

2007年度 修士論文

## 1次元量子ウォークの多状態極限

Large Qudit Limit of One-dimensional Quantum  
Walks

中央大学大学院 理工学研究科  
博士課程前記課程 物理学専攻  
佐藤 充規

# 謝辞

指導教官の香取眞理先生には3年間、研究の進め方や発表の仕方、論文作成など丁寧にご指導いただきました。就職活動の際も励ましの言葉を掛けていただき研究のみならず様々な面で感謝致しております。

横浜国立大学の今野紀雄先生には最新の研究についての報告など、論文を作成する際に助言を頂きました。香取研の小林奈央樹さんには、研究についての助言や論文作成にあたり指摘を頂きました。香取研の先輩である宮崎玄洋さんには研究で必要とされるソフトの操作方法やプログラムの使い方等、丁寧に教えて頂きました。感謝致しております。竹山協三先生、宗行英朗先生には修士論文の副査をして頂きました。松下貢先生には3年間セミナー等でお世話になり、人生への貴重な助言をいただきました。同室の中野先生、中野研の皆さん、香取研の大谷論君、和泉南さんには折に触れお世話になりました。また香取研の渡部恭平君とは研究についての意見を交わし様々な面で支えて頂き充実した研究生生活を送ることが出来ました。両親、親戚には経済面で非常に迷惑をかけました。

たくさんの方々のご支援があって修士論文をまとめるに至りました。ありがとうございます。

# 第1章 introduction

量子ウォークは量子的な拡散過程模型の一つであるが、量子情報理論や固体物理への応用など様々な面において研究がなされ、応用の裾野を広げている [1]. 一次元量子ウォーク模型は量子ビットを持ったウォーカーが一次元格子  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  上を量子コイン (ユニタリ行列) の振る舞いに従ってその内部状態を変化させながら移動していくものとして定義される. 孤立系の時間発展はどのような場合でも波動関数のユニタリ変換として表されるという量子力学の要請により、量子ウォークもユニタリ変換により時間発展する. 標準模型 (2成分模型) では、時刻  $t$  での量子ウォーカーの位置を  $X_t$  としたときのウォーカーの擬速度  $X_t/t$  の任意のモーメントが  $t \rightarrow \infty$  の長時間極限で収束することが今野によって初めて証明され、擬速度の分布は今野分布関数

$$\mu(x; a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \mathbf{1}_{\{|x|<|a|\}} \quad (1.1)$$

で与えられることが知られている [11, 12]. 一般に量子ウォークは古典ランダムウォークと異なる拡散の振る舞いをする. 古典ランダムウォークでは時刻  $t$  での標準偏差は  $\sqrt{t}$  で与えられるのに対し、量子ウォークの偏差は  $t$  で与えられる. 量子ウォーカーは速度を持ち [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], その擬速度の確率分布について研究されているのである [11, 12, 13, 14, 15, 16].

本論文では [15] によって導入された 1 次元格子  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  上の離散時間の多成分量子ウォークについて考える. この模型は半整数  $j = 1/2, 1, 3/2, \dots$  で指定され、量子ウォーカーの状態は規格化  $\sum_{x \in \mathbf{Z}} |\Psi^{(j)}(x, t)|^2 = 1$  された  $(2j+1)$  個の成分をもつ波動関数

$$\Psi^{(j)}(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_j^{(j)}(x, t) \\ \psi_{j-1}^{(j)}(x, t) \\ \vdots \\ \psi_{-j+1}^{(j)}(x, t) \\ \psi_{-j}^{(j)}(x, t) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{Z}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

によって記述される. 量子コインは  $(2j+1) \times (2j+1)$  ユニタリ行列  $R^{(j)}$  で表される. 行列  $R^{(j)}$  の  $(m, m')$  成分を  $R_{mm'}^{(j)}$  と表記する. また本論文においては、行列やベクトルの添え字は  $j$  から  $-j$  まで大きい値から小さい値に 1 つずつ減る順番に並べて記すものにする. 各ステップで  $(2j+1)$  成分波動関数は量子コインによって混ぜられ、ウォーカーは  $(2j+1)$

個の格子点へ移動する.

$$\psi_m^{(j)}(x, t+1) = \sum_{m'=-j}^j R_{mm'}^{(j)} \psi_{m'}^{(j)}(x+2m, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

量子コインとしてウィグナーの回転行列 [17, 18] を用いる. ウィグナーの回転行列はオイラー角とよばれる 3 つのパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  によって指定され

$$R_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha m} r_{mm'}^{(j)}(\beta) e^{-i\gamma m'}$$

で与えられる. ここで,

$$r_{mm'}^{(j)}(\beta) = \sum_{\ell} \Gamma(j, m, m', \ell) \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j+m-m'-2\ell} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{2\ell+m'-m}$$

$$\Gamma(j, m, m', \ell) = (-1)^{\ell} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j-m'-\ell)!(j+m-\ell)!\ell!(\ell+m'-m)!}$$

である.  $\ell$  についての和  $\sum_{\ell}$  は階乗の引数が正または 0 (ただし  $0! = 1$  とする) になるようなすべての  $\ell$  について和をとるものとする. 時刻  $t$  での量子ウォーカーの位置を  $X_t^{(j)}$  と書き, 時刻  $t$  で  $X_t^{(j)} = x$  である確率は

$$\text{Prob}(X_t^{(j)} = x) = P(x, t) = |\Psi^{(j)}(x, t)|^2$$

で与えられるものと定義する. ウォーカーの擬速度 [14]  $X_t/t$  の  $r$ -モーメントは次式で与えられる.

$$\left\langle \left( \frac{X_t}{t} \right)^r \right\rangle = \sum_{x \in \mathbf{Z}} \left( \frac{x}{t} \right)^r P(x, t)$$

簡単のため, 時刻  $t = 0$  で量子ウォーカーは初期量子ビット

$$\phi_0^{(j)} = T(q_j, q_{j-1}, \dots, q_{-j+1}, q_{-j}) \quad (1.3)$$

をもち, 原点にいるとする.

$$\Psi^{(j)}(x, 0) = \phi_0^{(j)} \delta_{x0}$$

但し  $q_m \in \mathbf{C}$ ,  $\sum_{m=-j}^j |q_m|^2 = 1$  である.

先行論文 [15] でこの模型の擬速度の  $r$ -次モーメントが長時間極限で弱収束し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X_t^{(j)}}{t} \right)^r \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv v^r \nu^{(j)}(v), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

と得られている. したがって擬速度の極限分布は

$$\nu^{(j)}(v) = \sum_{m: 0 < m \leq j} \frac{1}{2m} \mu \left( \frac{v}{2m}; \cos \frac{\beta}{2} \right) \mathcal{M}^{(j, m)} \left( \frac{v}{2m} \right) + \mathbf{1}_{\{(2j+1) \text{ is odd}\}} \Delta^{(j)} \delta(v) \quad (1.4)$$

で与えられる. ここで  $\mathcal{M}^{(j,m)}(x)$  は  $x$  について  $2j$ -次の多項式を表す. つまり長時間極限でのウォーカーの擬速度の分布は適切にスケール変換された今野分布関数 (1.1) と重み関数  $\mathcal{M}^{(j,m)}(v/2m)$  で書き表され,  $(2j+1)$  が奇数のときは原点にデルタ関数加わる. 先行論文 [15] では多項式  $\mathcal{M}^{(j,m)}(x)$  の陽な形が  $j = 1/2, 1, 3/2$  に対して計算されている.

本論文は以下のように構成されている. 第2章では  $(2j+1)$ -次多項式の行列表現と行列成分間の漸化式についての結果を示す. 第3章では  $j = 11/2$  に対しての量子ウォークのシミュレーションと重み行列を用いた数値計算を比較し, より大きな  $j$  に関する極限分布の性質を説明する. 第4章では研究のまとめと今後の展望について議論する.

## 第2章 重み関数について

### 2.1 行列表示

重み関数  $\mathcal{M}^{(j,m)}$  は  $(2j+1) \times (2j+1)$  のエルミート行列  $\mathbf{M}^{(j,m)}(x)$  と初期量子ビット (1.3) を用いて次のようにあらわせる.

$$\mathcal{M}^{(j,m)}(x) = [\phi_0^{(j)}]^\dagger \mathbf{M}^{(j,m)}(x) \phi_0^{(j)}$$

Appendix A に,  $j = 1/2, 1, 3/2$  についての行列  $\mathbf{M}^{(j,m)}(x) = (\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)}(x))$  の表示を与えておいた. 一般に,

$$\overline{\mathbf{M}}_{m_2 m_1}^{(j,m)} = \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)} \quad -j \leq m_1, m_2 \leq j \quad (\text{エルミート性}) \quad (2.1)$$

と

$$\mathbf{M}_{-m_2 -m_1}^{(j,m)}(x) = (-1)^{(m_1+m_2+2m)} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)}(-x) \quad -j \leq m_1, m_2 \leq j \quad (2.2)$$

が成り立つ. さらに指標  $m_1$  と  $m_2$  が条件

$$m_1 \leq m_2 \quad \text{and} \quad m_1 \geq -m_2 \quad (2.3)$$

を満たすならば, その行列成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)}(x) &= \frac{1}{2^{2j-1}} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ &\times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \\ &\times f_\tau^{(m_2-m_1)}(x) e^{-i(m_2-m_1)\gamma} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで和  $\sum_{\ell_1}$  と  $\sum_{\ell_2}$  は階乗の引数が正または0 (ただし  $0!=1$  とする) になるようなすべての  $\ell_1, \ell_2$  について和をとり,  $k_1$  と  $k_2$  についての和の上限  $A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}$ ,  $B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}$  は

$$A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)} = 2j - (m - m_1) - (\ell_1 + \ell_2), \quad B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)} = (m - m_2) + (\ell_1 + \ell_2) \quad (2.5)$$

であるとする. また

$$f_\tau^{(a)}(x) = \sum_{k_0=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \binom{a}{2k_0} \binom{k_0}{k_1} \binom{k_1}{k_2} (-1)^{k_0+k_1} \tau^{a-2(k_0-k_2)} x^{a-2(k_0-k_1)} \quad (2.6)$$

とする.  $f_\tau^{(a)}$  は実関数で, 偶奇性  $f_\tau^{(a)}(-x) = (-1)^a f_\tau^{(a)}(x)$  をもつ. 例をあげると,  $f_\tau^{(1)}(x) = \tau x$ ,  $f_\tau^{(2)}(x) = (2\tau^2 + 1)x^2 - 1$ ,  $f_\tau^{(3)}(x) = (4\tau^3 + 3\tau)x^3 - 3\tau x$ ,  $f_\tau^{(4)}(x) = (8\tau^4 + 8\tau^2 + 1)x^4 - (8\tau^2 + 2)x^2 + 1$  となる. (2.4) の導出は Appendix B を参照. (2.4) にエルミート性 (2.1) と対称な性質 (2.2) を用いることで, 任意の  $j = 1/2, 1, 3/2, \dots$ ,  $-j \leq m \leq j$ , に対して行列  $\mathbf{M}^{(j,m)}(x)$  の全ての成分が決定される.

## 2.2 漸化式

Appendix C に示すように, 指標  $m_1$  と  $m_2$  が条件 (2.3) を満たす行列成分 ( $\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x)$ ) に対して漸化式

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x) &= \frac{1}{2} c(j; m_1, m_2) (1-x) \mathbf{M}_{m_1-1/2, m_2-1/2}^{(j-1/2, j-1/2)}(x) \mathbf{1}_{\{m_1 \neq -j\}} \\ &\quad + \frac{1}{2^{2j-1}} f_\tau^{(2j)}(x) e^{-2ij\gamma} \mathbf{1}_{\{m_1 = -j, m_2 = j\}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

が成り立つ. ここで

$$c(j; m_1, m_2) = \frac{2j}{\sqrt{(j+m_1)(j+m_2)}}$$

とする. この漸化式の初項は

$$\mathbf{M}^{(1/2, 1/2)} = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

である. 行列のエルミート性 (2.1) と対称性 (2.2) を用いることで, 大きい  $j$  に対しても行列 ( $\mathbf{M}^{(j,j)}(x)$ ) を比較的簡単に計算することができる. また Appendix D に示すように次式も成立する.

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x) = \frac{2(jx + m_1)(jx + m_2)}{j(1-x)(1+x)} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x) \quad (2.9)$$

この漸化式も条件 (2.3) を満たす行列成分 ( $\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x)$ ) に対して成り立つ. 先と同様にエルミート性 (2.1) と対称な性質 (2.2) を用いることで, 行列 ( $\mathbf{M}^{(j, j-1)}(x)$ ) は ( $\mathbf{M}^{(j,j)}(x)$ ) から簡単に計算することができる.

## 第3章 多状態極限の極限分布

### 3.1 数値シミュレーションとの比較

(2.4) 式, (2.6) 式は複雑ではあるが, 任意の  $j, m, m_1, m_2$  に対して重み関数を正確に与えた式である. この正当性を確かめるために量子ウォークのシミュレーション結果と (2.4) 式を用いた数値的な結果を比較する. この節では  $j = 11/2$  で  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \pi/2, \pi)$  とする. 初期量子ビットを  $\phi_0^{(j)} = T((1+i)/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (1-i)/2)$  と選ぶと擬速度の極限分布は図 3.1(a) に示すようになる. 図中で細い破線は計算機シミュレーションで得られた時刻  $t = 100$  での擬速度  $X_t/t$  の分布を表し, 太い線は数値計算で得られた擬速度の極限分布を表す. この初期量子ビットの場合, 分布  $\nu^{(j)}$  は対称になる. 初期量子ビットを  $\phi_0^{(j)} = T(1+i, 0, 1+i, 1, i, i, 1+i, i, i, 1+i, i, 1+i)$  とすると図 3.1(b) に示すように非対称になる.

図 3.1(a) でみられるように  $(2j+1) = 12$  の極限分布は適切にスケール変換された 6 つの今野分布の重ね合わせで与えられ, 原点近傍では上に凸な構造がみえる.

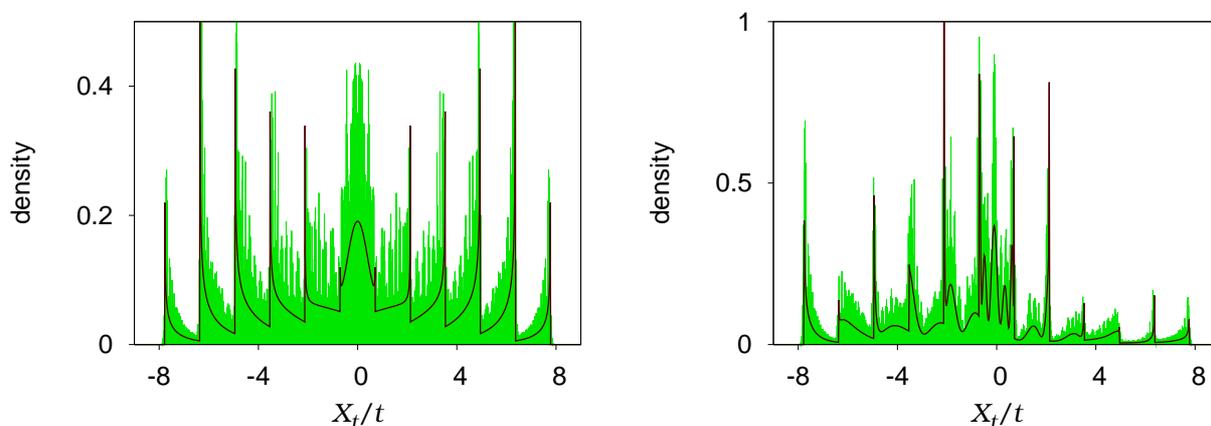


図 3.1: 12 成分模型に対するシミュレーション結果と極限分布の比較. (a) 対称な場合 (b) 非対称な場合.

### 3.2 原点近傍の凸構造

この節では量子コインのパラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を  $\alpha = \gamma = 0$  とし, 初期量子ビットを  $\phi_0^{(j)} = T(q, 0, \dots, 0, \bar{q})$ ,  $q = \frac{1}{2}(1+i)$  とする.

デルタ型のピークを避けるため, 状態数  $(2j+1)$  が偶数の場合を考える. 図 3.2 は  $\beta = \pi/2$  に対する極限分布の原点近傍  $X_t^{(j)}/t \in [-2, 2]$  を示している.  $j$  の変化に従い, 原点近傍での分布が上に凸になっていくのがわかる.

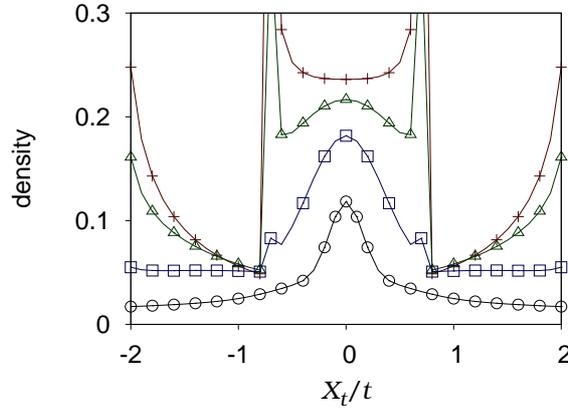


図 3.2:  $\beta = \pi/2$  の場合の原点近傍の極限分布. 各線上の点  $+$ ,  $\triangle$ ,  $\square$ ,  $\circ$  に対応して 6 状態, 8 状態, 14 状態, 50 状態を表す.

原点近傍の分布の性質をあきらかにするためパラメータ  $\beta$  を任意の値として極限分布 (1.4) の 2 次導関数を計算する. 前章で与えた重み関数を使うことで

$$\left. \frac{d^2 \nu^{(j)}}{dv^2} \right|_{v=0} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\beta/2)}}{\pi \cos(\beta/2)} \sum_{0 < m \leq j} \frac{1}{8m^3} \left[ \left\{ 2 + \frac{1}{\cos^2(\beta/2)} + 2(2m^2 - j) \right\} \frac{(2j)!}{2^{2j-1}(j+m)!(j-m)!} \right] \quad (3.1)$$

と得られる.

図 3.3 は  $\beta = \pi/10, \pi/2, 22\pi/25, 47\pi/50$  それぞれに対して  $j$  の値を変えたときの (3.1) の値を図示している. 任意の  $\beta \in [0, \pi]$  に対して  $d^2 \nu^{(j)}/dv^2|_{v=0}$  が負になるような臨界値  $j_c(\beta)$  があることがわかる. このことから状態数  $2j+1$  が十分大きければ極限分布は原点近傍で上に凸になるといえる.

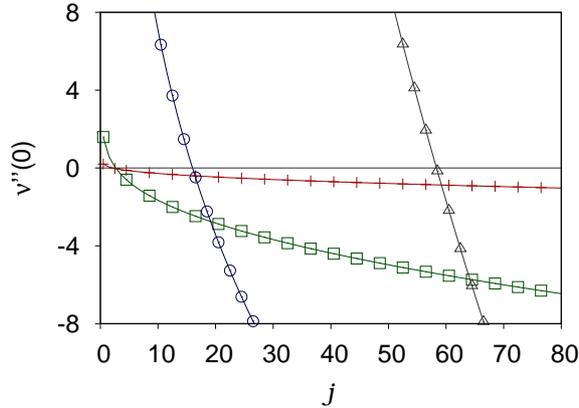


図 3.3: 2次導関数の原点での値. パラメータ  $\beta$  の値は各線上の点  $+$ ,  $\square$ ,  $\circ$ ,  $\triangle$  に対応して  $\beta = \pi/10$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $\beta = 22\pi/25$ ,  $\beta = 47\pi/50$  である.

### 3.3 分布の滑らかさ

擬速度の極限分布は適切にスケール変換された今野分布 (1.1) によって与えられる (1.4). 今野分布  $\mu(v/2m; \cos(\beta/2))$  は台  $(-2m \cos(\beta/2), 2m \cos(\beta/2))$  を持ちその境界で発散する. したがって図 3.1 で見られるように各点  $v = \pm 2m \cos(\beta/2)$ ,  $0 < m \leq j$  で尖っている.  $v = \pm 2m \cos \frac{\beta}{2}$  は (1.4) 式において今野分布がピークを持つ位置となる. 図 3.4(a) は  $(2j+1) = 50$ ,  $\beta = \pi/2$  の場合の極限分布をあらわしている. 原点近傍では今野分布のピークがなくなり原点でのピークが顕著にみえる.

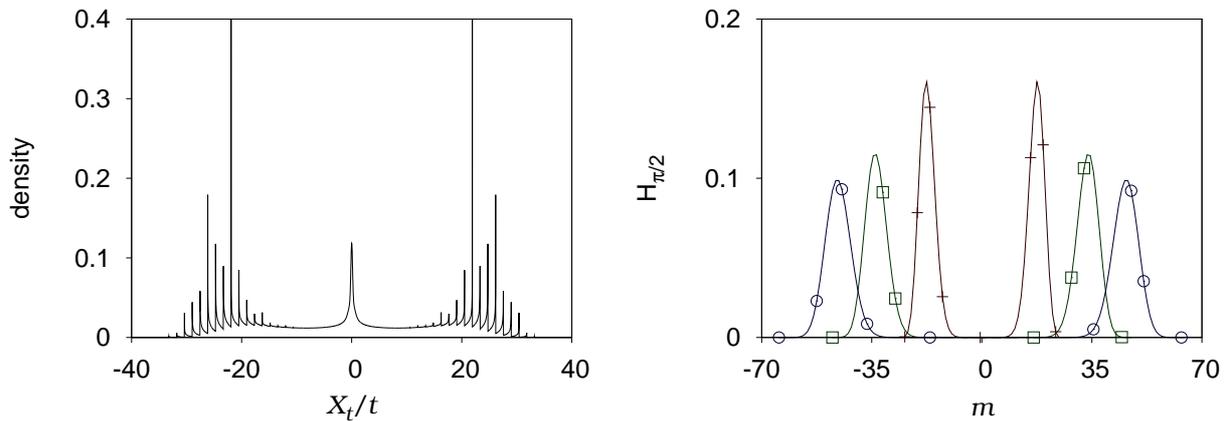


図 3.4: (a)  $(2j+1) = 50$ ,  $\beta = \pi/2$  の場合の極限分布. (b) 関数  $H_{\pi/2}^{(j)}(m)$ . 各線上の点  $+$ ,  $\square$ ,  $\circ$  に対応して  $(2j+1) = 50, 96, 130$  を表す.

分布で原点近傍から滑らかになっていく原因は重み関数  $\mathcal{M}^{(j,m)}$  にある. つまり今野分布が発散する位置  $v/2m = \cos(\beta/2)$  で重み関数  $\mathcal{M}^{(j,m)}(v/2m)$  はゼロの値をとるようになる

のである. この様子を見るために, 各  $j$  と  $\beta$  に対して  $m$  の関数として

$$\begin{aligned} H_\beta^{(j)}(m) &= \mathcal{M}^{(j,m)}(\cos \beta/2) \\ &= \frac{(2j)!}{2^{2j-1}} \sum_{k_1=0}^{j+m} \sum_{k_2=0}^{j-m} \frac{(-1)^{k_1} (\cos(\beta/2))^{k_1+k_2}}{k_1!(j+m-k_1)!k_2!(j-m-k_2)!} \mathbf{1}_{\{k_1+k_2 \text{ is even}\}} \end{aligned}$$

を定義する.  $H_\beta^{(j)}(m)$  は今野分布が発散する点での重み関数  $\mathcal{M}^{(j,m)}$  の値を与える関数である. 図 3.4(b) は  $\beta = \pi/2$  で状態数  $(2j+1) = 50, 96, 130$  の値をあらわす.  $j$  の増加に伴い  $H_\beta^{(j)}(m) = 0$  となる範囲が広がっていきのわかる.

### 3.4 極限分布の規格化

ここで考えている量子ウォークモデルは (1.2) で与えられるように, ウォーカーが各ステップで  $2j$  の範囲を移動する. したがってウォーカーの擬速度の分布は  $(-2j \cos(\beta/2), 2j \cos(\beta/2))$  の広がりをもつ.

$j \rightarrow \infty$  の極限を議論するために次の変数変換を行なう.

$$\tilde{X}_t^{(j)} = \frac{X_t^{(j)}}{2j \cos(\beta/2)} \quad (3.2)$$

状態数  $(2j+1) = 10, 20, 50$  に対して変換後の擬速度  $\tilde{X}_t^{(j)}/t$  の極限分布を図 3.5(a) に示す. この変換で, 極限分布の台は  $(-1, 1)$  に固定される.  $\beta = \pi/2$  に対して図 3.5(a) で見られるように,  $j$  の増加とともに中心近傍の凸構造が単調に鋭くなっていく. 滑らかさを見る関数 (3.2) はこの変換によって図 3.5(b) で示されるように, 非ゼロの値をもつ場所が固定される.

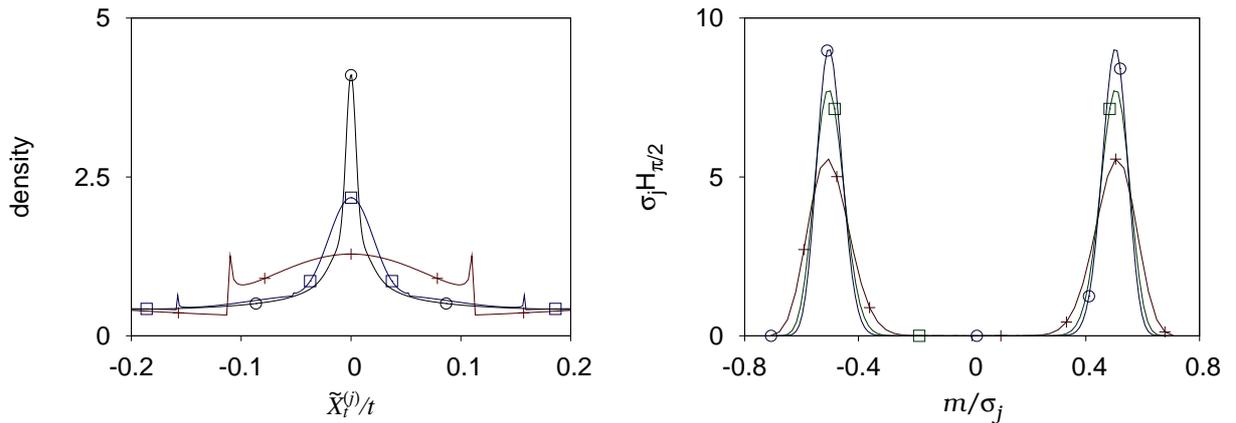


図 3.5: (a) スケール変換後の極限分布. 各線上の点  $+$ ,  $\square$ ,  $\circ$  に対応して 10 状態, 20 状態, 50 状態を表す. (b)  $\sigma_j H_\beta$  の値. 各線上の点  $+$ ,  $\square$ ,  $\circ$  に対応して  $(2j+1) = 50, 96, 130$  を表す. ただし  $\sigma_j = \sqrt{2j}$  とする.

### 3.5 重み関数の中心極限定理

量子コインを指定するパラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を任意にとり, 初期量子ビットを  $\phi_0^{(j)} = T(q_j, 0, \dots, 0, q_{-j})$ ,  $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $q_{-j} = \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-2j\gamma)}$  とする. この場合, 重み関数は対称で

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(j,m)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \\ &\quad \times \left\{ (1-x)^{j+m}(1+x)^{j-m} + (1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m} \right\} \end{aligned}$$

のように得られる. したがって  $x=0$  でのテイラー展開は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(j,m)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \\ &\quad \times \left[ 2 + 2(2m^2 - j)x^2 + 2\left\{ \frac{3j^2 - 3j(1+3m^2) + 4m^4 + 8m^2}{6} \right\} x^4 \right. \\ &\quad \left. + 2\left\{ \frac{-15j^3 + 45(1+2m^2)j^2 - 30(1+7m^2+2m^4)j + 92m^2 + 80m^4 + 8m^6}{90} \right\} x^6 \right. \\ &\quad \left. + O(x^8) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

と計算される.  $m$  を固定し  $j \rightarrow \infty$  を考えると, スターリングの公式より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi j}} \quad (3.4)$$

が得られる. よって (3.3) において  $x = \tilde{x}/\sqrt{j}$  と変換し  $j \rightarrow \infty$  の極限をとることにより次式が与えられる.

$$\mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}\right) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi j}} \left\{ 1 - \tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^4 - \frac{1}{6}\tilde{x}^6 + O(\tilde{x}^8) \right\} \quad (3.5)$$

これは  $\mathcal{M}^{(j,m)}$  の中心極限定理がガウス型であることを示唆している.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{j}}{2} \mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tilde{x}^2} \quad (3.6)$$

## 第4章 まとめ及び今後の課題

重み関数を行列で表すことで、重み関数は対応するエルミート行列を計算することにより一般的に議論することが可能となった。その結果、極限分布の多状態極限での振る舞いがみえてきた。初期量子ビット (1.3) を  $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $q_{-j} = \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-2j\gamma)}$ ,  $q_k = 0$ , ( $k = j-1, \dots, -j+1$ ) で与えると  $j$  の増加に伴い、原点近傍の分布は凸型になっていく (図.2)。ここで量子コインを指定するパラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  と  $\theta \in \mathbb{R}$  は任意でよい。さらに、原点近傍から今野分布のピークの効果が弱まっていくこともみられた。これらの原因は中心の重みがガウス関数に漸近することから生じる。 $j \rightarrow \infty$  の極限をとると模型の定義から分布は意味をもたなくなる。そこで極限分布の台を  $(-1, 1)$  に取る変換を考えると原点での値は  $\sqrt{j}$  に比例して増大しデルタ型のピークを持つことが期待される。

本論文では対称な分布を実現する最も簡単な初期量子ビットの組を用いて  $j \rightarrow \infty$  の漸近形を数値的に調べた。しかし  $j \rightarrow \infty$  極限の分布の振る舞いを解析的に導出することはまだできていない。対称な分布を取っても初期量子ビットの選びかたによって多状態極限での性質が異なることが予想される。重みが  $\beta$  に依らずに対称な分布を実現するための初期量子ビット (1.3) の与え方は  $q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ ,  $q_{-k} = \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-2k\gamma)}$ ,  $q_\ell = 0$  とすればよい。但し  $k$  は  $1/2, 3/2, \dots, j$  から一つを選び  $\ell \neq k$  とする。また重みが  $\beta$  に依り、 $\gamma = 0, \pi$  のときは  $q_k = \frac{1}{\sqrt{(2j+1)}}e^{i\pi/4}$ ,  $q_{-k} = \bar{q}_k$ , ( $k = j, j-2, \dots, -j+1$ ) かつ  $q_\ell = \frac{1}{\sqrt{(2j+1)}}e^{-i\pi/4}$ ,  $q_{-\ell} = \bar{q}_\ell$ , ( $\ell = j-1, j-3, \dots, -j$ ) とすれば対称な分布が得られる。2章で与えた重みの漸化式については、初項から全ての行列を関係付ける式を導出できていない。

特に興味深いことは古典的な拡散との対応である。量子力学では物理量は量子化され離散的な値を持つ。それらはプランク定数  $\hbar$  の定数倍で与えられる。例えば調和振動子のエネルギーは角振動数  $\omega$  を用いて  $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  と表せ、角運動量  $L$  の2乗と  $z$  成分は  $L^2 = \hbar^2\ell(\ell+1)$ ,  $\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  と  $L_z = \hbar m$ ,  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$  で表せる。もし量子系が  $\hbar$  を含んでいれば  $\hbar \rightarrow 0$  をとることで古典系への対応を考えることができる。他方、 $\hbar$  が含まれていないときは量子数の極限をとることで古典との対応を考えることができる。量子ウォークでは  $\hbar$  を含んでいない。この模型の量子数は  $j$  であり、その極限を適切にとることで古典的な拡散現象を記述できると期待する [19]。つまり  $j \rightarrow \infty$  で量子ウォークの振る舞いから古典拡散へのクロスオーバーが見られるはずである。スケーリング関数  $F(z)$  を用いて量子ウォーカーの位置が  $X_t^{(j)} \sim jtF(t/j^\theta)$  であるとしよう。スケーリング関数  $F(z)$  は  $z \rightarrow 0$  で  $F(z) \sim z^{-1/2}$ ,  $z \rightarrow \infty$  で  $F(z) \sim const.$  のように振舞うとする。したがって  $j$  が有限で  $t \rightarrow \infty$  のときは本論文でみられるように  $X_t^{(j)} \sim jt$  と振る舞う。他方、 $t$  が有限で  $j \rightarrow \infty$  のとき  $X_t^{(j)} \sim jt(t/j^\theta) = j^{1+\theta/2}\sqrt{t}$  となる。

つまり  $X_t^{(j)}/j^{(1+\theta/2)}$  は大きい  $t$  で  $\sqrt{t}$  拡散である. 今後, 量子ウォークから古典的拡散過程への移行現象が明らかにされることを期待する.

## Appendix A $j = 1/2, 1, 3/2$ のときの重み行列

ここで  $\tau = \tan(\beta/2)$ , また  $f_\tau^{(1)}(x) = \tau x$ ,  $f_\tau^{(2)}(x) = (2\tau^2 + 1)x^2 - 1$  とする.

$$\mathbf{M}^{(1/2,1/2)} = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-x)^2 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{1}{2}f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & (1-x)(1+x) & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^\gamma \\ \frac{1}{2}f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{2}(1+x)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(3/2,3/2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1-x)^3 & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} & \frac{1}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{3i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)^2(1+x) & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)^2 & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} \\ \frac{1}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{-3i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1+x)^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(3/2,1/2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1-x)^2(1+x) & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)(3x+1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(3x-1)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} & -\frac{3}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{3i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)(3x+1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1-x)(3x+1)^2 & \frac{1}{4}(3x+1)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(3x+1)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(3x-1)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{1}{4}(3x+1)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1+x)(3x-1)^2 & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} \\ -\frac{3}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{-3i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(3x+1)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1+x)^2(1-x) \end{pmatrix}$$

## Appendix B 重み行列 (2.4) の導出

重み行列 (2.4) の導出は, 論文 [15] の Sec.III と Appendix C で与えられている変換を用いることで計算できる. 論文 [15] の Sec.III 中の式  $|C_m^{(j)}(k)|^2 + |C_{-m}^{(j)}(k)|^2$  に変数変換  $k \mapsto \chi \mapsto y$  を行ったものが  $\mathcal{M}_{\text{even}}^{(j,m)}(y/2m)$ ,  $|C_m^{(j)}(k)|^2 - |C_{-m}^{(j)}(k)|^2$  に変数変換  $k \mapsto \chi \mapsto y$  を行ったものが  $\mathcal{M}_{\text{odd}}^{(j,m)}(y/2m)$  として得られる. 論文 [15] の Appendix C より

$$\begin{aligned} |C_m^{(j)}(k)|^2 &= \sum_{m_1=-j}^j \sum_{m_2=-j}^j q_{m_1} \bar{q}_{m_2} e^{i(m_1-m_2)\phi(k)} \\ &\times \sum_{l_1} \sum_{l_2} \Gamma(j, m_1, m, l_1) \Gamma(j, m_2, m, l_2) \\ &\times \left( \cos \frac{\theta(k)}{2} \right)^{4j+m_1+m_2-2m-2l_1-2l_2} \left( \sin \frac{\theta(k)}{2} \right)^{2l_1+2l_2+2m-m_1-m_2} \end{aligned}$$

が与えられる. ここで  $c = \cos \beta/2, s = \sin \beta/2$  と略記し,  $|C_m^{(j)}(k)|^2 = [\phi_0^{(j)}]^\dagger \mathbf{C}^{(j,m,c,s)}(k) \phi_0^{(j)}$  のように初期量子ビットと行列でかくことにする. 行列  $\mathbf{C}^{(j,m,c,s)}(k)$  の  $(m_1, m_2)$  成分は以

下の式で与えられる.

$$\mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, m, c, s)}(k) = \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) e^{i(m_2 - m_1)\phi(k)} \\ \times C^{4j + m_1 + m_2 - 2m - 2\ell_1 - 2\ell_2} S^{2\ell_1 + 2\ell_2 + 2m - m_1 - m_2}$$

ただし,  $(m_1, m_2)$  成分は (2.3) の条件を満たすものとする.  $\sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, -m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, -m, \ell_2) = (-1)^{2j + m_1 + m_2} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2)$  であることより  $\mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, -m, c, s)}$  は得られる.

$$\mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, -m, c, s)}(k) = (-1)^{2j + m_1 + m_2} \mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, m, s, c)}(k)$$

従って次式が与えられる.

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{even})}(k) = \mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, m, c, s)}(k) + \mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, -m, c, s)}(k) \\ = \mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, m, c, s)}(k) + (-1)^{2j + m_1 + m_2} \mathbf{C}_{m_1 m_2}^{(j, m, s, c)}(k)$$

ここで変数変換  $k \mapsto \chi \mapsto y$  を行うと

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{even})}\left(\frac{y}{2m}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ \times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}}{k_2} \left\{ (-1)^{k_1} + (-1)^{2j + m_1 + m_2 + k_2} \right\} \left(\frac{y}{2m}\right)^{k_1 + k_2} \\ \times \left\{ \frac{y}{2m} \tau - i \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2m}\right)^2 (\tau^2 + 1)} \right\}^{m_2 - m_1} e^{-i(m_2 - m_1)\gamma}$$

と計算される. 但し  $\tau = \tan \frac{\beta}{2}$ ,  $A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)} = 2j - (m - m_1) - (\ell_1 + \ell_2)$ ,  $B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)} = m - m_2 + \ell_1 + \ell_2$  と略記した. さらに  $\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{even})}$  が偶関数であることを考えると

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{even})}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ \times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}}{k_2} \left\{ (-1)^{k_1} + (-1)^{2j + m_1 + m_2 + k_2} \right\} x^{k_1 + k_2} \\ \times f_{\tau}^{(m_2 - m_1)}(x) e^{-i(m_2 - m_1)\gamma}$$

のように計算される. ここで  $x = y/2m$  とした. 同様に計算することにより  $\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{odd})}(x)$  も求まる.

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m, \text{odd})}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ \times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}}{k_2} \left\{ (-1)^{k_1} - (-1)^{2j + m_1 + m_2 + k_2} \right\} x^{k_1 + k_2} \\ \times f_{\tau}^{(m_2 - m_1)}(x) e^{-i(m_2 - m_1)\gamma}$$

したがって重みの行列表示は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, m)}(x) &= \frac{1}{2^{2j-1}} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ &\times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j, m, m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m, m_2)}}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} f_{\tau}^{(m_2-m_1)}(x) e^{-i(m_2-m_1)\gamma} \end{aligned}$$

## Appendix C 漸化式の導出

### C.1 (2.7) について

$m_1 \neq -j$  の場合

$$\begin{aligned} (1-x) \mathbf{M}_{m_1 - \frac{1}{2} m_2 - \frac{1}{2}}^{(j - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-2} f_{\tau}^{(m_2-m_1)}(x) e^{-i(m_2-m_1)\gamma} \\ &\times \Gamma\left(j - \frac{1}{2}, m_1 - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, 0\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}, m_2 - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, 0\right) \\ &\times \sum_{k_1=0}^{j+m_1-1} \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j+m_1-1}{k_1} \binom{j-m_2}{k_2} (-1)^{k_1} (x^{k_1+k_2} - x^{k_1+k_2+1}) \end{aligned}$$

上式で  $k_1, k_2$  に関する和の部分だけ考えると

$$\begin{aligned} &\sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j-m_2}{k_2} x^{k_2} \left\{ \sum_{k_1=0}^{j+m_1-1} \binom{j+m_1-1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} - \sum_{k_1=0}^{j+m_1-1} \binom{j+m_1-1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1+1} \right\} \\ &= \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j-m_2}{k_2} x^{k_2} \left[ 1 + (-x)^{j+m_1} + \sum_{k_1=1}^{j+m_1-1} \binom{j+m_1-1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} \right] \\ &= \sum_{k_1=0}^{j+m_1} \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j+m_1}{k_1} \binom{j-m_2}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} &\frac{c(j; m_1, m_2)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-2} \Gamma\left(j - \frac{1}{2}, m_1 - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, 0\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}, m_2 - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \Gamma(j, m_1, j, 0) \Gamma(j, m_2, j, 0) \end{aligned}$$

であるので (2.7) 式が成立する.  $m_1 = -j$  の場合は  $m_2 = j$  だけ考えればよい.

$$\mathbf{M}_{-jj}^{(j, m)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} f_{\tau}^{(2j)}(x) e^{-i(2j)\gamma}$$

従って (2.7) 式が得られる.

## C.2 (2.9)式に関して

$2j(1-x)(1+x)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x) = 4(jx - m_1)(jx - m_2)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j)}(x)$  が成り立つことを証明する. 右辺については  $(jx - m_1)(jx - m_2)$  を適当な 2 次多項式として計算すると

$$\begin{aligned}
& 4(a_1 x^2 + a_2 x + a_3)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j)}(x) \\
= & c_0 \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j-m_2}{k_2} x^{k_2} \\
\times & \left[ 4(-1)^{j+m_1} a_1 x^{j+m_1+2} \right. \\
& + 4\{a_2 - (j+m_1)a_1\}(-1)^{j+m_1} x^{j+m_1+1} \\
& + 4 \sum_{k_1=2}^{j+m_1} \left\{ \binom{j+m_1}{k_1-2} a_1 - \binom{j+m_1}{k_1-1} a_2 + \binom{j+m_1}{k_1} a_3 \right\} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
& \left. + 4\{a_2 - (j+m_1)a_3\}x + 4a_3 \right] \tag{4.1}
\end{aligned}$$

となる. ただし  $c_0 = \frac{1}{2^{2j-1}} \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m_1)!(j-m_1)!(j+m_2)!(j-m_2)!}}$  とした.

左辺については, 先ず  $(1-x)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x)$  を計算すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
& (1-x)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x) \\
= & \frac{1}{2^{2j-1}} \left[ \Gamma_{m_1, 0} \Gamma_{m_2, 0} \sum_{k_1=0}^{j+m_1+2} \sum_{k_2=0}^{j-m_2-1} \binom{j+m_1+2}{k_1} \binom{j-m_2-1}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \right. \\
& + \Gamma_{m_1, 0} \Gamma_{m_2, 1} \sum_{k_1=0}^{j+m_1+1} \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j+m_1+1}{k_1} \binom{j-m_2}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \\
& + \Gamma_{m_1, 1} \Gamma_{m_2, 0} \sum_{k_1=0}^{j+m_1+1} \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j+m_1+1}{k_1} \binom{j-m_2}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \\
& \left. + \Gamma_{m_1, 1} \Gamma_{m_2, 1} \sum_{k_1=0}^{j+m_1} \sum_{k_2=0}^{j-m_2+1} \binom{j+m_1}{k_1} \binom{j-m_2}{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \right] \tag{4.2}
\end{aligned}$$

上式で  $\Gamma_{m, l} = \Gamma(j, m, j-1, l)$  と略記した. したがって  $(1-x^2)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x)$  を計算し,  $\binom{j-m_2+1}{k_2} = \binom{j-m_2}{k_2} + \binom{j-m_2}{k_2-1}$  に注意して  $k_2$  に関する和の上限をそろえると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
& 2j(1-x^2)\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x) \\
= & \frac{1}{2^{2j-1}} \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m_1)!(j-m_1)!(j+m_2)!(j-m_2)!}} \sum_{k_2=0}^{j-m_2} \binom{j-m_2}{k_2} x^{k_2} \\
\times & \left[ \gamma_1 \sum_{k_1=0}^{j+m_1+2} \binom{j+m_1+2}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} + \gamma_2 \sum_{k_1=0}^{j+m_1+1} \binom{j+m_1+1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} \right. \\
& - \gamma_2 \sum_{k_1=1}^{j+m_1+2} \binom{j+m_1+1}{k_1-1} (-1)^{k_1} x^{k_1} + \gamma_3 \sum_{k_1=0}^{j+m_1+1} \binom{j+m_1+1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
& - \gamma_3 \sum_{k_1=1}^{j+m_1+2} \binom{j+m_1+1}{k_1-1} (-1)^{k_1} x^{k_1} + \gamma_4 \sum_{k_1=0}^{j+m_1} \binom{j+m_1}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
& - \gamma_4 \sum_{k_1=1}^{j+m_1+1} \binom{j+m_1}{k_1-1} (-1)^{k_1} x^{k_1} - \gamma_4 \sum_{k_1=1}^{j+m_1+1} \binom{j+m_1}{k_1-1} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
& \left. + \gamma_4 \sum_{k_1=2}^{j+m_1+2} \binom{j+m_1}{k_1-2} (-1)^{k_1} x^{k_1} \right] \tag{4.3}
\end{aligned}$$

ここで  $\gamma_1 = (j-m_1)(j-m_2)$ ,  $\gamma_2 = -(j-m_2)(j+m_1)$ ,  $\gamma_3 = -(j+m_2)(j-m_1)$ ,  $\gamma_4 = (j+m_1)(j+m_2)$  とした.

(4.1) 式と (4.3) 式を比べると大括弧の中以外は等しいことがわかる. そこで (4.3) 式の大括弧内を書き直すと

$$\begin{aligned}
(4.3) \text{ 式の大括弧内} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\
&+ \{(-\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)(j+m_1) - 2(\gamma_1 - \gamma_4)\}x \\
&+ \sum_{k_1=2}^{j+m_1} \{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \binom{j+m_1}{k_1} \\
&\quad + 2(\gamma_1 - \gamma_4) \binom{j+m_1}{k_1-1} + (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \binom{j+m_1}{k_1-2}\} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
&+ \{- (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)(j+m_1) - 2(\gamma_1 - \gamma_4)\} (-1)^{j+m_1} x^{j+m_1-1} \\
&+ (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)(-x)^{j+m_1} \\
&= 4m_1 m_2 + \{4(m_1+m_2)j - 4m_1 m_2(j+m_1)\}x \\
&+ \sum_{k_1=2}^{j+m_1} \{4m_1 m_2 \binom{j+m_1}{k_1} \\
&\quad - 4(m_1+m_2)j \binom{j+m_1}{k_1-1} + 4j^2 \binom{j+m_1}{k_1-2}\} (-1)^{k_1} x^{k_1} \\
&+ \{4(m_1+m_2)j - 4m_1 m_2(j+m_1)\} (-1)^{j+m_1} x^{j+m_1-1} \\
&+ 4j^2 (-x)^{j+m_1}
\end{aligned}$$

従って  $a_1 = j^2$ ,  $a_2 = (m_1 + m_2)j$ ,  $a_3 = m_1m_2$  であれば (2.9) 式が成立する.

## 参考文献

- [1] 今野紀雄 : 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).
- [2] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A **48**, 1687 (1993).
- [3] D. A. Meyer, J. Stat. Phys. **85**, 551 (1996).
- [4] A. Nayak and A. Vishwanath, e-print quant-ph/0010117.
- [5] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, in Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (ACM Press, New York, 2001), pp.37-49.
- [6] B. C. Travaglione and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **65**, 032310 (2002)
- [7] J. Kempe, Contemp. Phys. **44**, 307 (2003).
- [8] A. Ambainis, Int. J. Quantum Inf. **1**, 507 (2003).
- [9] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, Phys. Rev. A **67**, 052317 (2003).
- [10] V. M. Kendon, Int. J. Quantum Inf. **4**, 791 (2006).
- [11] N. Konno, Quantum Inf. Process **1**, 345 (2002).
- [12] N. Konno, J. Math. Soc. Jpn, **57**, 1179 (2005).
- [13] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, Phys. Rev. E **69**, 026119 (2004).
- [14] M. Katori, S. Fujino, and N. Konno, Phys. Rev. A **72**, 012316 (2005).
- [15] T. Miyazaki, M. Katori, N. Konno, Phys. Rev. A **76** 012332 (2007).
- [16] N. Konno, *Quantum Walks*, Lecture at the School “Quantum Potential Theory: Structure and Applications to Physics” held at the Alfried Krupp Wissenschaftskolleg, Greifswald, 26 February - 9 March 2007. (Reihe Mathematik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, No.2, 2007.) The lecture note is available at <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/algebra/qpt/konno-26nov2007>.

- [17] E. P. Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Academic Press, New York, 1959).
- [18] A. Messiah, *Quantum mechanics*, vol. II, (North Holland, Amsterdam, 1962).
- [19] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, Phys. Rev. Lett. A **91**, 130602 (2003).