{-1}q^{(1)}, \dots, p^{(D)} + \sqrt{-1}q^{(D)}) \in \mathbb{C}^D \quad (\text{A.4})$$

と定義し, Bargmann 変換とよばれる積分変換を

$$\mathbf{B}[f](x) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{D/4} \int_{\mathbb{R}^D} f(\zeta) e^{2\zeta \cdot x - \zeta^2 - x^2/2} d\zeta, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^D) \quad (\text{A.5})$$

と定義した場合, (A.2) と (A.3) は

$$\begin{aligned} M_{f,G}(p, q, \tau) &= e^{2\sqrt{-1}\tau} \frac{e^{-|x|^2/2}}{\pi^{D/2}} \mathbf{B}[f](x) \\ \langle M_{f_1,G}, M_{f_2,G} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2D})} &= \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} \\ &= \langle \mathbf{B}[f_1], \mathbf{B}[f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})}, \quad f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^D) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる. ここで, \mathbb{C}^D 上の測度 $\lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}$ は (1.7) によって定義されていることから, \mathbb{C}^D 上の内積は関数 $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{C}^D)$ を用いて

$$\langle F_1, F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} := \int_{\mathbb{C}^D} F_1(x) \overline{F_2(x)} \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx)$$

と書ける. 2乗ノルムは

$$\|F\|_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} := \sqrt{\langle F, F \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})}}$$

と書ける. (A.5) の積分は, \mathbb{C}^D 上のコンパクトな部分集合中の x に対して一様に収束する. したがって, $\mathbf{B}[f]$ は \mathbb{C}^D 上の整関数 (正則関数) である. このことから, 関数 F を用いて Bargmann-Fock 空間 \mathcal{F}_D を

$$\mathcal{F}_D := \left\{ F : F \text{ は } \mathbb{C}^D \text{ 上の整関数であり } \|F\|_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} < \infty \right\} \quad (\text{A.7})$$

と定義する. このとき, (A.6) は Bargmann 変換が $L^2(\mathbb{R}^D)$ から $\mathbf{B}[f] \in L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbf{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ への, あるいは \mathcal{F}_D への等長変換 (isometry) であることを表している. Heisenberg 群 \mathbf{H}_D の Bargmann-Fock 表現 β は (A.4) を用いて

$$\beta(x, \tau) \mathbf{B} = \mathbf{B} \rho(p, q, \tau)$$

と定義する. これにより, $L^2(\mathbb{R}^D)$ 上の Heisenberg 群 \mathbf{H}_D の Schrödinger 表現 $\rho(p, q, \tau)$ は, \mathcal{F}_D における \mathbf{H}_D の Bargmann-Fock 表現 β の Bargmann 変換で移送できる. このことから, (A.1) は

$$\beta(y, \tau) F(x) = e^{2\sqrt{-1}\tau - |y|^2/2 - x \cdot \bar{y}} F(x + y), \quad y \in \mathbb{C}^D, \quad F \in \mathcal{F}_D$$

と写像される.

ここで, $n = (n^{(1)}, \dots, n^{(D)}) \in \mathbb{N}_0^D$ と $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)}) \in \mathbb{C}^D$ に対して

$$n! := \prod_{\ell=1}^D n^{(\ell)}!,$$

$$x^n := \prod_{\ell=1}^D (x^{(\ell)})^{n^{(\ell)}}$$

として, Bargmann-Fock 空間 \mathcal{F}_D の完備正規直交系を

$$\varphi_n(x) := \frac{x^n}{\sqrt{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}_0^D, \quad x \in \mathbb{C}^D \quad (\text{A.8})$$

と与える. この系は完備正規直交系であるため, 内積は

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} = \delta_{nm} := \prod_{\ell=1}^D \delta_{n^{(\ell)}m^{(\ell)}}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0^D$$

となる. よって, 次のような関数

$$k_y(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)} = \prod_{\ell=1}^D \sum_{n^{(\ell)} \in \mathbb{N}_0} \frac{(x^{(\ell)})^{n^{(\ell)}} (\overline{y^{(\ell)}})^{n^{(\ell)}}}{n^{(\ell)}!} = \prod_{\ell=1}^D e^{x^{(\ell)} \overline{y^{(\ell)}}}$$

$$= e^{x \cdot \overline{y}} \quad (\text{A.9})$$

を定義すると

$$F(y) = \langle F, k_y \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathbb{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} \quad \forall F \in \mathcal{F}_D, \quad \forall y \in \mathbb{C}^D$$

が成り立つ. F と k_y の内積をとると $F(y)$ に戻ることから, この $k_y(x)$ を \mathcal{F}_D における再生核 (reproducing kernel) という. これは定義 1.1 で与えられた相関核 $K_{\mathbb{H}_D}$ (1.8) と同一である.

以上のことをまとめると,

$$\begin{aligned} \text{Heisenberg 群} &\rightarrow \text{Schrödinger 表現の行列表示} \\ &\rightarrow \text{Bargmann-Fock 表現} \\ &\rightarrow \text{Bargmann-Fock 空間 } \mathcal{F} \text{ の再生核 } k_y(x) \\ &= \text{Heisenberg 点過程の相関核 } K_{\mathbb{H}_D}(x, y) \end{aligned}$$

となる. これが Heisenberg 点過程族とよばれる理由である.

参考文献

- [1] 森口 繁一, 一松 信, 宇田川 銈久, 1987, 岩波数学公式 III 特殊関数, 岩波書店
- [2] Abreu, L. D., Gröchenig, K., Romero, J. L., 2016, On accumulated spectrograms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**, 3629–3649
- [3] Abreu, L. D., Gröchenig, K., Romero, J. L., 2019, Harmonic analysis in phase space and finite Weyl–Heisenberg ensembles, *J. Stat. Phys.* **174**, 1104–1136
- [4] Abreu, L. D., Pereira, J. M., Romero, J. L., Torquato, S., 2017, The Weyl–Heisenberg ensemble: hyperuniformity and higher Landau levels, *J. Stat. Mech. Theor. Exp.* 043103
- [5] Folland, G. B., 1989, *Harmonic Analysis in Phase Space*, *Annals of Mathematics Studies* No. 122 (Princeton, NJ: Princeton University Press, Princeton)
- [6] Ginibre, J., 1965, Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices, *J. Math. Phys.* **6**, 440–449
- [7] Gröchenig, K., 2001, *Foundations of Time-Frequency Analysis* (New York: Springer Science+Business Media, LLC)
- [8] Katori, M., Shirai, T.: Partial isometries, duality, and determinantal point processes. [arXiv:PR/1903.04945](https://arxiv.org/abs/1903.04945)
- [9] Mehta, M. L., 2004, *Random Matrices*, 3rd edn, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 142 (Amsterdam, Elsevier/Academic Press)
- [10] Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., Clark, C. W. (eds), 2010; *NIST Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC/ Cambridge University Press, Cambridge; available at <http://dlmf.nist.gov>
- [11] Shirai, T., 2006, Large deviations for the fermion point process associated with the exponential kernel, *J. Stat. Phys.* **123**, 615–629
- [12] Stein, E. M., 1993, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals* (Princeton, NJ: Princeton University Press)

- [13] Torquato, S., 2018, Hyperuniform states of matter. *Phys. Rep* **745**, 1–95
- [14] Torquato, S., Scardicchio, A., Zachary, C. E., 2008: Point processes in arbitrary dimension from Fermionic gases, random matrix theory, and number theory, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* P11019
- [15] Torquato, S, Stillinger, F. H, 2003; Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics *Phys. Rev. E* **68**, 041113